Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2021

Proves d'accés a la universitat

Matemátiques aplicades a les ciències socials

Sèrie 2

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

1. Una fàbrica estima que el benefici mensual, en milers d'euros, per cada tona de confeti venuda és donat per la funció $f(x)=\dfrac{-0,2x^2+5x-20}{x}$, en què x representa el nombre de tones de confeti venudes.

***a*)** Determineu en quin interval de valors s'ha de trobar la variable x perquè la fàbrica no tingui pèrdues. [1,25 punts]

***b*)** Calculeu la quantitat de tones de confeti que proporciona el benefici màxim i digueu quin és aquest benefici. [1,25 punts]

2. En una pastisseria volen preparar capsetes de panellets per a obsequiar els millors clients durant la setmana de la Castanyada. En total, disposen de 120 panellets de pinyons i de 150 panellets de coco. Volen preparar capsetes de dos tipus: les del primer tipus contindran 3 panellets de pinyons i 2 de coco, i les del segon tipus contindran 4 panellets de pinyons i 6 de coco. La idea de la pastisseria és preparar el nombre màxim de capsetes possible amb els panellets de què disposen tenint en compte que, com a mínim, han de preparar 9 capsetes de cada tipus.

***a*)** Determineu la funció objectiu i les restriccions. Dibuixeu la regió factible. [1,25 punts]

***b*)** Determineu quantes capsetes cal preparar de cada tipus per a fer el màxim nombre d'obsequis possible. Indiqueu si, en aquest cas, s'utilitzaran tots els panellets disponibles i, si no és així, quants en sobraran de cada tipus. [1,25 punts]

3. En una festa familiar s'han reunit 20 persones. Si comptem el total d'homes i dones junts, observem que n'hi ha el triple que de nens. A més, sabem que, si hi hagués assistit una dona més, el nombre de dones hauria estat igual que el nombre d'homes.

***a*)** Plantegeu un sistema d'equacions per a esbrinar quants homes, quantes dones i quants nens van assistir a la festa. [0,75 punts]

***b*)** Resoleu el sistema de l'apartat anterior i interpreteu-ne el resultat. [1,75 punts]

4. Un granger vol construir un corral rectangular per als seus conills. Sabem que només disposa de 40 m lineals de tanca metàl·lica.

***a*)** Anomenem x l'amplària del corral i y la seva llargària. Escriviu la funció que permet calcular l'àrea del corral tenint en compte només l'amplària x. [1,25 punts]

***b*)** Calculeu en quin punt assoleix el seu màxim la funció que heu trobat a l'apartat anterior. Deduïu quina ha de ser l'amplària x i quina la llargària y perquè el corral tingui l'àrea màxima. Quina serà aquesta àrea màxima? [1,25 punts]

5. Considereu la matriu $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

***a*)** Trobeu l'expressió general de $\boldsymbol{A}^n$. Demostreu que la inversa de $\boldsymbol{A}^n$ és $\begin{pmatrix}1 & -n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. [1,25 punts]

***b*)** Trobeu la matriu $\boldsymbol{X}$ que satisfà l'equació matricial $A^{10}\cdot X-A^{20}=A$. [1,25 punts]

6. Considereu la funció real de variable real $f\left(x\right)=4x^3+ax^2-2$.

***a*)** Determineu el valor del paràmetre real a per tal que la funció tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x=-1$. [1,25 punts]

***b*)** Calculeu els intervals de creixement i decreixement de la funció $f(x)$ quan $a = 12$. Indiqueu també els punts en què hi ha extrems relatius i classifiqueu-los. [1,25 punts]

SOLUCIONES

1. Una fàbrica estima que el benefici mensual, en milers d'euros, per cada tona de confeti venuda és donat per la funció $f(x)=\frac{-0,2x^2+5x-20}{x}$, en què x representa el nombre de tones de confeti venudes.

a) Determineu en quin interval de valors s'ha de trobar la variable *x* perquè la fàbrica no tingui pèrdues. [1,25 punts]

b) Calculeu la quantitat de tones de confeti que proporciona el benefici màxim i digueu quin és aquest benefici. [1,25 punts]

a) Averiguamos cuando los beneficios son cero.

