UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2020-2021
Convocatoria: Extraordinaria
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

El alumno contestará a SÓLO CINCO ejercicios de entre los planteados.
En caso contrario, el corrector corregirá los cinco que haya contestado primero.
Todas las preguntas tienen la misma puntuación. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

1.- (2 puntos) Sea la función

$$f(x)=\frac{x^2}{2-e^{-x}}$$

Determinar el dominio, extremos relativos y las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas cuando existan.

2.- (2 puntos) Sea la función

$$f(x)=\cos x$$

Hallar el área de la superficie encerrada por la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto $x=-\frac{\pi}{4}$, la gráfica de *f* y las rectas $x=-\frac{\pi}{4}$ y $x=\frac{\pi}{2}$.

3.- (2 puntos) Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tgx}$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x}\right)^{x}$

4.- (2 puntos) Discutir y resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax+y+z=2 \\ 2x+ay+a^2z=1 \\ 2x+y+z=2 \end{cases}$$

según el valor del parámetro real *a*.

5.- (2 puntos) Hallar las matrices *A – B*, *A* y *B*, sabiendo que las matrices A y B, satisfacen las siguientes identidades:

$$A+B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2-AB+BA-B^2=\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6.- (2 puntos) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calcular A^{-1} y A^{20}, utilizando necesariamente la siguiente identidad $A^3=-I$, donde I es la matriz identidad.

7.- (2 puntos) Hallar la ecuación de la recta, tal que:

a) pasa por el punto $P(1,1,1)$,

b) es paralela al plano $\pi \equiv x+y-2z-3=0$,

c) es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x=3+\lambda, \\ y=2-\lambda, \\ z=1-2\lambda, \end{cases}$

8.- (2 puntos) Calcular el valor del parámetro real a para que las rectas r y s se corten y calcular este punto.

$$r \equiv \begin{cases} 4x+z=a, \\ x+y=2, \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x+y+z=0, \\ x+2z=2a \end{cases}$$

9.- (2 puntos) El tiempo que una persona tarda en llegar a su lugar de trabajo sigue una distribución normal de media 20 minutos. Se ha comprobado que el 84,1 % de los días llega antes de 22 minutos. Si durante el año acude a su lugar de trabajo 290 días, ¿cuántos días puede estimar que tardará menos de 18 minutos en llegar?.

10.- (2 puntos) Sofía va al teatro, cine o de concierto con probabilidades 0,5, 0,2 y 0,3. El 60 % de las veces que va al cine se encuentra con amigos y se va de cena con los amigos. Lo mismo le ocurre el 10 % de las veces que va al teatro y el 90 % de las que va de concierto.

a) ¿Qué probabilidad hay de que se vaya de cena con los amigos?.

b) Si vuelve a casa después del espectáculo, ¿qué probabilidad hay de que haya ido al cine?.

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

SOLUCIONES

1.- (2 puntos) Sea la función

$$f(x)=\frac{x^2}{2-e^{-x}}$$

Determinar el dominio, extremos relativos y las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas cuando existan.

El dominio serán todos los reales excepto los que anulen el denominador.

$$2-e^{-x}=0 \Rightarrow 2=e^{-x} \Rightarrow \ln 2=\ln e^{-x} \Rightarrow \ln 2=-x \Rightarrow x=-\ln 2$$

$$Dominio\ f(x)=\mathbb{R}-\{-\ln 2\}$$

Derivamos la función e igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x)=\frac{x^2}{2-e^{-x}} \Rightarrow f\,'(x)=\frac{2x\left(2-e^{-x}\right)-\left(+e^{-x}\right)x^2}{\left(2-e^{-x}\right)^2}=\frac{x\left[4-2e^{-x}-xe^{-x}\right]}{\left(2-e^{-x}\right)^2}$$

$$f\,'(x)=0 \Rightarrow \frac{x\left[4-2e^{-x}-xe^{-x}\right]}{\left(2-e^{-x}\right)^2}=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ o \\ 4-2e^{-x}-xe^{-x}=0 \to (2+x)e^{-x}=4 \Rightarrow \dfrac{2+x}{e^x}=4\ ¿? \end{cases}$$

¿Como resolvemos la ecuación planteada?

