GENERALITAT VALENCIANA
Conselleria d'Educació, Investigació, Cultura i Esport

COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ
SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JULIOL 2021	CONVOCATORIA: JULIO 2021
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II

BAREMO DEL EXAMEN:
El alumno contestará solo TRES problemas entre los seis propuestos.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

<u>En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.</u>

Problema 1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x-y+z=m \\ x+y+3z=0 \\ 5x-4y+mz=m \end{cases}$, donde m es un parámetro real. Se pide:

a) La discusión del sistema de ecuaciones en función del parámetro m. (4 puntos)
b) La solución del sistema cuando $m = 1$. (3 puntos)
c) Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado. (3 puntos)

Problema 2. Se dan las rectas $r:\begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x-z-1=0 \end{cases}$, $s:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{2}$ y el plano $\pi: x+my+z=2$ y $\pi_3: x+ay+z=1$ que depende del parámetro real m. Obtened:

a) La posición relativa de las rectas r y s. (4 puntos)
b) El valor del parámetro m para que la recta r esté contenida en el plano π. (3 puntos)
c) Los puntos A, B, C intersección del plano π con los ejes de coordenadas cuando $m = 2$, así como el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y $P(2,2,2)$. (3 puntos)

Problema 3. Dada la función $f(x)=xe^{1-x^2}$,

a) El dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos. (4 puntos)
b) Las asíntotas y la gráfica de f. (3 puntos)
c) La integral $\int f(x)dx$. (3 puntos)

Problema 4. Sean las matrices $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & a^2-2 & 3 \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Obtened

a) El rango de la matriz A según los valores del parámetro a. (3 puntos)
b) Una matriz C tal que $AC=16I$, siendo I la matriz identidad, cuando $a = 0$. (4 puntos)
c) El rango de la matriz B y la discusión de si el sistema $B\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ tiene solución. (3 puntos)

Problema 5. Dados los puntos $P(1,1,0)$, $Q(2,-1,1)$ y $R(\alpha,3,-1)$ se pide:

a) La ecuación del plano que contiene a P, Q y R cuando $\alpha = 1$ y la distancia de dicho plano al origen de coordenadas. (3 puntos)

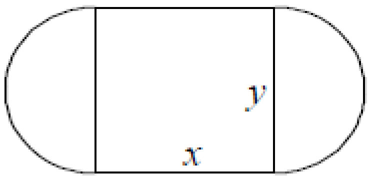
b) La ecuación de la recta r que pasa por R cuando $\alpha = 1$ y es paralela a la recta s que pasa por P y Q. Calculad la distancia entre las rectas r y s. (4 puntos)

c) Los valores de α para los cuales P, Q y R están alineados y la ecuación de la recta que los contiene. (3 puntos)

Problema 6. Queremos diseñar un campo de juego de modo que la parte central sea rectangular, y las partes laterales sean semicircunferencias hacia fuera. La superficie del campo mide $(4+\pi)$ metros cuadrados. Se quieren pintar todas las rayas de dicho campo tal y como se observa en la figura. Se pide:

a) Escribid la longitud total de las rayas del campo en función de la altura y del rectángulo. (5 puntos)

b) Calculad las dimensiones del campo para que la pintura usada sea mínima. (5 puntos)



Soluciones

Problema 1. Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x-y+z=m \\ x+y+3z=0 \\ 5x-4y+mz=m \end{cases}$, donde m es un parámetro real. Se pide:

a) La discusión del sistema de ecuaciones en función del parámetro m. (4 puntos)
b) La solución del sistema cuando $m = 1$. (3 puntos)
c) Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado. (3 puntos)

a) La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & m \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & m \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & m & m \end{pmatrix}$

Igualamos a cero el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & m \end{vmatrix}=2m-15-4-5+m+24=3m$$

$$|A|=0 \Rightarrow 3m=0 \Rightarrow m=0$$

Analizamos dos casos por separado.