$$f(x)=0\Rightarrow\frac{-0,2x^2+5x-20}{x}=0\Rightarrow -0,2x^2+5x-20=0\Rightarrow 2x^2-50x+200=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-25x+100=0\Rightarrow x=\frac{25\pm\sqrt{(-25)^2-400}}{2}=\frac{25\pm 15}{2}=\begin{cases}\frac{25+15}{2}=20\\ \frac{25-15}{2}=5\end{cases}$$

Estudiamos el comportamiento de los beneficios según las toneladas de confeti vendidas.

- En $(0,5)$ tomamos *x = 4* y los beneficios son $f(4)=\frac{-0,2(4)^2+5(4)-20}{4}=-\frac{4}{5}<0$.
  En el intervalo $(0,5)$ el beneficio es negativo (tiene pérdidas).

- En $(5,20)$ tomamos *x = 10* y los beneficios son $f(10)=\frac{-0,2(10)^2+5(10)-20}{10}=1>0$.
  En el intervalo $(5,20)$ el beneficio es positivo (no tiene pérdidas).

- En $(20,+\infty)$ tomamos *x = 30* y los beneficios son
  $f(30)=\frac{-0,2(30)^2+5(30)-20}{30}=-\frac{5}{3}<0$. En el intervalo $(0,5)$ el beneficio es negativo (tiene pérdidas).

Para que no tenga pérdidas se deben producir entre 5 y 20 toneladas.

b) Calculamos la derivada y la igualamos a cero.

$$f(x)=\frac{-0,2x^2+5x-20}{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{(-0,4x+5)x-1\cdot(-0,2x^2+5x-20)}{x^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{-0,4x^2+5x+0,2x^2-5x+20}{x^2}=\frac{-0,2x^2+20}{x^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\,'(x)=0 \Rightarrow \frac{-0,2x^2+20}{x^2}=0 \Rightarrow -0,2x^2+20=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0,2x^2=20 \Rightarrow x^2=\frac{20}{0,2}=100 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt{100}=10}$$

No consideramos el valor *x = –10* pues los valores de *x* son las toneladas de confetis y no puede tomar un valor negativo.
En *x = 10* la función presenta un punto crítico, veamos si la función crece o decrece antes y después de este valor.

- En $(0,10)$ tomamos *x = 5* y la derivada vale $f\,'(5)=\frac{-0,2\cdot 5^2+20}{5^2}=\frac{3}{5}>0$. La función crece en $(0,10)$.
- En $(10,+\infty)$ tomamos *x = 20* y la derivada vale $f\,'(20)=\frac{-0,2\cdot 20^2+20}{20^2}=-\frac{3}{20}<0$. La función decrece en $(10,+\infty)$.

La función presenta un máximo relativo en *x = 10*, pues crece antes de *x = 10* y luego decrece.

Los beneficios son máximos fabricando 10 toneladas de confeti.
Como $f(10)=\frac{-0,2\cdot 10^2+5\cdot 10-20}{10}=1$ estos beneficios máximos son de 1000 €.

2. En una pastisseria volen preparar capsetes de panellets per a obsequiar els millors clients durant la setmana de la Castanyada. En total, disposen de 120 panellets de pinyons i de 150 panellets de coco. Volen preparar capsetes de dos tipus: les del primer tipus contindran 3 panellets de pinyons i 2 de coco, i les del segon tipus contindran 4 panellets de pinyons i 6 de coco. La idea de la pastisseria és preparar el nombre màxim de capsetes possible amb els panellets de què disposen tenint en compte que, com a mínim, han de preparar 9 capsetes de cada tipus.
a) Determineu la funció objectiu i les restriccions. Dibuixeu la regió factible. [1,25 punts]
b) Determineu quantes capsetes cal preparar de cada tipus per a fer el màxim nombre d'obsequis possible. Indiqueu si, en aquest cas, s'utilitzaran tots els panellets disponibles i, si no és així, quants en sobraran de cada tipus. [1,25 punts]

a) Llamamos "x" al número de cajitas de panellets del primer tipo e "y" al número de cajitas de panellets del segundo tipo.

Queremos maximizar el número de cajitas (función objetivo) → $f(x,y)=x+y$

Hacemos una tabla para ordenar los datos.

	Nº panellets de pinyons	Nº de panellets de coco
Nº de cajitas tipo I (x)	**3x**	**2x**
Nº de cajitas tipo II (y)	**4y**	**6y**
TOTALES	$3x+4y$	$2x+6y$

Las restricciones planteadas en el problema las expresamos como inecuaciones.

"*Com a mínim, han de preparar 9 capsetes de cada tipus*" → $x\geq 9;\ y\geq 9$

"*Disposen de 120 panellets de pinyons*" → $3x+4y\leq 120$

"*Disposen de 150 panellets de coco*" → $2x+6y\leq 150$

Reunimos todas las restricciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x\geq 9;\ y\geq 9 \\ 3x+4y\leq 120 \\ 2x+6y\leq 150 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x\geq 9;\ y\geq 9 \\ 3x+4y\leq 120 \\ x+3y\leq 75 \end{array}\right\}$$

Para dibujar la región factible dibujamos primero las rectas asociadas.

$x=9$

$x=9$	y
9	9
9	22

$y=9$

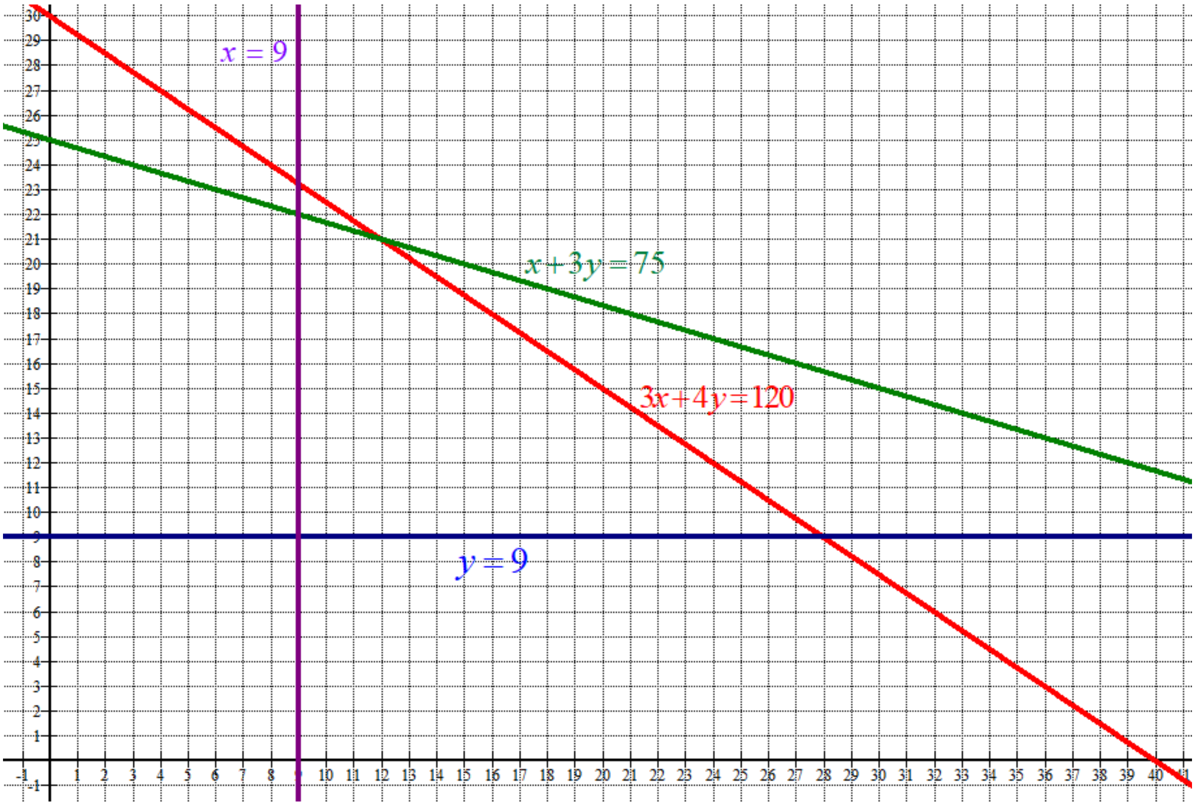
x	$y=9$
9	9
28	9

$3x+4y=120$

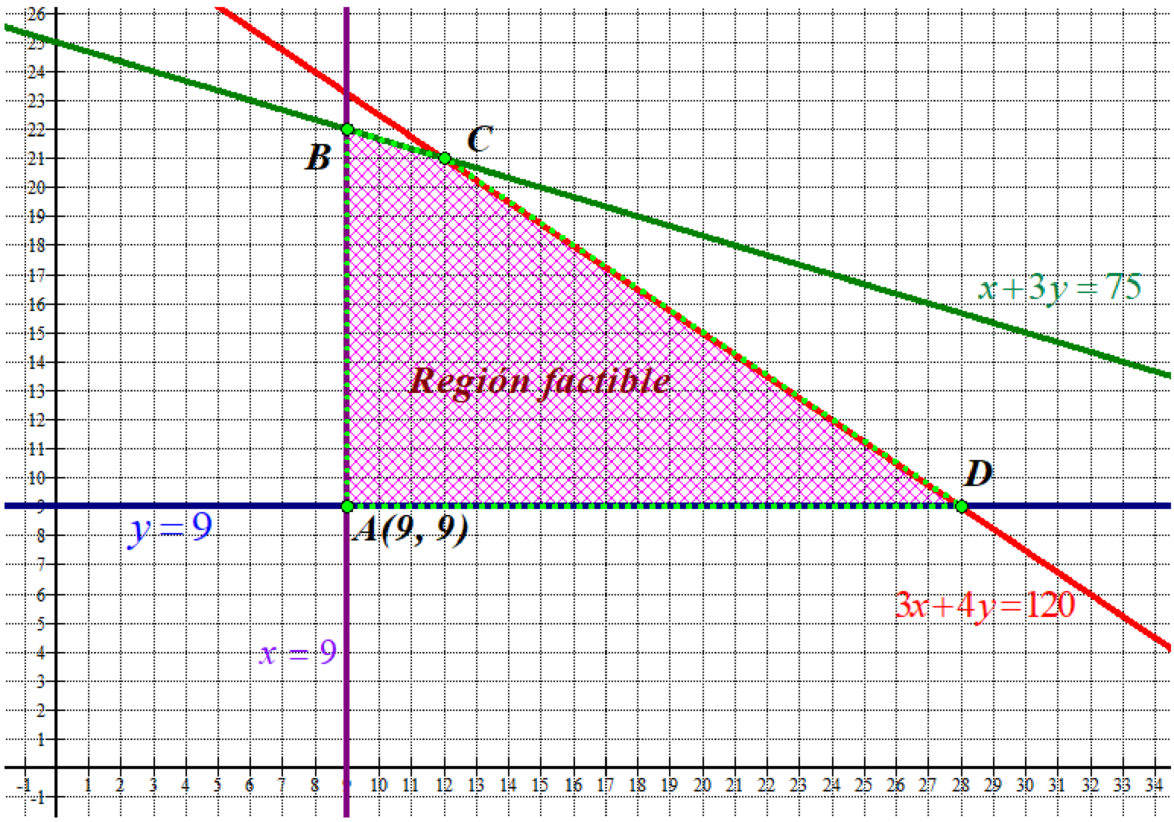
x	$y=\dfrac{120-3x}{4}$
28	9
12	21

$x+3y=75$

x	$y=\dfrac{75-x}{3}$
9	22
12	21



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x\geq 9;\ y\geq 9 \\ 3x+4y\leq 120 \\ x+3y\leq 75 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del plano situada a la derecha de la recta vertical, por encima de la recta horizontal de color azul y por debajo de las rectas roja y verde. La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo.



