UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

206-MATEMÁTICAS II.

EBAU2021 - **JULIO**

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las 4 primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro ***a***:

$$\begin{cases} x + ay - z = 0 \\ 2x + y + az = 0 \\ x + 5y - az = a + 1 \end{cases}$$

a) **[0,75 p.]** Determine para qué valores de ***a*** el sistema tiene solución única.

b) **[1 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) **[0,75 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema no tiene solución.

2: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) **[1 p.]** Si se denota por tr(A) la traza de la matriz A (es decir, la suma de los elementos de su diagonal principal) y por |A| el determinante de A, compruebe que, para cualquier valor de *a*, se cumple la ecuación $A^2 = tr(A)A - |A|I$, donde I denota la matriz identidad de orden 2.

b) **[0.5 p.]** Determine para qué valores de *a* la matriz A es regular (o inversible).

c) **[1 p.]** Para $a = -3$, resuelva la ecuación matricial $AX - A^t = A$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

3: Dada la función $f(x) = x^2 e^{-x}$ definida para todo valor de $x \in \mathbb{R}$, se pide:

a) **[1,5 p.]** Calcule sus extremos relativos (máximos y mínimos) y determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) **[1 p.]** Calcule $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

4:

a) **[1,5 p.]** Calcule la integral indefinida $\int x sen(x^2)\, dx$ utilizando el método de cambio de variable (o método de sustitución).

b) **[1 p.]** Determine el menor valor de a > 0 para el cual se cumple $\int_0^a x sen(x^2)\, dx = 1$

5: Considere las rectas de ecuaciones

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} x-2y=-1 \\ y+z=1 \end{cases}.$$

a) **[0,75 p.]** Compruebe que las rectas se cortan en un punto y calcule su punto de corte.

b) **[1 p.]** Determine el ángulo que forman las dos rectas.

c) **[0,75 p.]** Calcule la ecuación del plano que contiene a las dos rectas.

6: Los puntos $A=(2,0,0)$ y $B=(-1,12,4)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice C se encuentra en la recta *r* dada por

$$r: \begin{cases} 4x+3z=33 \\ y=0 \end{cases}$$

a) **[1,5 p.]** Calcule las coordenadas del tercer vértice C sabiendo que la recta *r* es perpendicular a la recta que pasa por A y C.

b) **[1 p.]** Determine si el triángulo ABC tiene un ángulo recto en A y calcule su área.

7: Una urna contiene cinco bolas negras, numeradas del 1 al 5, y siete bolas blancas, numeradas del 1 al 7. Se saca de la urna una bola al azar. Calcule:

a) **[0,5 p.]** La probabilidad de que la bola sea blanca.

b) **[0,5 p.]** La probabilidad de que bola esté numerada con un número par.

c) **[0,5 p.]** La probabilidad de que bola esté numerada con un número par, sabiendo que es una bola blanca.

d) **[0,5 p.]** La probabilidad de que bola sea blanca y esté numerada con un número par.

e) **[0,5 p.]** La probabilidad de que bola sea blanca, sabiendo que está numerada con un número par

8: Juan es un estudiante bastante despistado y su tutora está cansada de que llegue tarde a clase. Él se defiende diciendo que no es para tanto y que la tutora le tiene manía. Ella le propone el siguiente trato: si en los próximo 9 días Juan llega tarde como mucho 2 días, la tutora le sube 1 punto en la nota final de la evaluación. Sabiendo que la probabilidad de que Juan llegue tarde a clase cada día es 0,45, determine:

a) **[1 p.]** El tipo de distribución que sigue la variable aleatoria que cuenta el número de días que Juan llega tarde a clase en los próximos 9 días. ¿Cuáles son sus parámetros?

b) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la media y la desviación típica de esta distribución?

c) **[1 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que Juan consiga la ansiada subida de 1 punto en la nota final?