No es sencillo. Vamos a ver que la función $y=4-2e^{-x}-xe^{-x}$ es siempre positiva, por lo que no tiene solución la ecuación $4-2e^{-x}-xe^{-x}=0$.

$$y=4-2e^{-x}-xe^{-x} \Rightarrow y'=2e^{-x}-e^{-x}+xe^{-x}=e^{-x}+xe^{-x}=(1+x)e^{-x}$$

$y'=0 \Rightarrow (1+x)e^{-x}=0 \Rightarrow x=-1$. Vemos si es máximo o mínimo con y´´.

$y''=e^{-x}-(1+x)e^{-x}=e^{-x}-e^{-x}-xe^{-x}=-xe^{-x} \Rightarrow y''(-1)=e>0$. $x=-1$ es un mínimo.

Como $y(-1)=4-2e^1+e^1=4-e=1.28>0$

$$y=4-2e^{-x}-xe^{-x}>4-e>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

$Conclusión: 4-2e^{-x}-xe^{-x}=0$ No tiene solución

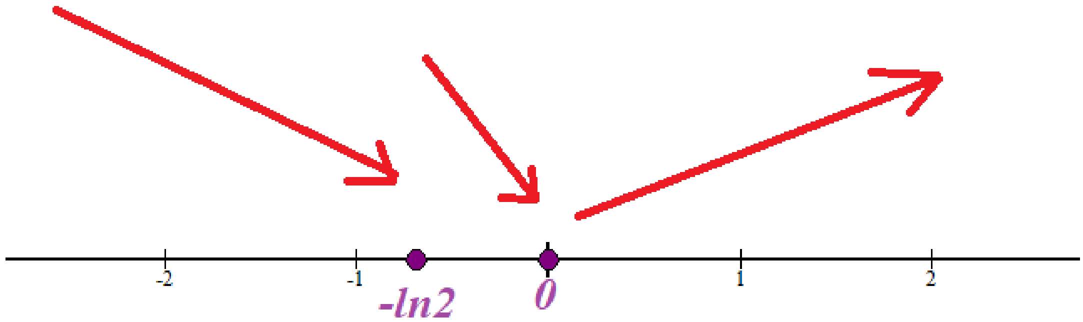
El único punto crítico es *x = 0*. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor, añadiendo el valor excluido del dominio *x = –ln2*.

- En $\left(-\infty,-\ln 2\right)$ tomamos *x* = *–1* y la derivada vale $f\,'(-1)=\dfrac{-\left[4-2e+e\right]}{\left(2-e\right)^2}=\dfrac{-\left(4-e\right)}{+}<0$.

  La función decrece en $\left(-\infty,-\ln 2\right)$.
- En $\left(-\ln 2,0\right)$ tomamos *x* = *–0.5* y la derivada vale

  $f\,'(-0.5)=\dfrac{-0.5\left[4-2e^{0.5}+0.5\cdot e^{0.5}\right]}{\left(2-e^{0.5}\right)^2}=\dfrac{-0.5\left[4-1.52e^{0.5}\right]}{+}<0$. La función decrece en $\left(-\ln 2,0\right)$.
- En $\left(0,+\infty\right)$ tomamos *x* = *1* y la derivada vale $f\,'(1)=\dfrac{\left[4-2e^{-1}-e^{-1}\right]}{\left(2-e^{-1}\right)^2}=\dfrac{\left[4-3e^{-1}\right]}{+}>0$. La función crece en $\left(0,+\infty\right)$.

La función sigue el esquema:



La función decrece en $\left(-\infty,-\ln 2\right)\cup\left(-\ln 2,0\right)$ y crece en $\left(0,+\infty\right)$.
Presenta un mínimo relativo en *x* = *0*.

Como $f(0)=\dfrac{0^2}{2-e^{-0}}=0$ el mínimo relativo tiene coordenadas (0, 0).