CASO 1. $m \neq 0$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3. El rango de A/B también es 3, al igual que el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $m=0$

En este caso el determinante de A es cero y su rango no es 3. Transformamos la matriz ampliada en una matriz triangular equivalente y establecemos el rango de A y de A/B a partir de esta.

$$A/B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{\text{Fila } 2^{\text{a}} \leftrightarrow \text{ Fila } 1^{\text{a}}\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\text{Fila } 2^{\text{a}} - 2 \cdot \text{Fila } 1^{\text{a}}} \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -6 & 0 \\ \hline 0 & -3 & -5 & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\text{Nueva Fila } 2^{\text{a}}} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\text{Fila } 3^{\text{a}} - 5 \cdot \text{Fila } 1^{\text{a}}} \\ 5 & -4 & 0 & 0 \\ -5 & -5 & -15 & 0 \\ \hline 0 & -9 & -15 & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\text{Nueva Fila } 3^{\text{a}}} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & -9 & -15 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Fila } 3^{a} - 3 \cdot \text{Fila } 2^{a} \\ \begin{array}{cccc} 0 & -9 & -15 & 0 \\ 0 & 9 & 15 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \\ \text{Nueva Fila } 3^{a} \end{array} \right\} \Rightarrow (A/B)' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 0 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{A} & & & 0 \end{array} \right)$$

Observando la matriz (A/B)´ tenemos que el rango de A es 2, al igual que el rango de A/B y menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Para $m = 1$ el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos por Cramer.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1-3-1+12}{3} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{15+1-1-6}{3} = 3$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2-4-5+1}{3} = -2$$

La solución es $x = y = 3$, $z = -2$.

c) Para $m = 0$ es compatible indeterminado. Lo resolvemos.

El sistema queda $\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x+y+3z=0 \\ 5x-4y=0 \end{cases}$ que es equivalente al obtenido en la transformación realizada en el apartado a) y a partir del cual resolvemos el sistema.

$$(A/B)' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A} \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right. \right) \Rightarrow \left. \begin{matrix} x+y+3z=0 \\ -3y-5z=0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} x+y+3z=0 \\ -3y=5z \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} x+y+3z=0 \\ \boxed{y=-\frac{5}{3}z} \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-\frac{5}{3}z+3z=0 \Rightarrow 3x-5z+9z=0 \Rightarrow 3x+4z=0 \Rightarrow 3x=-4z \Rightarrow \boxed{x=-\frac{4}{3}z}$$

La solución es $x=-\frac{4}{3}t; \quad y=-\frac{5}{3}t; \quad z=t, \quad siendo\ t \in \mathbb{R}$

Problema 2. Se dan las rectas $r:\begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x-z-1=0 \end{cases}$, $s:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{2}$ y el plano $\pi: x+my+z=2$ y $\pi_3: x+ay+z=1$ que depende del parámetro real m. Obtened:

a) La posición relativa de las rectas r y s. (4 puntos)

b) El valor del parámetro m para que la recta r esté contenida en el plano π. (3 puntos)

c) Los puntos A, B, C intersección del plano π con los ejes de coordenadas cuando $m = 2$, así como el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y $P(2,2,2)$. (3 puntos)

a) Obtenemos un vector director y un punto de cada recta.

$$r:\begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x-z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1-x \\ z=-1+2x \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(1,-1,2) \\ P_r(0,1,-1) \end{cases}$$

$$s:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{2} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_s}=(1,-1,2) \\ Q_s(1,0,0) \end{cases}$$

Vemos si las coordenadas de los vectores directores son proporcionales.

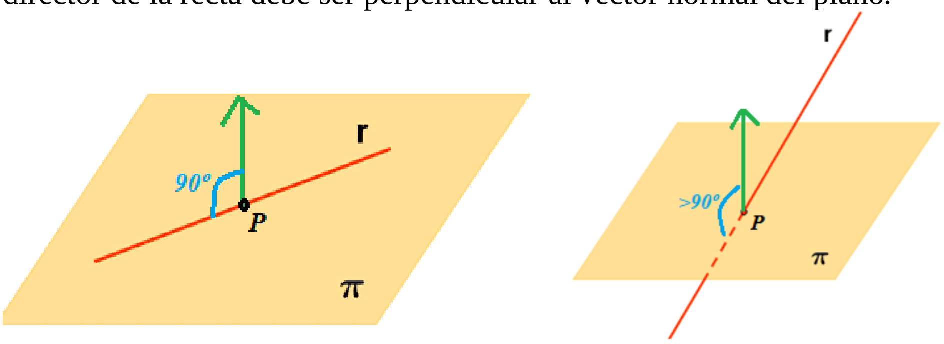
$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,-1,2) \\ \overrightarrow{v_s}=(1,-1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{1}=\frac{-1}{-1}=\frac{2}{2}$$

Como son proporcionales las rectas son paralelas o coincidentes.
Comprobamos si un punto cualquiera de r está en s.

$$\left.\begin{array}{l} ¿P_r(0,1,-1)\in s? \\ s:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow ¿\frac{0-1}{1}=\frac{1}{-1}=\frac{-1}{2}? \Rightarrow ¿-1=-1=-\frac{1}{2}?$$

No es cierto y las rectas no son la misma. Las rectas r y s son paralelas.

b) Para que la recta r esté contenida en el plano el punto P_r debe estar en el plano π y el vector director de la recta debe ser perpendicular al vector normal del plano.



$$r:\begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x-z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(1,-1,2) \\ P_r(0,1,-1) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi: x+my+z=2 \\ P_r(0,1,-1)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow 0+m-1=2 \Rightarrow \boxed{m=3}$$

Comprobamos que $\overrightarrow{u_r}$ y $\vec{n}$ son perpendiculares, es decir, su producto escalar es cero.

$$\left.\begin{array}{l}\pi : x+3y+z=2 \Rightarrow \vec{n}=(1,3,1) \\ \overrightarrow{u_r}=(1,-1,2)\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{u_r}=(1,3,1)(1,-1,2)=1-3+2=0$$

Es cierto que para $m = 3$ la recta está contenida en el plano π.

c) Para $m = 2$ el plano tiene ecuación $\pi : x+2y+z=2$.

$$\left.\begin{array}{r}\pi : x+2y+z=2 \\ x=0 \\ y=0\end{array}\right\} \Rightarrow z=2 \Rightarrow A(0,0,2)$$

$$\left.\begin{array}{r}\pi : x+2y+z=2 \\ x=0 \\ z=0\end{array}\right\} \Rightarrow 2y=2 \Rightarrow y=1 \Rightarrow B(0,1,0)$$

$$\left.\begin{array}{r}\pi : x+2y+z=2 \\ y=0 \\ z=0\end{array}\right\} \Rightarrow x=2 \Rightarrow C(2,0,0)$$

El volumen del tetraedro con vértices A, B, C y P es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto de los vectores $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$ y $\overrightarrow{PC}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PA}=(0,0,2)-(2,2,2)=(-2,-2,0) \\ \overrightarrow{PB}=(0,1,0)-(2,2,2)=(-2,-1,-2) \\ \overrightarrow{PC}=(2,0,0)-(2,2,2)=(0,-2,-2)\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PB},\overrightarrow{PC}\right]=\begin{vmatrix}-2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -2\end{vmatrix}=-4+8+8=12$$

$$\boxed{Volumen\ ABCP=\frac{12}{6}=2\,u^3}$$

Problema 3. Dada la función $f(x) = xe^{1-x^2}$,

a) El dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos. (4 puntos)

b) Las asíntotas y la gráfica de f. (3 puntos)

c) La integral $\int f(x)dx$. (3 puntos)

a) El dominio de la función son todos los reales, pues es una exponencial y polinomios.

$Dominio\ f(x) = \mathbb{R}$

Hallamos su derivada y la igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

$$f(x) = xe^{1-x^2} \Rightarrow f'(x) = e^{1-x^2} + x(-2x)e^{1-x^2} = e^{1-x^2} - 2x^2e^{1-x^2} = e^{1-x^2}\left(1-2x^2\right)$$

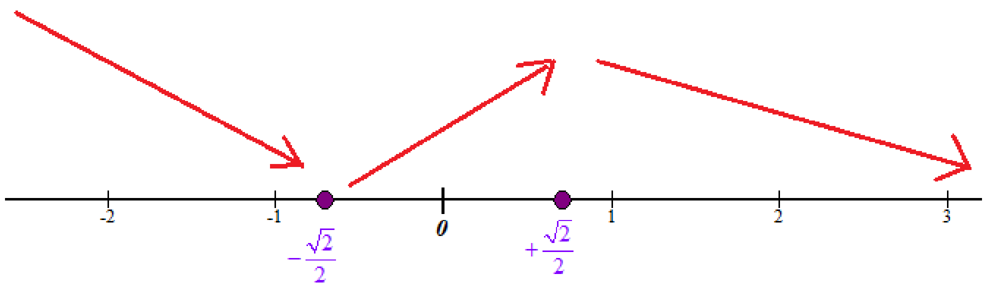
$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{1-x^2}\left(1-2x^2\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{1-x^2} = 0, & \text{¡Imposible!} \\ 1-2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = e^{1-1}\left(1-2(-1)^2\right) = -1 < 0$.

  La función decrece en $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
- En $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, +\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = e^1(1) = e > 0$. La función crece en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, +\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
- En $\left(+\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(x) = e^{1-1}(1-2) = -1 < 0$. La función decrece en $\left(+\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$.

La función es continua y sigue el esquema siguiente.



La función decrece en $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(+\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ y crece en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, +\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

La función presenta un mínimo relativo en $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Como

$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \simeq -1.16$ el mínimo relativo tiene coordenadas $(-0.7, -1.16)$

La función presenta un máximo relativo en $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Como $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \simeq 1.16$ el máximo relativo tiene coordenadas $(0.7, 1.16)$

b)

Asíntota vertical. $x = a$

No tiene pues el dominio son todos los reales.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^{1-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x^2-1}} = \frac{\infty}{\infty} = Indeterminación(L´Hôpital) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2xe^{x^2-1}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^{1-x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{x^2-1}} = \frac{\infty}{\infty} = Indeterminación(L´Hôpital) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2xe^{x^2-1}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

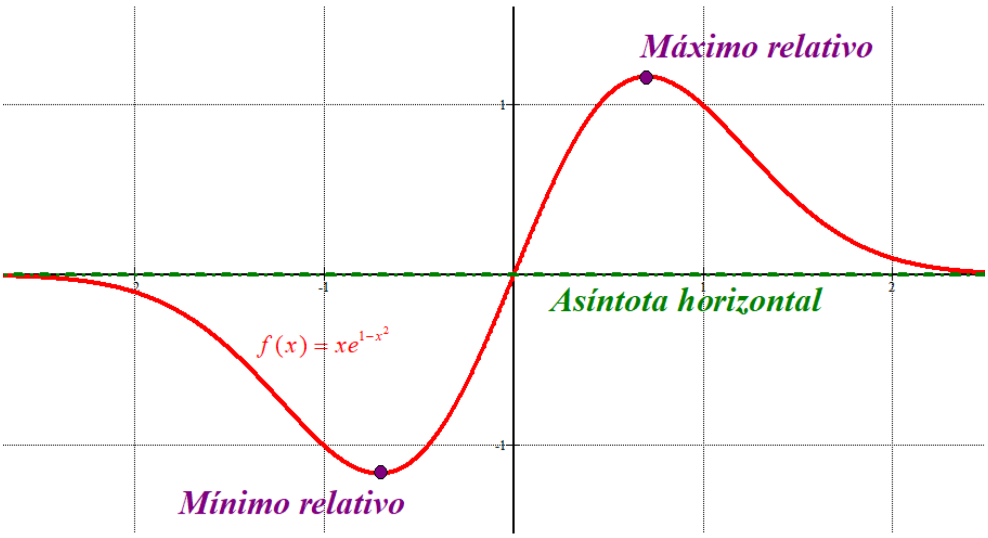
La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

No tiene, pues existe asíntota horizontal.