Las coordenadas del vértice A es fácil de determinar. Las coordenadas de los restantes vértices las determinamos resolviendo los sistemas de ecuaciones:

$$B \Rightarrow \begin{cases} x+3y=75 \\ x=9 \end{cases} \Rightarrow 9+3y=75 \Rightarrow 3y=66 \Rightarrow y=22 \Rightarrow B(9,22)$$

$$C \Rightarrow \begin{cases} x+3y=75 \\ 3x+4y=120 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x-9y=-225 \\ 3x+4y=120 \end{cases}$$

$$-5y=-105 \Rightarrow y=\frac{105}{5}=21 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+63=75 \Rightarrow x=75-63=12 \Rightarrow C(12,21)$$

$$D \Rightarrow \begin{cases} 3x+4y=120 \\ y=9 \end{cases} \Rightarrow 3x+36=120 \Rightarrow 3x=84 \Rightarrow x=\frac{84}{3}=28 \Rightarrow D(28,9)$$

b) Valoramos la función objetivo $f(x,y)=x+y$ en cada vértice de la región factible para determinar su valor máximo en la región factible.

A(9, 9) → $f(9,9)=18$
B(9, 22) → $f(9,22)=31$
C(12,21) → $f(12,21)=33$
D(28,9) → $f(28,9)=37$

El numero máximo de cajitas que se pueden hacer ajustándose a las restricciones pedidas son 37 y se consiguen con 28 del tipo 1 y 9 del tipo 2.

Rellenamos la tabla siguiente y vemos si sobran panellets.

	Nº panellets de pinyons	Nº de panellets de coco
Nº de cajitas tipo I (28)	**84**	**56**
Nº de cajitas tipo II (9)	**36**	**54**
TOTALES	**120**	**110**

Se disponen de 120 panellets de piñones y se utilizan todos.
Se disponen de 150 panellets de coco y utilizamos 110, nos sobran 40 panellets de coco.

3. En una festa familiar s'han reunit 20 persones. Si comptem el total d'homes i dones junts, observem que n'hi ha el triple que de nens. A més, sabem que, si hi hagués assistit una dona més, el nombre de dones hauria estat igual que el nombre d'homes.
a) Plantegeu un sistema d'equacions per a esbrinar quants homes, quantes dones i quants nens van assistir a la festa. [0,75 punts]
b) Resoleu el sistema de l'apartat anterior i interpreteu-ne el resultat. [1,75 punts]

a) Llamamos "x" al número de hombres, "y" al número de mujeres y "z" al número de niños.

"*En una festa familiar s'han reunit 20 persones*" → $x+y+z=20$

"*Si comptem el total d'homes i dones junts, observem que n'hi ha el triple que de nens*" → $x+y=3z$

"*Si hi hagués assistit una dona més, el nombre de dones hauria estat igual que el nombre d'homes*" → $y+1=x$

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=20 \\ x+y=3z \\ y+1=x \end{array}\right\}$$

b)

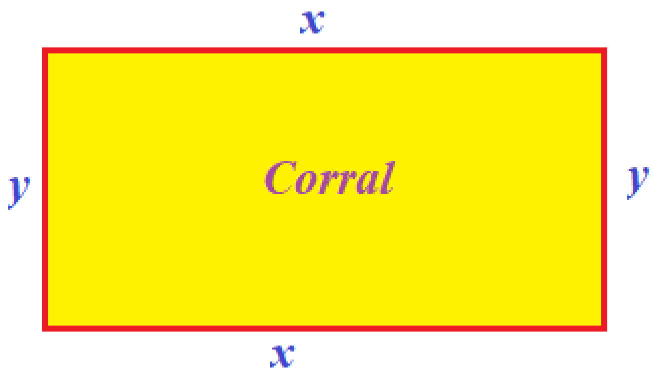
$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=20 \\ x+y=3z \\ y+1=x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (y+1)+y+z=20 \\ (y+1)+y=3z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2y+z=19 \\ 2y+1=3z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} z=19-2y \\ 2y+1=3z \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y+1=3(19-2y) \Rightarrow 2y+1=57-6y \Rightarrow 8y=56 \Rightarrow \boxed{y=\frac{56}{8}=7} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{z=19-14=5} \\ \boxed{x=7+1=8} \end{cases}$$

Acuden a la fiesta 8 hombres, 7 mujeres y 5 niños.

