Universidad del País Vasco   Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA	EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
2021ko EKAINA	ORDINARIA 2021
GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKOMATEMATIKA II	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Este examen tiene ocho problemas distribuidos en cuatro bloques. De estos ocho problemas tienes que responder a cuatro, de por lo menos tres bloques diferentes.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

Está permitido el uso de calculadoras científicas **que no presenten** ninguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica
- posibilidad de transmitir datos
- programable
- resolución de ecuaciones
- operaciones con matrices
- cálculo de determinantes,
- derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

BLOQUE: ÁLGEBRA

A.1. [hasta 2.5 puntos]

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ m & n & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$

a) [0,75 puntos] Obtener los valores de los parámetros *m* y *n* para que la matriz *A* coincida con su traspuesta, y no tenga inversa.
b) [0,75 puntos] Para *m = 0* y *n = 3*, obtener, si se puede, la matriz inversa.
c) [1 punto] Para *m = 0* y *n = 3*, resolver la ecuación matricial:

$$X\cdot A+2I_3=A^2$$

B.1. [hasta 2.5 puntos]

Una empresa produce dos tipos de camisas con perlas blancas, grises y rosas. Para hacer una camisa del tipo A hacen falta 20 perlas blancas, 20 grises y 30 rosas, mientras que para una camisa del tipo B se necesitan 10 perlas blancas, 20 grises y 60 rosas.
La empresa dispone de un máximo de 900 perlas blancas y 1400 grises, y decide utilizar al menos 1800 perlas rosas.
Se sabe que el beneficio que se obtiene por cada camisa del tipo A es de 60 euros, y por cada camisa del tipo B de 50 euros.

a) [2 puntos] Calcula cuántas unidades de cada tipo de camisa debe producir para obtener el máximo beneficio, así como el valor de dicho beneficio.
b) [0,5 puntos] ¿Es posible que la empresa fabrique 40 camisas del tipo A y 20 del tipo B? Razona la respuesta.

BLOQUE: ANÁLISIS

A.2. [hasta 2,5 puntos]

Sea la función:

$$f(x)=\begin{cases}x^3+3x^2 & si \quad x<1\\ ax+\dfrac{2}{x} & si \quad x\geq 1\end{cases}$$

a) [0,5 puntos] Determina el valor del parámetro *a* para que la función *f(x)* sea continua en el punto *x = 1*.
b) [0,4 puntos] En el caso $a=\dfrac{1}{2}$, determina la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa *x = 2*.
c) [1 punto] En el caso *a = 2*, realiza la representación gráfica de la función; para ello, calcula los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión cuando *x < 1*.
d) [0,6 puntos] Calcula:

$$\int\left(x^3+3x^2+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)dx$$

B.2. [hasta 2,5 puntos]

Se considera la función $f(x)=ax^3+bx+11$.

a) [1 punto] Calcula el valor de los parámetros *a* y *b* para que la función *f(x)* tenga un extremo relativo en el punto (2, 5).
b) [0,75 puntos] En el caso $a=\dfrac{3}{8}$ y $b=\dfrac{-9}{2}$, estudia los extremos relativos y los puntos de

inflexión de la función.

c) [0,75 puntos] En el caso $a = \frac{3}{8}$ y $b = \frac{-9}{2}$, representa y calcula el área de la región limitada por la función, el eje de abscisas OX y las rectas $x = -2$ y $x = 2$.

BLOQUE: PROBABILIDAD

A.3. [hasta 2,5 puntos]

Dos cajas, A y B, contienen bolas de colores con la siguiente composición:

A: 5 blancas, 3 negras y 2 rojas B: 4 blancas y 6 negras

Por otro lado, tenemos un dado que tiene 4 caras marcadas con la letra A y las otras dos con la letra B. Tiramos el dado, y sacamos una bola al azar de la caja que indica el dado.

a) [1 punto] ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea blanca?
b) [0,5 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea roja?
c) [1 punto] La bola extraída ha resultado ser blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la caja B?

B.3. [hasta 2,5 puntos]

Sean A, B, C, D, E y F sucesos de un determinado experimento aleatorio.

a) [0,75 puntos] Sabemos que $P(A) = 0,5$; $P(A \cup B) = 0,7$ y $P(A \cap B) = 0,4$. Halla la probabilidad de que ocurra B.
b) [1 punto] Sabemos que $P(C) = 0,4$; $P(D) = 0,3$ y $P(C \cup D) = 0,5$. Halla la probabilidad de que ocurra C sabiendo que no ocurre D.
c) [0,75 puntos] Sabemos que $P(E) = 0,6$; $P(F) = 0,8$ y que los sucesos E y F son independientes. Calcula la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos.

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA

A.4. [hasta 2,5 puntos]

En un test de empatía el 40 % de la población examinada obtuvo un resultado inferior a 4 puntos. Sabemos que el resultado del test sigue una distribución normal de media 4,8 puntos.

a) [0,75 puntos] Calcula la desviación típica de la distribución.
b) [0,75 puntos] Si la desviación típica es 3,14 puntos, ¿qué puntuación es superada únicamente por el 35 % de la población?
c) [1 punto] Si la desviación típica es 3,14 puntos, ¿qué porcentaje de la población tiene un resultado que se diferencia de la media en menos de 2 puntos?

B.4. [hasta 2,5 puntos]

El gasto que realizan los jóvenes de una determinada ciudad durante un fin de semana es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 6 euros.

a) [1,5 puntos] Se toma una muestra aleatoria simple, y se obtiene que el intervalo de confianza para la media es (24,47, 26,43) con un nivel de confianza del 95 %. Calcula el valor de la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.
b) [1 punto] Se ha seleccionado otra muestra de tamaño 49 para estimar μ. Calcula el error máximo admisible cometido para dicha estimación con un nivel de confianza del 97 %.

Soluciones

BLOQUE: ÁLGEBRA

A.1. [hasta 2.5 puntos]

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) [0,75 puntos] Obtener los valores de los parámetros *m* y *n* para que la matriz *A* coincida con su traspuesta, y no tenga inversa.

b) [0,75 puntos] Para *m = 0* y *n = 3*, obtener, si se puede, la matriz inversa.

c) [1 punto] