COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT

COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ
SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATÒRIA: JULIOL 2021	CONVOCATORIA: JULIO 2021
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II

BAREM DE L'EXAMEN:
L'estudiantat contestarà només TRES problemes entre els sis proposats.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Es permet l'ús de calculadores sempre que no siguen gràfiques o programables, i que no puguen realitzar càlcul simbòlic ni emmagatzemar text o fórmules en memòria. S'use o no la calculadora, els resultats analítics, numèrics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.

BAREMO DEL EXAMEN:
El alumnado contestará solo TRES problemas entre los seis propuestos.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

<u>En les respostes s'han d'escriure tots els passos del raonament utilitzat.</u>

Problema 1. Donat el sistema d'equacions $\left\{\begin{array}{rcl} 2x-y+z & = & m \\ x+y+3z & = & 0 \\ 5x-4y+m\,z & = & m \end{array}\right.$, on m és un paràmetre real, es demana:

a) La discussió del sistema d'equacions en funció del paràmetre m. (4 punts)
b) La solució del sistema quan $m=1$. (3 punts)
c) Les solucions del sistema en el cas en què siga compatible indeterminat. (3 punts)

Solució. a) El valor del determinant del sistema és $\Delta = 3m$. Si $m \neq 0$ SCD, si $m=0$ SCI. b) $x=3, y=3, z=-2$ c) $x=-\frac{4}{3}\alpha, y=-\frac{5}{3}\alpha,\ z=\alpha$ on α és un paràmetre real.

Problema 2. Es donen les rectes $r\!:\begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x-z-1=0 \end{cases}$, s: $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{2}$ i el pla $\pi\!: x+my+z=2$ que depèn del paràmetre real m. Obteniu:

a) La posició relativa de les rectes r i s. (4 punts)
b) El valor del paràmetre m perquè la recta r estiga continguda en el pla π. (3 punts)
c) Els punts A, B, C intersecció del pla π amb els eixos de coordenades quan $m=2$, així com el volum del tetraedre de vèrtexs A, B, C i $P(2,2,2)$. (3 punts)

Solució. a) Les rectes són paral·leles. b) La recta r està continguda en el pla π quan $m=3$. Es valorarà amb dos punts la conclusió que el vector director de la recta és ortogonal al vector característic del pla quan $m=3$ i amb un punt la comprovació que un punt de la recta està contingut en el pla. c) $A(2,0,0), B(0,1,0), C(0,0,2)$. El volum del tetraedre val 2.

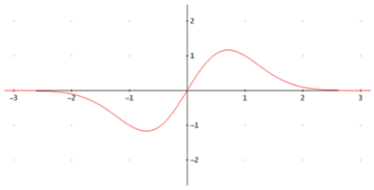
Problema 3. Donada la funció $f(x) = xe^{1-x^2}$ calculeu:

a) El domini, els intervals de creixement i decreixement i els extrems relatius. (4 punts)

b) Les asímptotes i la gràfica de f. (3 punts)

c) La integral $\int f(x)dx$. (3 punts)

Solució. a) $dom\ f = \mathbb{R}$, f decreix en $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty,\right)$ i creix en $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. En $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ hi ha un mínim relatiu i en $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ hi ha un màxim relatiu. b) Asímptota horitzontal $y = 0$.



c) $\int f(x)dx = -\frac{1}{2}e^{1-x^2} + C$

Problema 4. Es donen les matrius $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & a^2-2 & 3 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} [1 \quad 2 \quad 3]$. Obteniu:

a) El rang de la matriu A segons els valors del paràmetre real a. (3 punts)

b) Una matriu C tal que $AC = 16\,I$, on I és la matriu identitat, quan $a = 0$. (4 punts)

c) El rang de la matriu B i la discussió de si el sistema $B\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ té solució. (3 punts)

Solució. a) $\det(A) = -4(a^2 - 4)$. El rang val 3 quan $a \neq \pm 2$ i val 2 quan $a = \pm 2$. b) $C = 16A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -12 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$. c) La matriu B té rang 1 (un punt). El sistema té solució perquè la matriu que obtenim a l'afegir a B la columna $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ també té rang 1 (dos punts).