4. Un granger vol construir un corral rectangular per als seus conills. Sabem que només disposa de 40 m lineals de tanca metàl·lica.
a) Anomenem *x* l'amplària del corral i *y* la seva llargària. Escriviu la funció que permet calcular l'àrea del corral tenint en compte només l'amplària *x*. [1,25 punts]
b) Calculeu en quin punt assoleix el seu màxim la funció que heu trobat a l'apartat anterior. Deduïu quina ha de ser l'amplària *x* i quina la llargària *y* perquè el corral tingui l'àrea màxima. Quina serà aquesta àrea màxima? [1,25 punts]

a)



El área del corral viene dada por la expresión $A(x,y)=x\cdot y$.
Como el perímetro debe ser de 40 metros, tenemos que $2x+2y=40$.
Aplicando esto a la expresión del área del corral tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} A(x,y)=x\cdot y \\ 2x+2y=40\rightarrow x+y=20\rightarrow y=20-x \end{array}\right\}\Rightarrow A(x)=x(20-x)=20x-x^2$$

b) Derivamos la función e igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$A(x)=20x-x^2\Rightarrow A'(x)=20-2x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A'(x)=0\Rightarrow 20-2x=0\Rightarrow 2x=20\Rightarrow \boxed{x=10}$$

Sustituimos en la derivada segunda para comprobar si $x = 10$ es un máximo relativo del área del corral.

$$A'(x)=20-2x\Rightarrow A''(x)=-2\Rightarrow A''(10)=-2<0$$

En $x = 10$ la función $A(x)=20x-x^2$ presenta un máximo.
Este valor máximo es de $A(10)=200-10^2=100\ m^2$
El valor del lado "*y*" es $y = 20 - 10 = 10$ metros

El corral rectangular de área máxima con perímetro 40 metros es un corral cuadrado de lado 10. El área máxima es de 100 metros cuadrados.

5. Considereu la matriu $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Trobeu l'expressió general de $\boldsymbol{A}^n$. Demostreu que la inversa de $\boldsymbol{A}^n$ és $\begin{pmatrix}1 & -n\\0 & 1\end{pmatrix}$. [1,25 punts]

b) Trobeu la matriu ***X*** que satisfà l'equació matricial $A^{10}\cdot X-A^{20}=A$. [1,25 punts]

a)

$$A^1=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4\\0 & 1\end{pmatrix}$$

….

Observamos que en cada potencia de la matriz A los valores no cambian salvo el elemento situado en la primera fila y segunda columna. Su valor cambia en función de la potencia calculada y se cumple la regla $A^n=\begin{pmatrix}1 & n\\0 & 1\end{pmatrix}$

La matriz A^n tiene inversa pues su determinante es no nulo. $\left|A^n\right|=\begin{vmatrix}1 & n\\0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$.

Calculamos su inversa.

$$A^n=\begin{pmatrix}1 & n\\0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\left(A^n\right)^T=\begin{pmatrix}1 & 0\\n & 1\end{pmatrix}$$

$$\left(A^n\right)^{-1}=\frac{Adj\left(\left(A^n\right)^T\right)}{\left|\left(A^n\right)^T\right|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 0\\n & 1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}1 & -n\\0 & 1\end{pmatrix}$$

b) Utilizando lo obtenido en el apartado anterior sabemos que la matriz A^{10} tiene inversa y la inversa de A^{10} es $\left(A^{10}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -10\\0 & 1\end{pmatrix}$.