Asíntota vertical. $x=a$
¿*x* = *–ln2*?

$$\lim_{x\to-\ln 2} f\left(x\right)=\lim_{x\to-\ln 2}\frac{x^2}{2-e^{-x}}=\frac{\left(-\ln 2\right)^2}{0}=\infty$$

x = *–ln2* es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2-e^{-x}}=\frac{+\infty}{2-e^{-\infty}}=\frac{+\infty}{2}=+\infty$$

$$b=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{2-e^{-x}}=\frac{+\infty}{2-e^{+\infty}}=\frac{+\infty}{+\infty}=Indeterminación(L'Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{e^{-x}}=\frac{+\infty}{+\infty}=Indeterminación(L'Hôpital)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{-e^{-x}}=\frac{2}{-\infty}=0$$

La función tiene asíntota horizontal en $-\infty$ con ecuación $y=0$

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Vemos si tiene en +∞

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2}{2-e^{-x}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x\left(2-e^{-x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2-e^{-x}} = \infty$$

No tiene asíntota oblicua en +∞

En –∞ no tiene, pues existe asíntota horizontal en –∞.

2.- (2 puntos) Sea la función

$$f(x)=\cos x$$

Hallar el área de la superficie encerrada por la recta tangente a la gráfica de f en el punto $x=-\frac{\pi}{4}$, la gráfica de f y las rectas $x=-\frac{\pi}{4}$ y $x=\frac{\pi}{2}$.

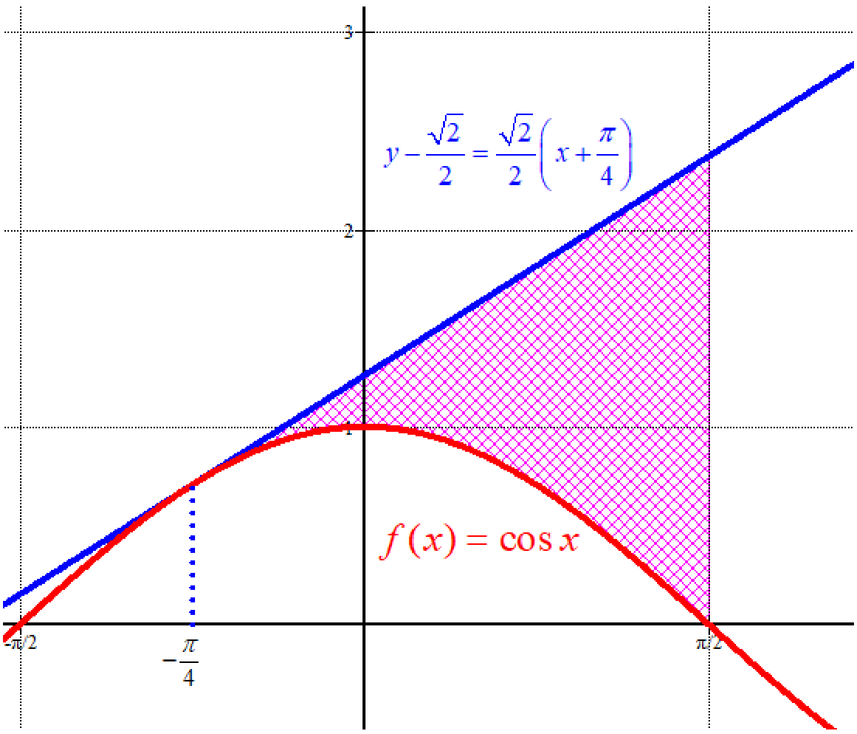
Hallamos la ecuación de la recta tangente a $f(x)=\cos x$ en $x=-\frac{\pi}{4}$.

$$f(x)=\cos x \Rightarrow f'(x)=-senx$$

$$\left.\begin{array}{l} y-f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \\ f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-sen\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow y-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\pi\sqrt{2}}{8}+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

En el intervalo $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ la función $f(x)=\cos x$ y la recta tangente no vuelven a cortarse, por lo que el área es el valor absoluto de la integral entre $x=-\frac{\pi}{4}$ y $x=\frac{\pi}{2}$ de la diferencia de las dos funciones.