Para obtener la gráfica hacemos una pequeña tabla de valores y junto con la información obtenida dibujamos su gráfica.

x	$y = xe^{1-x^2}$
-2	-0.1
-1	-1
0	0
1	1
2	0.1



c)

$$\int f(x)dx = \int xe^{1-x^2}dx = \left\{ \begin{array}{c} \text{Cambio de variable} \\ 1-x^2 = t \Rightarrow -2xdx = dt \\ dx = -\frac{1}{2x}dt \end{array} \right\} = \int \cancel{x} e^t \left(-\frac{1}{2\cancel{x}}\right) dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int e^t dt = -\frac{1}{2}e^t = \left\{ \begin{array}{c} \text{Deshacemos el cambio de variable} \\ 1-x^2 = t \end{array} \right\} = \boxed{-\frac{1}{2}e^{1-x^2} + K}$$

Problema 4. Sean las matrices $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & a & 1\\ 1 & a^2-2 & 3\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}$. Obtened

a) El rango de la matriz A según los valores del parámetro a. (3 puntos)

b) Una matriz C tal que $AC=16I$, siendo I la matriz identidad, cuando a = 0. (4 puntos)

c) El rango de la matriz B y la discusión de si el sistema $B\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 2\end{bmatrix}$ tiene solución. (3 puntos)

a) Hallamos el determinante de A y vemos cuando se anula.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & a & 1\\ 1 & a^2-2 & 3\end{vmatrix}=\cancel{3a}+2-3a^2+6-\cancel{3a}+6-a^2+2=-4a^2+16$$

$$|A|=0\Rightarrow -4a^2+16=0\Rightarrow -4\left(a^2-4\right)=0\Rightarrow a^2-4=0\Rightarrow a=\sqrt{4}=\pm 2$$

CASO 1. Si $a\neq -2\ y\ a\neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y por tanto su rango es 3.

CASO 2. $a=-2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Vemos como queda la matriz.

$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ Si consideramos el menor que resulta de quitar la fila y columna 1ª vemos que su determinante es no nulo y por tanto el rango de A es 2.

$$\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-6-2=-8\neq 0$$

CASO 3. $a=2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Vemos como queda la matriz.

$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ Si consideramos el menor que resulta de quitar la fila y columna 1ª vemos que su determinante es no nulo y por tanto el rango de A es 2.

$$\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=6-2=4\neq 0$$

Resumiendo: Si $a\neq -2\ y\ a\neq 2$ el rango de A es 3 y si $a=-2$ o $a=2$ el rango de A es 2.

b) Cuando a = 0 el determinante de A es no nulo y tiene inversa. Podemos despejar en la ecuación matricial planteada.

$$AC=16I\Rightarrow A^{-1}AC=16A^{-1}I\Rightarrow C=16A^{-1}$$

Hallamos la inversa de A.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix}=2+6+6+2=16\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & -2\\ 3 & 1 & 3\end{pmatrix}}{16}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & -2\\ 3 & 3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}2 & -12 & 2\\ 4 & 0 & -4\\ 2 & 4 & 2\end{pmatrix}$$

Sustituyendo en $C=16A^{-1}$ tenemos que:

$$C=16A^{-1}=16\cdot\frac{1}{16}\begin{pmatrix}2 & -12 & 2\\ 4 & 0 & -4\\ 2 & 4 & 2\end{pmatrix}$$

$$\boxed{C=\begin{pmatrix}2 & -12 & 2\\ 4 & 0 & -4\\ 2 & 4 & 2\end{pmatrix}}$$

c) Calculamos la expresión de la matriz B.

$$B=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & -2 & -3\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}$$

$$3\times\boxed{1\cdot 1}\times 3\longrightarrow 3\times 3$$

Vemos que todas las filas son proporcionales: la 2ª es la 1ª cambiada de signo y la 3ª es el doble de la 1ª. Por tanto, el rango de B es 1.