SOLUCIONES

1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro ***a***:

$$\begin{cases} x + ay - z = 0 \\ 2x + y + az = 0 \\ x + 5y - az = a + 1 \end{cases}$$

a) **[0,75 p.]** Determine para qué valores de ***a*** el sistema tiene solución única.

b) **[1 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema tiene infinitas soluciones y resuélvalo en ese caso.

c) **[0,75 p.]** Determine para qué valor de ***a*** el sistema no tiene solución.

Realizamos el estudio completo y luego respondemos a las preguntas planteadas en cada apartado.

Consideramos la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & 5 & -a \end{pmatrix}$

y la matriz ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 0 \\ 2 & 1 & a & 0 \\ 1 & 5 & -a & a+1 \end{pmatrix}$.

Averiguamos donde se anula el determinante de la matriz de coeficientes *A*.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & 5 & -a \end{vmatrix} = -a + a^2 - 10 + 1 + 2a^2 - 5a = 3a^2 - 6a - 9$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 3a^2 - 6a - 9 = 0 \Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$a = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \dfrac{2+4}{2} = 3 \\ \dfrac{2-4}{2} = -1 \end{cases}$$

Analizamos tres casos por separado.

CASO 1. $a \neq -1 \quad y \quad a \neq 3$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. El rango de la ampliada A/B también es 3, así como el número de incógnitas.
El sistema es compatible determinado (**solución única)**.

CASO 2. $a = -1$

Las matrices quedan $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ y $A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Como la matriz ampliada solo tiene añadida una cuarta columna con todo ceros el rango de A y de A/B van a ser el mismo, por lo que el sistema es compatible. Como el rango de A no es 3 pues el determinante es nulo, el rango de A = Rango de A/B pero menor que el número de incógnitas (3).

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 3. $a=3$

Las matrices quedan $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 5 & -3\end{pmatrix}$ y $A/B=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 3 & 0\\ 1 & 5 & -3 & 4\end{pmatrix}$.

Transformamos la matriz A/B en otra matriz triangular equivalente con el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 3 & 0\\ 1 & 5 & -3 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc}\multicolumn{4}{c}{\text{Fila } 2^{a} - 2\cdot\text{Fila } 1^{a}}\\ 2 & 1 & 3 & 0\\ -2 & -6 & 2 & 0\\ \hline 0 & -5 & 5 & 0\\ \multicolumn{4}{c}{\text{Nueva Fila } 2^{a}}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{cccc}\multicolumn{4}{c}{\text{Fila } 3^{a} - \text{Fila } 1^{a}}\\ 1 & 5 & -3 & 4\\ -1 & -3 & 1 & 0\\ \hline 0 & 2 & -2 & 4\\ \multicolumn{4}{c}{\text{Nueva Fila } 3^{a}}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 0\\ 0 & -5 & 5 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{5}\cdot\text{Fila } 2^{a}\to\text{Nueva Fila } 2^{a}\\ \frac{1}{2}\cdot\text{Fila } 3^{a}\to\text{Nueva Fila } 3^{a}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc}\multicolumn{4}{c}{\text{Fila } 3^{a} + \text{Fila } 2^{a}}\\ 0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 2\\ \multicolumn{4}{c}{\text{Nueva Fila } 3^{a}}\end{array}\right\}\Rightarrow(A/B)'=\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Obervando la matriz triangular obtenida vemos que al quitar la 4ª columna nos queda una matriz triangular con 2 filas no nulas, el rango de A es 2, pero si la miramos al completo observamos que hay 3 filas no nulas, el rango de A/B es 3. Los rangos de A y de A/B son distintos.
Por lo que el sistema es incompatible (no tiene solución).

a) El sistema tiene solución única para $a\neq -1 \quad y \quad a\neq 3$

b) El sistema tiene infinitas soluciones para $a=-1$.