Dibujamos las gráficas de la función y su tangente, asi como la región de la cual queremos calcular su área.



$$Área = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\pi\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x dx = \left[\frac{\sqrt{2}}{4}x^2 + \frac{\pi\sqrt{2}}{8}x + \frac{\sqrt{2}}{2}x - senx \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left[\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi\sqrt{2}}{8}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) - sen\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] -$$

$$- \left[\frac{\sqrt{2}}{4}\left(-\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\pi\sqrt{2}}{8}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\pi}{4}\right) - sen\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right] \simeq \boxed{1.9218\, u^2}$$

3.- (2 puntos) Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{tgx}$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x}\right)^{x}$

a) Para calcular este límite tomamos logaritmos neperianos.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tgx}=a\Rightarrow \ln\left(\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tgx}\right)=\ln a\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tgx}=\ln a\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} tgx\cdot\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)=\ln a\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} tgx\cdot\left(\ln 1-\ln x^2\right)=\ln a\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} tgx\cdot\left(\ln 1-2\ln x\right)=\ln a\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}-2tgx\cdot\ln x=\ln a\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}-2\frac{senx}{\cos x}\cdot\ln x=\ln a\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}-2\frac{senx\cdot\ln x}{\cos x}=\ln a\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}-2\frac{\ln x}{\frac{\cos x}{senx}}=\lim_{x\to 0^+}-2\frac{-\infty}{\infty}=\frac{\infty}{\infty}=Indeterminación(L´Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}-2\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{sen^2x}}=\lim_{x\to 0^+}2\frac{sen^2x}{x}=\frac{0}{0}=Indeterminación(L´Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}2\frac{2senx\cos x}{1}=0\Rightarrow \ln a=0\Rightarrow a=e^0=1$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{tgx}=1}$$

b)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x}\right)^x = 1^\infty = Indeterminación \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x}\right)^x = a \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{4x-1}{4x}\right)^x = \ln a \Rightarrow \lim_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(\frac{4x-1}{4x}\right) = \ln a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{4x-1}{4x}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(4x-1)-\ln 4x}{\frac{1}{x}} = Indeterminación(L\acute{}Hôpital) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{4x-1}-\frac{4}{4x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{16x-16x+4}{4x(4x-1)}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x(4x-1)}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-x^2}{4x^2-x} = -\frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln a = -\frac{1}{4} \Rightarrow a = e^{-\frac{1}{4}} \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x}\right)^x = e^{-\frac{1}{4}}}$$

4.- (2 puntos) Discutir y resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax+y+z=2 \\ 2x+ay+a^2z=1 \\ 2x+y+z=2 \end{cases}$$

según el valor del parámetro real *a*.

La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & a & a^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es $A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 2 \\ 2 & a & a^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$

Calculamos el determinante de A y averiguamos cuando se anula.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & a & a^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=a^2+2a^2+2-2a-2-a^3=-a^3+3a^2-2a$$

$$|A|=0 \Rightarrow -a^3+3a^2-2a=0 \Rightarrow -a\left(a^2-3a+2\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ o \\ a^2-3a+2 \Rightarrow a=\dfrac{3\pm 1}{2}=\begin{cases} a=2 \\ a=1 \end{cases} \end{cases}$$

Distinguimos 4 casos diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 0, a \neq 1 \text{ y } a \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una solución única)

Utilizamos el método de Cramer para obtener las soluciones.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & a & a^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{\cancel{2a}+\cancel{2a^2}+1-\cancel{2a}-1-\cancel{2a^2}}{-a^3+3a^2-2a}=\frac{0}{-a(a-1)(a-2)}=0$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a & 2 & 1\\ 2 & 1 & a^2\\ 2 & 2 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 & 1\\ 2 & a & a^2\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{a+4a^2+4-2-4-2a^3}{-a^3+3a^2-2a}=\frac{-2a^3+4a^2+a-2}{-a(a-1)(a-2)}=$$

$$\boxed{\begin{array}{c|cccc} & -2 & 4 & 1 & -2\\ 2 & & -4 & 0 & 2\\ \hline & -2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\quad -2a^3+4a^2+a-2= =(a-2)(-2a^2+1)}$$

$$=\frac{(a-2)(-2a^2+1)}{-a(a-1)(a-2)}=\frac{-2a^2+1}{-a(a-1)}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 2\\ 2 & a & 1\\ 2 & 1 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 & 1\\ 2 & a & a^2\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}}=\frac{2a^2+2+4-4a-4-a}{-a^3+3a^2-2a}=\frac{2a^2-5a+2}{-a(a-1)(a-2)}=\frac{\cancel{(a-2)}(2a-1)}{-a(a-1)\cancel{(a-2)}}=\frac{2a-1}{a(1-a)}$$

CASO 2. $a=0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 2\end{array}\right)$

La transformamos en una matriz triangular equivalente y así estudiar mejor el rango de A y de A/B.