También sabemos que $A^{20}=\begin{pmatrix}1 & 20\\0 & 1\end{pmatrix}$

Despejamos X en la ecuación matricial.

$$A^{10}\cdot X-A^{20}=A\Rightarrow\left(A^{10}\right)^{-1}A^{10}\cdot X-\left(A^{10}\right)^{-1}\cdot A^{20}=\left(A^{10}\right)^{-1}A\Rightarrow$$

$$\Rightarrow X - \left(A^{10}\right)^{-1} \cdot A^{20} = \left(A^{10}\right)^{-1} A \Rightarrow X = \left(A^{10}\right)^{-1} \cdot A^{20} + \left(A^{10}\right)^{-1} A$$

Sustituyendo los valores de cada matriz y haciendo las operaciones tendremos la expresión de la matriz X.

$$X = \left(A^{10}\right)^{-1} \cdot A^{20} + \left(A^{10}\right)^{-1} A$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 20 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 20-10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1-10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

6. Considereu la funció real de variable real $f(x)=4x^3+ax^2-2$.

a) Determineu el valor del paràmetre real *a* per tal que la funció tingui un extrem relatiu en el punt d'abscissa *x* = –1. [1,25 punts]

b) Calculeu els intervals de creixement i decreixement de la funció *f*(*x*) quan *a* = 12. Indiqueu també els punts en què hi ha extrems relatius i classifiqueu-los. [1,25 punts]

a) Para tener un extremo relativo en *x = –1* la derivada primera debe anularse, por lo que debe ser $f'(-1)=0$.

$$f(x)=4x^3+ax^2-2 \Rightarrow f'(x)=12x^2+2ax$$

$$f'(-1)=0 \Rightarrow 12(-1)^2+2a(-1)=0 \Rightarrow 12-2a=0 \Rightarrow 2a=12 \Rightarrow \boxed{a=6}$$

Para que la función $f(x)=4x^3+ax^2-2$ tenga un extremo relativo en *x = –1* debe ser *a = 6.*

b) Siendo *a = 12* la función queda $f(x)=4x^3+12x^2-2$.

Calculamos su derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos de la función.

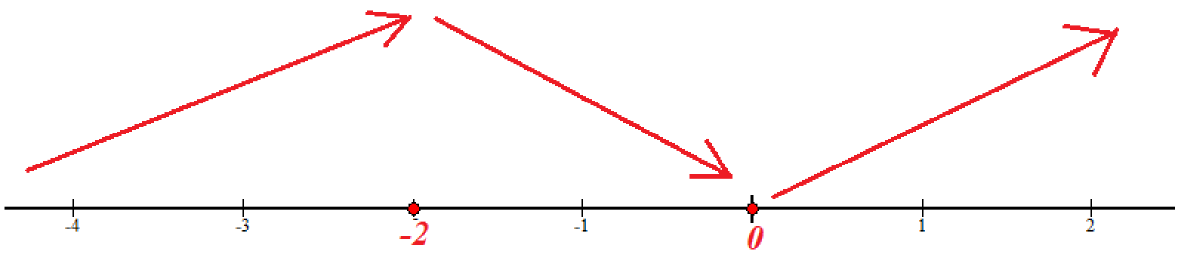
$$f(x)=4x^3+12x^2-2 \Rightarrow f'(x)=12x^2+24x$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 12x^2+24x=0 \Rightarrow 12x(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ o \\ x+2=0 \to x=-2 \end{cases}$$

Evaluamos el signo de la derivada antes, entre y después de los valores críticos obtenidos.

- En $(-\infty,-2)$ tomamos *x = –3* y la derivada vale $f'(-3)=12(-3)^2+24(-3)=36>0$. La función crece en $(-\infty,-2)$
- En $(-2,0)$ tomamos *x = –1* y la derivada vale $f'(-1)=12(-1)^2+24(-1)=-12<0$. La función decrece en $(-2,0)$
- En $(0,+\infty)$ tomamos *x = 1* y la derivada vale $f'(1)=12+24=36>0$. La función crece en $(0,+\infty)$

La función es continua y sigue el esquema siguiente:



La función crece en $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ y decrece en $(-2,0)$.

La función presenta un máximo relativo en *x = –2*. Como $f(-2)=4(-2)^3+12(-2)^2-2=14$ las coordenadas del máximo relativo son (–2, 14).

La función presenta un mínimo relativo en *x = 0*. Como $f(0)=4(0)^3+12(0)^2-2=-2$ las coordenadas del máximo relativo son (0, –2)