El sistema $B\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 2\end{bmatrix}$ tiene como matriz de coeficientes la matriz B que tiene rango 1, veamos el rango de la matriz ampliada $\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 1\\ -1 & -2 & -3 & -1\\ 2 & 4 & 6 & 2\end{array}\right)$. El rango de esta matriz también es 1, pues todas las filas son proporcionales: la 2ª es la 1ª cambiada de signo y la 3ª es el doble de la 1ª. Por tanto, el rango es 1.

El rango de la matriz de coeficientes (1) es igual al rango de la matriz ampliada (1) y menor que el número de incógnitas (3) por lo que el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Problema 5. Dados los puntos $P(1,1,0)$, $Q(2,-1,1)$ y $R(\alpha, 3, -1)$ se pide:
a) La ecuación del plano que contiene a P, Q y R cuando $\alpha = 1$ y la distancia de dicho plano al origen de coordenadas. (3 puntos)
b) La ecuación de la recta r que pasa por R cuando $\alpha = 1$ y es paralela a la recta s que pasa por P y Q. Calculad la distancia entre las rectas r y s. (4 puntos)
c) Los valores de α para los cuales P, Q y R están alineados y la ecuación de la recta que los contiene. (3 puntos)

a) Cuando $\alpha = 1$ los puntos son $P(1,1,0)$, $Q(2,-1,1)$ y $R(1, 3, -1)$
Determinamos la ecuación del plano π que pasa por los tres puntos como el plano con vectores directores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ y que pasa por P(1,1,0).

$$\left.\begin{array}{r} \vec{u}=\overrightarrow{PQ}=(2,-1,1)-(1,1,0)=(1,-2,1) \\ \vec{v}=\overrightarrow{PR}=(1,3,-1)-(1,1,0)=(0,2,-1) \\ P(1,1,0)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{2x}-\cancel{2}+2z+y-1-\cancel{2x}+\cancel{2}=0 \Rightarrow \boxed{\pi: y+2z-1=0}$$

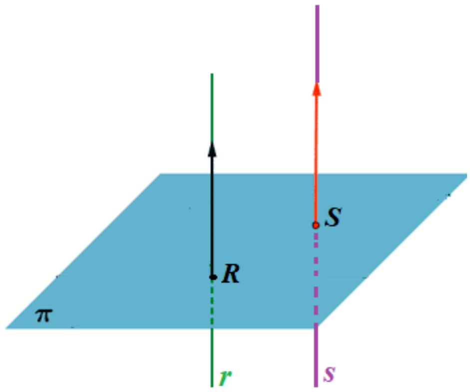
Hallamos la distancia del origen de coordenadas O(0,0,0) al plano $\pi: y+2z-1=0$.

$$\left.\begin{array}{l} O(0,0,0) \\ \pi: y+2z-1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{d(O,\pi)=\frac{|0+0-1|}{\sqrt{0^2+1^2+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}\,u}$$

b) Cuando $\alpha = 1$ el punto R tiene coordenadas $R(1, 3, -1)$.
La recta s que pasa por P y Q tiene como vector director el vector $\overrightarrow{PQ}$, por lo que la recta r paralela a s tiene el mismo vector director $\overrightarrow{PQ}$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v_r}=\overrightarrow{PQ}=(1,-2,1) \\ R(1,3,-1)\in r \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{r: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=3-2\lambda \\ z=-1+\lambda \end{cases}}$$

Para hallar la distancia entre las dos rectas paralelas r y s hallamos el plano π perpendicular a ambas y que pase por el punto R, después hallamos el punto S de corte del plano y la recta s. La distancia entre las rectas es el módulo del vector $\overrightarrow{RS}$.