$$\left\{\begin{array}{r}x-y-z=0\\ 2x+y-z=0\\ x+5y+z=0\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc}\multicolumn{4}{c}{\text{Ecuación } 2^{a} - 2\cdot\text{Ecuación } 1^{a}}\\ 2x & +y & -z & =0\\ -2x & +2y & +2z & =0\\ \hline 0 & 3y & +z & =0\\ \multicolumn{4}{c}{\text{Nueva ecuación } 2^{a}}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{cccc}\multicolumn{4}{c}{\text{Ecuación } 3^{a} - \text{Ecuación } 1^{a}}\\ x & +5y & +z & =0\\ -x & +y & +z & =0\\ \hline 0 & 6y & +2z & =0\\ \multicolumn{4}{c}{\text{Nueva ecuación } 3^{a}}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-y-\ z=0 \\ 3y+z=0 \\ 6y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Ecuación 3ª} - 2 \cdot \text{Ecuación 2ª} \\ \begin{array}{cccc} 6y & +2z & = & 0 \\ -6y & -2z & = & 0 \\ \hline 0 & 0 & = & 0 \end{array} \\ \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x-y-\ z=0 \\ 3y+z=0 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-y-\ z=0 \\ 3y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y-\ z=0 \\ \boxed{z=-3y} \end{cases} \Rightarrow x-y+3y=0 \Rightarrow x+2y=0 \Rightarrow \boxed{x=-2y}$$

Las soluciones del sistema son $x = -2t;\ y = t,\ z = -3t$.

c) Para $a=3$ el sistema no tiene solución.

2: Considere la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ **.**

a) **[1 p.]** Si se denota por tr(A) la traza de la matriz A (es decir, la suma de los elementos de su diagonal principal) y por |A| el determinante de A, compruebe que, para cualquier valor de *a*, se cumple la ecuación $A^2=tr(A)A-|A|I$, donde I denota la matriz identidad de orden 2.

b) **[0.5 p.]** Determine para qué valores de *a* la matriz A es regular (o inversible).

c) **[1 p.]** Para *a* = –3, resuelva la ecuación matricial $AX-A^t=A$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

a) Calculamos la expresión de ambos miembros de la igualdad $A^2=tr(A)A-|A|I$

Primer miembro → $A^2=\begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4-a & 2a+2a \\ -2-2 & -a+4 \end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix} 4-a & 4a \\ -4 & 4-a \end{pmatrix}}$

Segundo miembro → $tr(A)A-|A|I=(2+2)\begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{vmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=$

$$=4\begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{pmatrix}-(4+a)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 4a \\ -4 & 8 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4+a & 0 \\ 0 & 4+a \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 8-4-a & 4a-0 \\ -4-0 & 8-4-a \end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix} 4-a & 4a \\ -4 & 4-a \end{pmatrix}}$$

Como se comprueba se obtiene lo mismo.

b) Vemos cuando el determinante de A es no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & a \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=4+a$$

$$|A|=0\Rightarrow 4+a=0\Rightarrow a=-4$$

La matriz A es regular para cualquier valor de *a* distinto de –4.

c) Para *a* = –3 la matriz es invertible.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow |A|=1\neq 0$$

Calculamos su inversa.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Despejamos en la ecuación la matriz X.

$$AX-A^t=A\Rightarrow AX=A+A^t\Rightarrow X=A^{-1}\left(A+A^t\right)$$

Sustituimos y obtenemos el valor de la matriz X.

$$X = A^{-1}\left(A + A^t\right)$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-12 & -8+12 \\ 4-8 & -4+8 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}}$$

3: Dada la función $f(x)=x^2e^{-x}$ definida para todo valor de $x\in\mathbb{R}$, se pide:

a) **[1,5 p.]** Calcule sus extremos relativos (máximos y mínimos) y determine sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) **[1 p.]** Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

a) Derivamos e igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x)=x^2e^{-x} \Rightarrow f\,'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=(2-x)xe^{-x}$$

$$f\,'(x)=0 \Rightarrow (2-x)xe^{-x}=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

Tenemos dos puntos críticos, comprobamos el comportamiento de la función antes, entre y después de estos valores.