Problema 5. Donats els punts $P(1,1,0)$, $Q(2,-1,1)$ i $R(\alpha, 3, -1)$ es demana:

a) L'equació del pla que conté P, Q i R quan $\alpha = 1$ i la distància d'aquest pla a l'origen de coordenades. (3 punts)

b) L'equació de la recta r que passa per R quan $\alpha = 1$ i és paral·lela a la recta s que passa per P i Q. Calculeu la distància entre les rectes r i s. (4 punts)

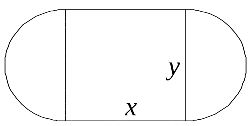
c) Els valors d' α per als quals P, Q i R estan alineats i l'equació de la recta que els conté. (3 punts)

Solució. a) $\pi: y + 2z - 1 = 0$, $d(O,\pi) = \frac{\sqrt{5}}{5}$. b) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{1}$, $d(r,s) = \sqrt{\frac{5}{6}}$. c) $\alpha = 0$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$

Problema 6. Volem dissenyar un camp de joc de manera que la part central siga rectangular, i les parts laterals siguen semicircumferències cap a fora. La superfície del camp mesura $(4 + \pi)$ metres quadrats. Es volen pintar totes les ratlles d'aquest camp tal com s'observa a la figura. Es demana:

a) Escriviu la longitud total de les ratlles del camp en funció de l'altura y del rectangle. (5 punts)

b) Calculeu les dimensions del camp perquè la pintura usada siga mínima. (5 punts)



Solució. a) L'àrea és igual a $xy + \pi\frac{y^2}{4} = 4 + \pi$ i la longitud és $f(y) = \frac{8+2\pi}{y} + 2y + \frac{\pi y}{2}$. b) $x = y = 2$.

<u>En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado</u>.

Problema 1. Se da el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{lcl} 2x-y+z & = & m \\ x+y+3z & = & 0 \\ 5x-4y+m\,z & = & m \end{array}\right.$, donde m es un parámetro real. Se pide:

a) La discusión del sistema de ecuaciones en función del parámetro m. (4 puntos)
b) La solución del sistema cuando $m = 1$. (3 puntos)
c) Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado. (3 puntos)

Solución. a) El valor del determinante del sistema es $\Delta = 3m$. Si $m \neq 0$ SCD y si $m = 0$ SCI. b) $x = 3, y = 3, z = -2$ c) $x = -\frac{4}{3}\alpha,\ y = -\frac{5}{3}\alpha,\ z = \alpha$ donde α es un parámetro real.

Problema 2. Se dan las rectas $r: \begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x-z-1=0 \end{cases}$, s: $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ y el plano $\pi: x+my+z=2$ que depende del parámetro real m. Obtened:

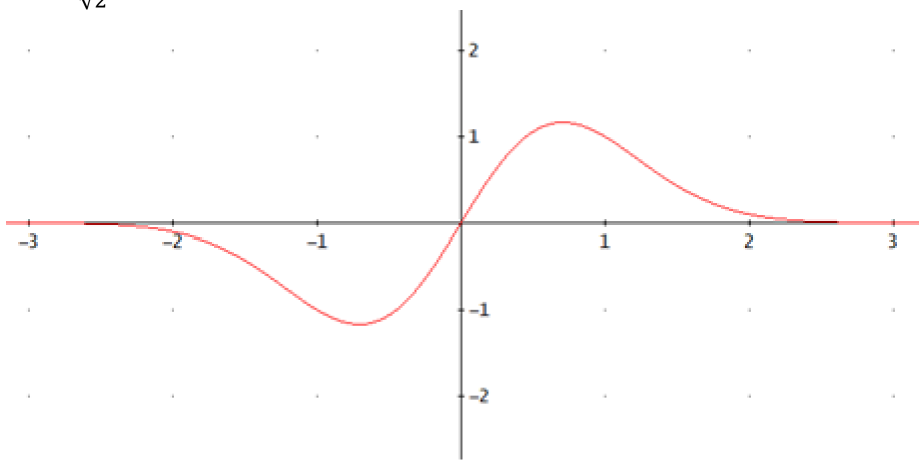
a) La posición relativa de las rectas r y s. (4 puntos)
b) El valor del parámetro m para que la recta r esté contenida en el plano π. (3 puntos)
c) Los puntos A, B, C intersección del plano π con los ejes de coordenadas cuando $m = 2$, así como el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y $P(2,2,2)$. (3 puntos)