Hallamos la ecuación del plano π.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}=\vec{v_r}=(1,-2,1) \\ R(1,3,-1)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \pi: x-2y+z+D=0 \\ R(1,3,-1)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow 1-6-1+D=0 \Rightarrow D=6 \Rightarrow \pi: x-2y+z+6=0$$

Hallamos la ecuación de la recta *s*.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{PQ}=(1,-2,1)\\ P(1,1,0)\in s\end{array}\right\}\Rightarrow s:\begin{cases}x=1+\beta\\ y=1-2\beta\\ z=\beta\end{cases}$$

Hallamos el punto S de corte de recta *s* y plano π.

$$\left.\begin{array}{l}\pi: x-2y+z+6=0\\ s:\begin{cases}x=1+\beta\\ y=1-2\beta\\ z=\beta\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow 1+\beta-2(1-2\beta)+\beta+6=0\Rightarrow 1+\beta-2+4\beta+\beta+6=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\beta+5=0\Rightarrow \beta=-\frac{5}{6}\Rightarrow\begin{cases}x=1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}\\ y=1+\frac{10}{6}=\frac{16}{6}\Rightarrow S\left(\frac{1}{6},\frac{16}{6},-\frac{5}{6}\right)\\ z=-\frac{5}{6}\end{cases}$$

Hallamos el módulo del vector $\overrightarrow{RS}$

$$\left.\begin{array}{l}S\left(\frac{1}{6},\frac{16}{6},-\frac{5}{6}\right)\\ R(1,3,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{RS}=\left(\frac{1}{6},\frac{16}{6},-\frac{5}{6}\right)-(1,3,-1)=\left(-\frac{5}{6},-\frac{2}{6},\frac{1}{6}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(r,s)=d(R,S)=\left|\overrightarrow{RS}\right|=\sqrt{\left(-\frac{5}{6}\right)^2+\left(-\frac{2}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2}=\boxed{\sqrt{\frac{5}{6}}\,u}$$

La distancia entre las rectas paralelas *r* y *s* es $\sqrt{\frac{5}{6}}\,u$

c) Tenemos la ecuación de la recta *s* que pasa por P y Q → $s:\begin{cases}x=1+\beta\\ y=1-2\beta\\ z=\beta\end{cases}$.

Hacemos que la recta *s* pase por el punto $R(\alpha, 3, -1)$ para que estén alineados.

$$\left.\begin{array}{l}s:\begin{cases}x=1+\beta\\ y=1-2\beta\\ z=\beta\end{cases}\\ R(\alpha,\ 3,\ -1)\in s\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=1+\beta\\ 3=1-2\beta\\ -1=\beta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=1+\beta\\ 2=-2\beta\\ -1=\beta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=1+\beta\\ -1=\beta\\ -1=\beta\end{cases}\Rightarrow\boxed{\alpha=1-1=0}$$

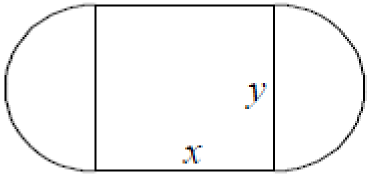
Para que estén alineados los puntos P, Q y R debe ser $\alpha=0$.

La ecuación de la recta que los contiene es $s:\begin{cases}x=1+\beta\\ y=1-2\beta\\ z=\beta\end{cases}$

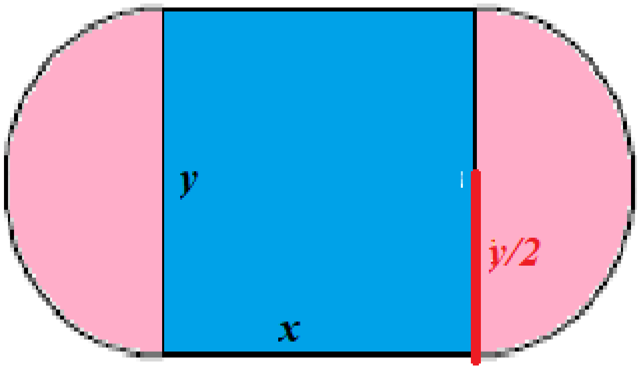
Problema 6. Queremos diseñar un campo de juego de modo que la parte central sea rectangular, y las partes laterales sean semicircunferencias hacia fuera. La superficie del campo mide $(4 + \pi)$ metros cuadrados. Se quieren pintar todas las rayas de dicho campo tal y como se observa en la figura. Se pide:

a) Escribid la longitud total de las rayas del campo en función de la altura y del rectángulo. (5 puntos)

b) Calculad las dimensiones del campo para que la pintura usada sea mínima. (5 puntos)



a) Hallamos la superficie del campo en función de x e y.



La superficie del rectángulo azul es "$x \cdot y$" y la superficie de las dos semicircunferencias con radio $y/2$ es $\pi\left(\frac{y}{2}\right)^2$.

Sumamos para obtener la superficie total del campo y la igualamos a $4 + \pi$.

$$xy+\pi\left(\frac{y}{2}\right)^2=4+\pi \Rightarrow xy+\frac{\pi y^2}{4}=4+\pi \Rightarrow 4xy+\pi y^2=16+4\pi \Rightarrow 4xy=16+4\pi-\pi y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{16+4\pi-\pi y^2}{4y}=\frac{16+4\pi}{4y}-\frac{\pi y^2}{4y}=\frac{4+\pi}{y}-\frac{\pi}{4}y$$

Hay que pintar un rectángulo (dos lados de longitud "x" y otros dos de longitud "y") y dos semicircunferencias de radio "y/2", lo que hace una circunferencia de radio "y/2".

Hay que pintar $P(x,y)=2x+2y+2\pi\frac{y}{2}=2x+2y+\pi y$.

Sustituimos "x" en la longitud de líneas a pintar y tenemos:

$$\left.\begin{array}{r} P(x,y)=2x+2y+\pi y \\ x=\dfrac{4+\pi}{y}-\dfrac{\pi}{4}y \end{array}\right\} \Rightarrow P(x,y)=P(y)=2\left(\dfrac{4+\pi}{y}-\dfrac{\pi}{4}y\right)+2y+\pi y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(y)=\frac{8+2\pi}{y}-\frac{\pi}{2}y+2y+\pi y \Rightarrow \boxed{P(y)=\frac{8+2\pi}{y}+\frac{\pi}{2}y+2y}$$

b) Derivamos la función *P(y)* e igualamos a cero.

$$P(y)=\frac{8+2\pi}{y}+\frac{\pi}{2}y+2y \Rightarrow P'(y)=-\frac{8+2\pi}{y^2}+\frac{\pi}{2}+2$$

$$P'(y)=0 \Rightarrow -\frac{8+2\pi}{y^2}+\frac{\pi}{2}+2=0 \Rightarrow \frac{\pi+4}{2}=\frac{8+2\pi}{y^2} \Rightarrow y^2=\frac{2(8+2\pi)}{\pi+4}=\frac{4\cancel{(4+\pi)}}{\cancel{\pi+4}}=4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\sqrt{4}=\pm 2$$

Solo nos sirve el valor positivo *y = 2*, sustituimos en la segunda derivada para comprobar si es un mínimo.

$$P'(y)=-\frac{8+2\pi}{y^2}+\frac{\pi}{2}+2=-(8+2\pi)y^{-2}+\frac{\pi}{2}+2 \Rightarrow P''(y)=2(8+2\pi)y^{-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P''(2)=2(8+2\pi)2^{-3}>0$$

La derivada segunda es positiva con *y = 2*, luego hay un mínimo relativo de *P(y)*.

Sustituimos para obtener *x* → $x=\dfrac{4+\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4}2=\dfrac{4+\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{4}{2}=2$

Se consigue un mínimo de longitud de las líneas a pintar con *x = y = 2*.