- En $(-\infty,0)$ tomo $x = -1$ y la derivada vale $f\,'(-1)=(2-(-1))(-1)e^{-(-1)}=-3e<0$. La función decrece en $(-\infty,0)$.
- En $(0,2)$ tomo $x = 1$ y la derivada vale $f\,'(1)=(2-1)(1)e^{-1}=\dfrac{3}{e}>0$. La función crece en $(0,2)$.
- En $(2,+\infty)$ tomo $x = 3$ y la derivada vale $f\,'(3)=(2-3)(3)e^{-3}=-\dfrac{3}{e^3}<0$. La función decrece en $(2,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:

La función crece en $(0,2)$ y decrece en $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$.

La función presenta un mínimo relativo en $x = 0$.

Como $f(0)=0^2e^{-0}=0$ las coordenadas del mínimo relativo son P(0, 0).

La función presenta un máximo relativo en $x = 2$.

Como $f(2)=2^2e^{-2}=\dfrac{4}{e^2}$ las coordenadas del máximo relativo son $Q\left(2,\dfrac{4}{e^2}\right)$

b)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\frac{+\infty}{e^{+\infty}}=\frac{\infty}{\infty}=Indeterminación(L´Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}=Indeterminación(L´Hôpital)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=\frac{2}{\infty}=\boxed{0}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x}=(-\infty)^2e^{+\infty}=(+\infty)(+\infty)=+\infty$$

4:
a) **[1,5 p.]** Calcule la integral indefinida $\int xsen\left(x^2\right)dx$ utilizando el método de cambio de variable (o método de sustitución).

b) **[1 p.]** Determine el menor valor de a > 0 para el cual se cumple $\int_0^a xsen\left(x^2\right)dx = 1$

a)

$$\int xsen\left(x^2\right)dx = \left\{\begin{array}{l} x^2 = t \\ 2xdx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{2x} \end{array}\right\} = \int \cancel{x} sen(t)\frac{dt}{2\cancel{x}} = \frac{1}{2}\int sentdt = -\frac{1}{2}\cos t =$$

$$= \left\{\begin{array}{c} \text{Deshacemos el cambio de variable} \\ x^2 = t \end{array}\right\} = \boxed{-\frac{1}{2}\cos\left(x^2\right) + K}$$

b)

$$\int_0^a xsen\left(x^2\right)dx = 1 \Rightarrow \left[-\frac{1}{2}\cos\left(x^2\right)\right]_0^a = 1 \Rightarrow \left[-\frac{1}{2}\cos\left(a^2\right)\right] - \left[-\frac{1}{2}\cos\left(0^2\right)\right] = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\cos\left(a^2\right) + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow -\cos\left(a^2\right) + 1 = 2 \Rightarrow \cos\left(a^2\right) = -1 \Rightarrow a^2 = \arccos(-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = \pi + 2\pi k,\ siendo\ k = 0,1,2,3,4,\ldots$$

Como nos piden el valor de *a* positivo más pequeño.

$$a^2 = \pi \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{\pi}}$$

5: Considere las rectas de ecuaciones

$$r:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1} \quad \text{y} \quad s:\begin{cases} x-2y=-1 \\ y+z=1 \end{cases}.$$

a) **[0,75 p.]** Compruebe que las rectas se cortan en un punto y calcule su punto de corte.

b) **[1 p.]** Determine el ángulo que forman las dos rectas.

c) **[0,75 p.]** Calcule la ecuación del plano que contiene a las dos rectas.

a)

$$r:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(1,1,-1) \\ P_r=(1,0,1) \end{cases}$$

$$s:\begin{cases} x-2y=-1 \\ y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1+2y \\ z=1-y \end{cases} \Rightarrow s:\begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=1-\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_s}=(2,1,-1) \\ Q_s=(-1,0,1) \end{cases}$$

Comprobamos si sus vectores directores tienen coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,1,-1) \\ \overrightarrow{v_s}=(2,1,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}\neq\frac{1}{1}=\frac{-1}{-1}$$

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales y por tanto las rectas no son ni paralelas ni coincidentes.

Consideramos los vectores $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{v_s}$ y $\overrightarrow{P_rQ_s}$ y vemos si su producto mixto es nulo o no.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{P_rQ_s}=(-1,0,1)-(1,0,1)=(-2,0,0) \\ \overrightarrow{u_r}=(1,1,-1) \\ \overrightarrow{v_s}=(2,1,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{P_rQ_s}\right]=\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=2-2=0$$

El producto mixto es nulo y las rectas son coplanarias con distinta dirección y por lo tanto se cortan en un punto.
Averiguamos el punto de corte resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} r:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1} \Rightarrow r:\begin{cases} x=1+\alpha \\ y=\alpha \\ z=1-\alpha \end{cases} \\ s:\begin{cases} x-2y=-1 \\ y+z=1 \end{cases} \Rightarrow s:\begin{cases} x=-1+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=1-\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 1+\alpha=-1+2\lambda \\ \alpha=\lambda \\ 1-\alpha=1-\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=-2+2\lambda \\ \alpha=\lambda \\ \alpha=\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda=-2+2\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2=\lambda \Rightarrow \begin{cases} x=-1+4=3 \\ y=2 \\ z=1-2=-1 \end{cases} \Rightarrow C(3,2,-1)$$

El punto de corte de las rectas es $C(3,2,-1)$

b) Vemos el ángulo que forman sus vectores directores.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,1,-1)\\ \overrightarrow{v_s}=(2,1,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{v_s}\right)=\frac{\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{v_s}}{\left|\overrightarrow{u_r}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v_s}\right|}=\frac{(1,1,-1)(2,1,-1)}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{2+1+1}{\sqrt{3}\sqrt{6}}=\frac{4}{\sqrt{18}}$$

$$(r,s)=\left(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{v_s}\right)=\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{18}}\right)\simeq 19,47^{\circ}$$

Las rectas forman un ángulo de 19º.

c) El plano que contiene las dos rectas tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas y el punto $C(3,2,-1)$ pertenece al plano.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{u_r}=(1,1,-1)\\ \vec{v}=\overrightarrow{v_s}=(2,1,-1)\\ C(3,2,-1)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix}x-3 & y-2 & z+1\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{-x}\cancel{+3}-2y+4+z+1-2z-2+y-2\cancel{+x}\cancel{-3}=0\Rightarrow -y-z+1=0\Rightarrow \boxed{\pi\equiv y+z-1=0}$$

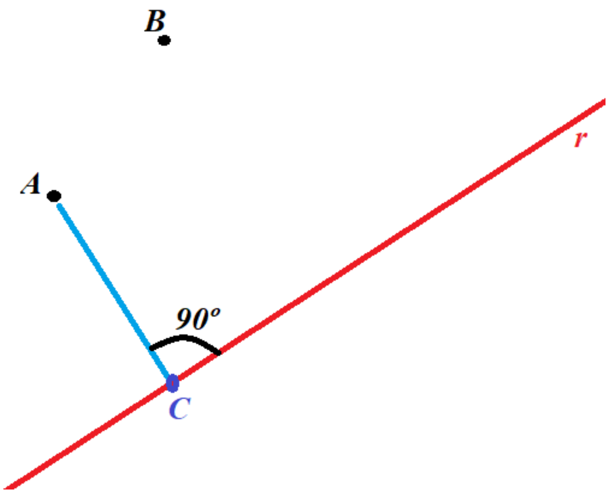
6: Los puntos $A=(2,0,0)$ y $B=(-1,12,4)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice C se encuentra en la recta *r* dada por

$$r:\begin{cases}4x+3z=33\\ y=0\end{cases}$$

a) **[1,5 p.]** Calcule las coordenadas del tercer vértice C sabiendo que la recta *r* es perpendicular a la recta que pasa por A y C.

b) **[1 p.]** Determine si el triángulo ABC tiene un ángulo recto en A y calcule su área.

a) La situación planteada es la del dibujo siguiente.



Sabemos que el punto C pertenece a la recta *r*, por lo que cumple sus ecuaciones.

$$r:\begin{cases}4x+3z=33\\ y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P(0,0,11)\in r\\ Q(3,0,7)\in r\end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases}P(0,0,11)\in r\\ \overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{QP}=(0,0,11)-(3,0,7)=(-3,0,4)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow r:\begin{cases}x=-3\alpha\\ y=0\\ z=11+4\alpha\end{cases}$$

El punto C tiene coordenadas $C(-3a,0,11+4a)$.

Como el vector $\overrightarrow{AC}$ es perpendicular a la recta *r*, el producto escalar de $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{v_r}$ debe ser cero.

$$\overrightarrow{AC}=(-3a,0,11+4a)-(2,0,0)=(-3a-2,0,11+4a)$$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{v_r}=0\Rightarrow(-3a-2,0,11+4a)(-3,0,4)=0\Rightarrow 9a+6+0+44+16a=0\Rightarrow$$

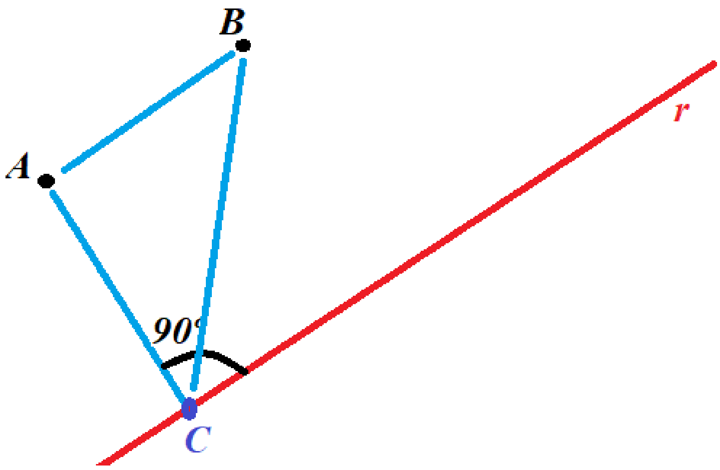
$$\Rightarrow 25a=-50\Rightarrow a=-2\Rightarrow\left.\begin{matrix}C(-3a,0,11+4a)\\ a=-2\end{matrix}\right\}\Rightarrow C(6,0,3)$$

El punto C tiene coordenadas $C(6,0,3)$

b) Para que tenga ángulo recto en A el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB}$ debe ser nulo.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AC}=(6,0,3)-(2,0,0)=(4,0,3)\\ \overrightarrow{AB}=(-1,12,4)-(2,0,0)=(-3,12,4)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=(4,0,3)(-3,12,4)=-12+12=0$$

El ángulo en el vértice A es de 90º.



Por ser un triángulo rectángulo el área del triángulo es la mitad del producto de la base (módulo del vector $\overrightarrow{AC}$) por la altura (módulo del vector $\overrightarrow{AB}$).

$$\left.\begin{array}{l}\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{4^2+0^2+3^2}=5\\ \left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-3)^2+12^2+4^2}=13\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{Área=\frac{\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|}{2}=\frac{5\cdot 13}{2}=32.5\,u^2}$$

7: Una urna contiene cinco bolas negras, numeradas del 1 al 5, y siete bolas blancas, numeradas del 1 al 7. Se saca de la urna una bola al azar. Calcule:

a) **[0,5 p.]** La probabilidad de que la bola sea blanca.

b) **[0,5 p.]** La probabilidad de que bola esté numerada con un número par.

c) **[0,5 p.]** La probabilidad de que bola esté numerada con un número par, sabiendo que es una bola blanca.

d) **[0,5 p.]** La probabilidad de que bola sea blanca y esté numerada con un número par.

e) **[0,5 p.]** La probabilidad de que bola sea blanca, sabiendo que está numerada con un número par

Nombramos y describimos los sucesos necesarios para calcular las probabilidades pedidas.

B = Sacar bola blanca = {1 blanco, 2 blanco, 3 blanco, 4 blanco, 5 blanco}

$\overline{B}$ = Sacar bola negra.

A = Sacar número par = {2 negro, 4 negro, 2 blanco, 4 blanco, 6 blanco}.