$$A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 2\end{array}\right)\Rightarrow\{\text{Fila }3^a\leftrightarrow\text{Fila }1^a\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 2\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{l}{\text{Fila }2^a-\text{Fila }1^a}\\ 2 & 0 & 0 & 1\\ -2 & -1 & -1 & -2\\ \hline 0 & -1 & -1 & -1\\ \multicolumn{4}{l}{\text{Nueva Fila }2^a}\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 2\end{array}\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{l}{\text{Fila }3^a+\text{Fila }2^a}\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -1 & -1\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\\ \multicolumn{4}{l}{\text{Nueva Fila }3^a}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$(A/B)'=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

Se observa que el rango de A es 2 y el de A/B es 3, los rangos son distintos y el sistema es incompatible (no tiene solución).

CASO 3. $a=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\2&1&1&1\\2&1&1&2\end{array}\right)$

La transformamos en una matriz triangular equivalente y asi estudiar mejor el rango de A y de A/B.

$$A/B=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\2&1&1&1\\2&1&1&2\end{array}\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc}\multicolumn{4}{c}{\text{Fila }2^a-2\cdot\text{Fila }1^a}\\2&1&1&1\\-2&-2&-2&-4\\\hline 0&-1&-1&-3\\\multicolumn{4}{c}{\text{Nueva Fila }2^a}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{cccc}\multicolumn{4}{c}{\text{Fila }3^a-2\cdot\text{Fila }1^a}\\2&1&1&2\\-2&-2&-2&-4\\\hline 0&-1&-1&-2\\\multicolumn{4}{c}{\text{Nueva Fila }3^a}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&-1&-1&-3\\0&-1&-1&-2\end{array}\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc}\multicolumn{4}{c}{\text{Fila }3^a-\text{Fila }2^a}\\0&-1&-1&-2\\0&1&1&3\\\hline 0&0&0&1\\\multicolumn{4}{c}{\text{Nueva Fila }3^a}\end{array}\right\}\Rightarrow(A/B)'=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&-1&-1&-3\\0&0&0&1\end{array}\right)$$

Se observa que el rango de A es 2 y el de A/B es 3, los rangos son distintos y el sistema es incompatible (no tiene solución).

CASO 4. $a=2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B=\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&1&2\\2&2&4&1\\2&1&1&2\end{array}\right)$

La transformamos en una matriz triangular equivalente y asi estudiar mejor el rango de A y de A/B.

$$A/B=\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&1&2\\2&2&4&1\\2&1&1&2\end{array}\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc}\multicolumn{4}{c}{\text{Fila }2^a-\text{Fila }1^a}\\2&2&4&1\\-2&-1&-1&-2\\\hline 0&1&3&-1\\\multicolumn{4}{c}{\text{Nueva Fila }2^a}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{cccc}\multicolumn{4}{c}{\text{Fila }3^a-\text{Fila }1^a}\\2&1&1&2\\-2&-1&-1&-2\\\hline 0&0&0&0\\\multicolumn{4}{c}{\text{Nueva Fila }3^a}\end{array}\right\}\Rightarrow(A/B)'=\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&1&2\\0&1&3&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

Se observa que el rango de A es 2, al igual que el de A/B, los rangos son iguales a 2, pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resolvemos a partir del sistema equivalente obtenido.

$$A/B=\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&1&2\\2&2&4&1\\2&1&1&2\end{array}\right)\Rightarrow(A/B)'=\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&1&2\\0&1&3&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{c}2x+y+z=2\\2x+2y+4z=1\\2x+y+z=2\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{r}2x+y+z=2\\y+3z=-1\\0=0\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}2x+y+z=2\\\boxed{y=-1-3z}\end{array}\right.\Rightarrow 2x-1-3z+z=2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x=3+2z\Rightarrow\boxed{x=\frac{3+2z}{2}}$$

$$\boxed{Soluciones:\left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{3+2t}{2}\\y=-1-3t\text{, } con\ t\in\mathbb{R}\\z=t\end{array}\right.}$$

5.- (2 puntos) Hallar las matrices $A - B$, A y B, sabiendo que las matrices A y B, satisfacen las siguientes identidades:

$$A+B=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}, \quad A^2-AB+BA-B^2=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -2\\ -2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$A^2-AB+BA-B^2=AA-AB+BA-BB=A(A-B)+B(A-B)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A+B)(A-B)=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -2\\ -2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Comprobamos si tiene inversa A + B para seguir despejando y obtener A –B.