Solución. a) Las rectas son paralelas. b) La recta r está contenida en el plano cuando $m = 3$. Se valorará con dos puntos la conclusión de que el vector director de la recta es ortogonal al vector característico del plano cuando $m = 3$ y con un punto la comprobación de que un punto de la recta está contenido en el plano. c) $A(2,0,0), B(0,1,0), C(0,0,2)$. El volumen del tetraedro vale 2.

Problema 3. Dada la función $f(x) = xe^{1-x^2}$, calculad:

a) El dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos. (4 puntos)
b) Las asíntotas y la gráfica de f. (3 puntos)
c) La integral $\int f(x)dx$. (3 puntos)

Sol. a) $dom\, f = \mathbb{R}$, f decrece en $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y en $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty,\right)$ y crece en $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. En $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ hay un mínimo relativo y en $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ hay un máximo relativo. b) Asíntota horizontal $y = 0$.



c) $\int f(x)dx = -\frac{1}{2}e^{1-x^2} + C$

Problema 4. Se dan las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & a^2-2 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}[1 \quad 2 \quad 3]$. Obtened

a) El rango de la matriz A según los valores del parámetro real a. (3 puntos)
b) Una matriz C tal que $AC = 16\,I$, siendo I la matriz identidad, cuando $a = 0$. (4 puntos)
c) El rango de la matriz B y la discusión de si el sistema $B\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ tiene solución. (3 puntos)

Solución. a) $\det(A) = -4(a^2-4)$. El rango vale 3 cuando $a \neq \pm 2$ y vale 2 cuando $a = \pm 2$. b) $C = 16A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -12 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$. c) La matriz B tiene rango 1 (un punto). El sistema tiene solución porque la matriz que obtenemos al añadir a B la columna $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ también tiene rango 1 (dos puntos).

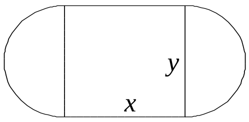
Problema 5. Dados los puntos $P(1,1,0)$, $Q(2,-1,1)$ y $R(\alpha,3,-1)$ se pide:

a) La ecuación del plano que contiene a P, Q y R cuando $\alpha = 1$, y la distancia de dicho plano al origen de coordenadas. (3 puntos)
b) La ecuación de la recta r que pasa por R cuando $\alpha = 1$ y es paralela a la recta s que pasa por P y Q. Calculad la distancia entre las rectas r y s. (4 puntos)
c) Los valores de α para los cuales P, Q y R están alineados y la ecuación de la recta que los contiene. (3 puntos)

Solución. a) $y + 2z - 1 = 0$, distancia $\frac{\sqrt{5}}{5}$. b) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{1}$, $d(r,s) = \sqrt{\frac{5}{6}}$. c) $\alpha = 0$, $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$

Problema 6. Queremos diseñar un campo de juego de modo que la parte central sea rectangular, y las partes laterales sean semicircunferencias hacia fuera. La superficie del campo mide $4 + \pi$ metros cuadrados. Se quieren pintar todas las rayas de dicho campo tal y como se observa en la figura. Se pide:

a) Escribid la longitud total de las rayas del campo en función de la altura y del rectángulo. (5 puntos)
b) Calculad las dimensiones del campo para que la pintura usada sea mínima. (5 puntos)



Solución. a) El área es igual a $xy + \pi\frac{y^2}{4} = 4 + \pi$ y la longitud es $f(y) = \frac{8+2\pi}{y} + 2y + \frac{\pi y}{2}$. b) $x = y = 2$.