$\overline{A}$ = Sacar impar = {1 negro, 3 negro, 5 negro, 1 blanco, 3 blanco, 5 blanco, 7 blanco}.

a) Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(B) = \frac{7\ bolas\ blancas}{12\ bolas} = \boxed{\frac{7}{12} \simeq 0.583}$$

b) Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(A) = \frac{5\ bolas\ con\ número\ par}{12\ bolas} = \boxed{\frac{5}{12} \simeq 0.417}$$

c) Hemos reducido los casos posibles a sólo 7 bolas blancas numeradas del 1 al 7.

Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(A/B) = \frac{\text{Nº de bolas blancas numeradas con un par}}{\text{Nº bolas blancas}} = \boxed{\frac{3}{7} \simeq 0.429}$$

d) Sólo hay 3 bolas blancas numeradas con un número par.
Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(B \cap A) = \boxed{\frac{3}{12} = 0.25}$$

e) A = Sacar número par = {2 negro, 4 negro, 2 blanco, 4 blanco, 6 blanco}
Si sabemos que es par, los casos posibles son solamente 5. De ellos favorables al suceso hay 3.

$$P(B/A) = \boxed{\frac{3}{5} = 0.6}$$

8: Juan es un estudiante bastante despistado y su tutora está cansada de que llegue tarde a clase. Él se defiende diciendo que no es para tanto y que la tutora le tiene manía. Ella le propone el siguiente trato: si en los próximo 9 días Juan llega tarde como mucho 2 días, la tutora le sube 1 punto en la nota final de la evaluación. Sabiendo que la probabilidad de que Juan llegue tarde a clase cada día es 0,45, determine:

a) **[1 p.]** El tipo de distribución que sigue la variable aleatoria que cuenta el número de días que Juan llega tarde a clase en los próximos 9 días. ¿Cuáles son sus parámetros?

b) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la media y la desviación típica de esta distribución?

c) **[1 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que Juan consiga la ansiada subida de 1 punto en la nota final?

a) X = número de días que Juan llega tarde a clase en los próximos 9 días.
X es una variable aleatoria binomial, pues la probabilidad de llegar tarde a clase es 0,45, independientemente del día y solo puede ocurrir dos cosas: que llegue tarde o no.
Los parámetros son n = 9 que es el número de repeticiones y p = probabilidad de llegar tarde un día a clase = 0.45.

X = B(9, 0.45)

b) La media es n · p = 9 · 0.45 = 4.05 veces.
La desviación típica es $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{9 \cdot 0.45 \cdot 0.55} = 1.49$

c) Para conseguir la subida de 1 punto debe llegar tarde a clase ninguno, uno o dos días.

$$P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \{\text{Mirando en la tabla de la binomial}\} =$$