$$|A+B|=\begin{vmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0$$

$$(A+B)^{-1}=\frac{Adj\left(\left(A+B\right)^T\right)}{|A+B|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$(A+B)^{-1}=-\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Seguimos despejando.

$$(A+B)(A-B)=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -2\\ -2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow A-B=(A+B)^{-1}\begin{pmatrix}-2 & 0 & -2\\ -2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A-B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 0 & -2\\ -2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & -2\\ 2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} A-B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ A+B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \{\text{Sumamos las dos ecuaciones}\} \Rightarrow 2A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$2A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -3/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$\textit{Sustituyendo en } A+B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}-A$$

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 0 & -3/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Hemos obtenido:

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -3/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

6.- (2 puntos) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calcular A^{-1} y A^{20}, utilizando necesariamente la siguiente identidad $A^3=-I$, donde I es la matriz identidad.

Comprobamos si A tiene inversa y la calculamos.

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}=15+12-16-12=-1\neq 0 \text{ Existe } A^{-1}.$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 4 & -5 & 4 \end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=-\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que $A^3=-I$

$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3-4 & -12+12 & -15+16 \\ -4+5 & 3+16-15 & 4+20-20 \\ 3-4 & -3-12+12 & -4-15+16 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -3+3 & -4+4 \\ 4-4 & 3-16+12 & 4-20+16 \\ -3+3 & -3+12-9 & -4+15-12 \end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}=-I$$

Lo aplicamos al cálculo de A^{20}

$$A^{20}=A^3\cdot A^3\cdot A^3\cdot A^3\cdot A^3\cdot A^3\cdot A^2=(-I)\cdot(-I)\cdot(-I)\cdot(-I)\cdot(-I)\cdot(-I)\cdot A^2=A^2$$

Y $A^2=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ ya lo hemos calculado. $\boxed{A^{20}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}}$

7.- (2 puntos) Hallar la ecuación de la recta, tal que:
a) pasa por el punto $P(1,1,1)$,
b) es paralela al plano $\pi \equiv x+y-2z-3=0$,
c) es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x=3+\lambda, \\ y=2-\lambda, \\ z=1-2\lambda, \end{cases}$

Necesitamos un vector director de la recta. Es paralela al plano π y por tanto es perpendicular al vector normal del plano $\vec{n}=(1,1,-2)$ y también es perpendicular a la recta *r* y por tanto perpendicular a su vector director $\overrightarrow{v_r}=(1,-1,-2)$. Por lo que podemos tomar como vector director de la recta el producto vectorial de $\vec{n}=(1,1,-2)$ y $\overrightarrow{v_r}=(1,-1,-2)$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}=(1,1,-2) \\ \overrightarrow{v_r}=(1,-1,-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{u_s}=\vec{n}\times\overrightarrow{v_r}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}=(-4,0,-2)$$

La ecuación de la recta que nos piden es la ecuación de la recta *s* que pasa por el punto $P(1,1,1)$ y tiene como vector director $\overrightarrow{u_s}=(-4,0,-2)$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=(-4,0,-2) \\ P(1,1,1)\in s \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{s \equiv \begin{cases} x=1-4t \\ y=1 \qquad ,t\in\mathbb{R} \\ z=1-2t \end{cases}}$$

8.- (2 puntos) Calcular el valor del parámetro real *a* para que las rectas *r* y *s* se corten y calcular este punto.

$$r \equiv \begin{cases} 4x+z=a, \\ x+y=2, \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x+y+z=0, \\ x+2z=2a \end{cases}$$

Obtenemos las ecuaciones en paramétricas de las dos rectas.

$$r \equiv \begin{cases} 4x+z=a, \\ x+y=2, \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} z=a-4x \\ y=2-x \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\alpha \\ y=2-\alpha \\ z=a-4\alpha \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x+y+z=0, \\ x+2z=2a \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=-y-z \\ x=2a-2z \end{cases} \Rightarrow -y-z=2a-2z \Rightarrow y=-2a+z \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=2a-2z \\ y=-2a+z \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x=2a-2\beta \\ y=-2a+\beta \\ z=\beta \end{cases}$$

Igualamos las ecuaciones de las dos rectas.

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x=\alpha \\ y=2-\alpha \\ z=a-4\alpha \end{cases} \\ \\ s \equiv \begin{cases} x=2a-2\beta \\ y=-2a+\beta \\ z=\beta \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=2a-2\beta \\ 2-\alpha=-2a+\beta \\ a-4\alpha=\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=2a-2(a-4\alpha) \\ 2-\alpha=-2a+a-4\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=2a-2a+8\alpha \\ 2+3\alpha=-a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha=8\alpha \\ -2-3\alpha=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0=7\alpha \\ -2-3\alpha=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0=\alpha \\ -2-3\alpha=a \end{cases} \Rightarrow -2-0=a \Rightarrow \boxed{a=-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2-=2 \\ z=-2-0=-2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(0,2,-2)}$$

Para $a=-2$ las rectas se cortan en el punto $P(0,2,-2)$

9.- (2 puntos) El tiempo que una persona tarda en llegar a su lugar de trabajo sigue una distribución normal de media 20 minutos. Se ha comprobado que el 84,1 % de los días llega antes de 22 minutos. Si durante el año acude a su lugar de trabajo 290 días, ¿cuántos días puede estimar que tardará menos de 18 minutos en llegar?.

X = Tiempo que una persona tarda en llegar a su lugar de trabajo en minutos.

X = N(20, σ)

$$P(X<22)=0.841 \Rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{22-20}{\sigma}\right)=0.841 \Rightarrow P\left(Z<\frac{2}{\sigma}\right)=0.841$$

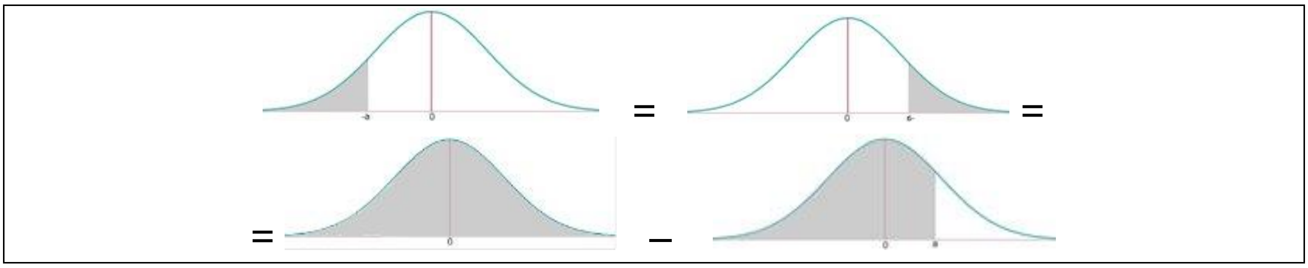
Buscamos en la tabla de la N0,1) y tenemos que:

$$\frac{2}{\sigma}=1 \Rightarrow \sigma=2$$

z	0	0,0
0	0,5000	0,50
0,1	0,5398	0,54
0,2	0,5793	0,58
0,3	0,6179	0,62
0,4	0,6554	0,65
0,5	0,6915	0,69
0,6	0,7257	0,72
0,7	0,7580	0,76
0,8	0,7881	0,79
0,9	0,8159	0,81
1	0,8413	0,84
1,1	0,8643	0,86
1,2	0,8849	0,88

Calculamos P(X<18) siendo X = N(20, 2)

$$P(X<18)=\{Tipificamos\}=P\left(Z<\frac{18-20}{2}\right)=P(Z<-1)=\ldots$$



$$\ldots=P(Z>1)=1-P(Z<1)=1-0.8413=\boxed{0.1587}$$

Por lo que en 290 días serán 290 · 0.1587 = 46.023.