$$= 0.0046 + 0.0339 + 0.1110 = \boxed{0.1495}$$

		p											
n	x	0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0
2	0	0,9801	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4444	0,4225	0,3600	[illegible]	0,
	1	0,0198	0,0950	0,1800	0,2550	0,3200	0,3750	0,4200	0,4444	0,4550	0,4800	[illegible]	0,
	2	0,0001	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1111	0,1225	0,1600	[illegible]	0,
3	0	0,9703	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2963	0,2746	0,2160	[illegible]	0,
	1	0,0294	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840	0,4219	0,4410	0,4444	0,4436	0,4320	[illegible]	0,
	2	0,0003	0,0071	0,0270	0,0574	0,0960	0,1406	0,1890	0,2222	0,2389	0,2880	[illegible]	0,
	3	0,0000	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0270	0,0370	0,0429	0,0640	[illegible]	0,
4	0	0,9606	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1975	0,1785	0,1296	[illegible]	0,
	1	0,0388	0,1715	0,2916	0,3685	0,4096	0,4219	0,4116	0,3951	0,3845	0,3456	[illegible]	0,
	2	0,0006	0,0135	0,0486	0,0975	0,1536	0,2109	0,2646	0,2963	0,3105	0,3456	[illegible]	0,
	3	0,0000	0,0005	0,0036	0,0115	0,0256	0,0469	0,0756	0,0988	0,1115	0,1536	[illegible]	0,
	4	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0039	0,0081	0,0123	0,0150	0,0256	[illegible]	0,
5	0	0,9510	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1317	0,1160	0,0778	[illegible]	0,
	1	0,0480	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3292	0,3124	0,2592	[illegible]	0,
	2	0,0010	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3292	0,3364	0,3456	[illegible]	0,
	3	0,0000	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1646	0,1811	0,2304	[illegible]	0,
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0412	0,0488	0,0768	[illegible]	0,
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0041	0,0053	0,0102	[illegible]	0,
6	0	0,9415	0,7351	0,5314	0,3771	0,2621	0,1780	0,1176	0,0878	0,0754	0,0467	[illegible]	0,
	1	0,0571	0,2321	0,3543	0,3993	0,3932	0,3560	0,3025	0,2634	0,2437	0,1866	[illegible]	0,
	2	0,0014	0,0305	0,0984	0,1762	0,2458	0,2966	0,3241	0,3292	0,3280	0,3110	[illegible]	0,
	3	0,0000	0,0021	0,0146	0,0415	0,0819	0,1318	0,1852	0,2195	0,2355	0,2765	[illegible]	0,
	4	0,0000	0,0001	0,0012	0,0055	0,0154	0,0330	0,0595	0,0823	0,0951	0,1382	[illegible]	0,
	5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0044	0,0102	0,0165	0,0205	0,0369	[illegible]	0,
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0014	0,0018	0,0041	[illegible]	0,
7	0	0,9321	0,6983	0,4783	0,3206	0,2097	0,1335	0,0824	0,0585	0,0490	0,0280	[illegible]	0,
	1	0,0659	0,2573	0,3720	0,3960	0,3670	0,3115	0,2471	0,2048	0,1848	0,1306	[illegible]	0,
	2	0,0020	0,0406	0,1240	0,2097	0,2753	0,3115	0,3177	0,3073	0,2985	0,2613	[illegible]	0,
	3	0,0000	0,0036	0,0230	0,0617	0,1147	0,1730	0,2269	0,2561	0,2679	0,2903	[illegible]	0,
	4	0,0000	0,0002	0,0026	0,0109	0,0287	0,0577	0,0972	0,1280	0,1442	0,1935	[illegible]	0,
	5	0,0000	0,0000	0,0002	0,0012	0,0043	0,0115	0,0250	0,0384	0,0466	0,0774	[illegible]	0,
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0013	0,0036	0,0064	0,0084	0,0172	[illegible]	0,
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0005	0,0006	0,0016	[illegible]	0,
8	0	0,9227	0,6634	0,4305	0,2725	0,1678	0,1001	0,0576	0,0390	0,0319	0,0168	[illegible]	0,
	1	0,0746	0,2793	0,3826	0,3847	0,3355	0,2670	0,1977	0,1561	0,1373	0,0896	[illegible]	0,
	2	0,0026	0,0515	0,1488	0,2376	0,2936	0,3115	0,2965	0,2731	0,2587	0,2090	[illegible]	0,
	3	0,0001	0,0054	0,0331	0,0839	0,1468	0,2076	0,2541	0,2731	0,2786	0,2787	[illegible]	0,
	4	0,0000	0,0004	0,0046	0,0185	0,0459	0,0865	0,1361	0,1707	0,1875	0,2322	[illegible]	0,
	5	0,0000	0,0000	0,0004	0,0026	0,0092	0,0231	0,0467	0,0683	0,0808	0,1239	[illegible]	0,
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011	0,0038	0,0100	0,0171	0,0217	0,0413	[illegible]	0,
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0012	0,0024	0,0033	0,0079	[illegible]	0,
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0002	[illegible]	[illegible]	0,
9	0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0046	0,
	1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,0339	0,
	2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,1110	0,
	3	0,0001	0,0077	0,0446	0,1069	0,1762	0,2336	0,2668	0,2731	0,2716	[illegible]	0,2119	0,