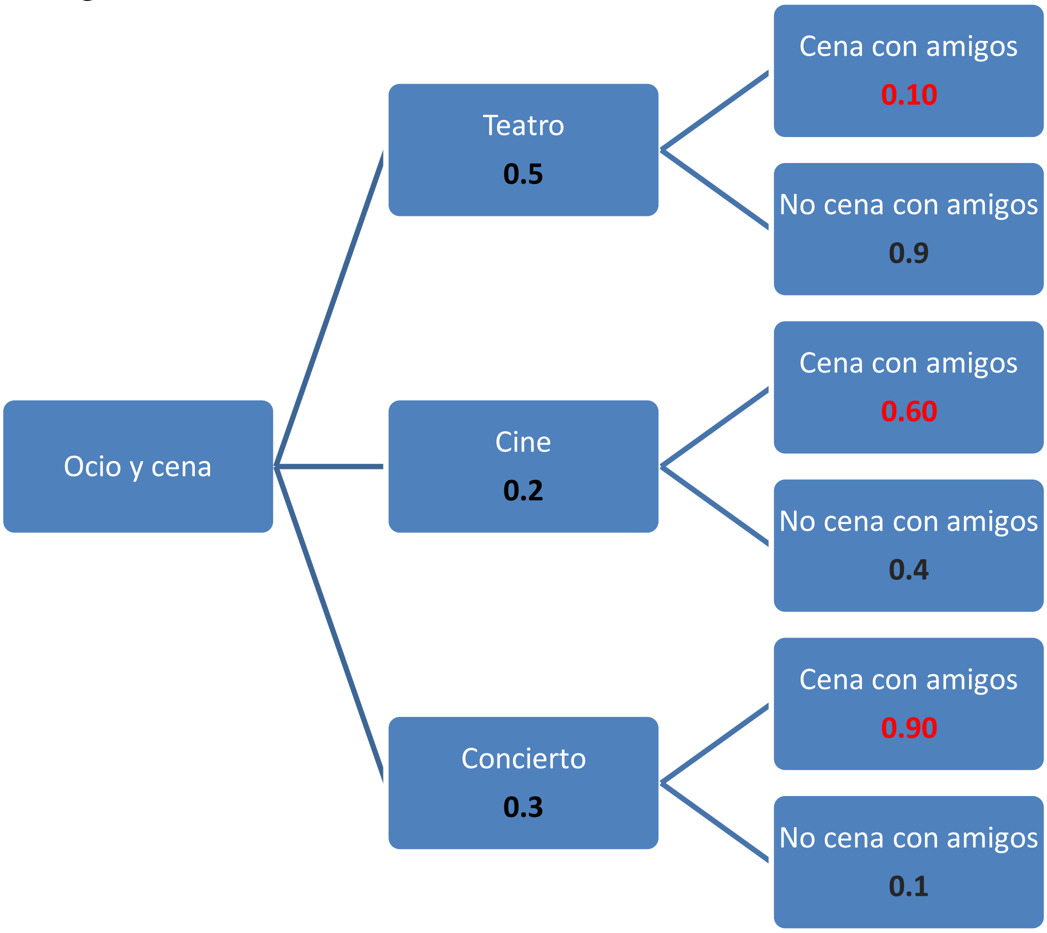
Aproximadamente 46 días de los 290 llegará antes de 18 minutos.

10.- (2 puntos) Sofía va al teatro, cine o de concierto con probabilidades 0,5, 0,2 y 0,3. El 60 % de las veces que va al cine se encuentra con amigos y se va de cena con los amigos. Lo mismo le ocurre el 10 % de las veces que va al teatro y el 90 % de las que va de concierto.

a) ¿Qué probabilidad hay de que se vaya de cena con los amigos?.

b) Si vuelve a casa después del espectáculo, ¿qué probabilidad hay de que haya ido al cine?.

Hacemos un diagrama de árbol.



Llamamos T = Ir al teatro, Ci = Ir al cine, Co = Ir al concierto.
Llamamos A = Cenar con amigos. $\overline{A}$ = Volver a casa sin cenar con los amigos.
Tenemos que P(T) = 0.5, P(Ci) = 0.2, P(Co) = 0.3. P(A/T) = 0.1, P(A/Ci) = 0.6, P(A/Co) = 0.9

a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(A)=P(T)P(A/T)+P(Ci)P(A/Ci)+P(Co)P(A/Co)=$$

$$=0.5\cdot 0.1+0.2\cdot 0.6+0.3\cdot 0.9=\boxed{0.44}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(Ci/\overline{A}\right)=\frac{P\left(Ci\cap\overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)}=\frac{P(Ci)P\left(\overline{A}/Ci\right)}{1-P(A)}=\frac{0.2\cdot 0.4}{1-0.44}=\boxed{\frac{1}{7}\simeq 0.143}$$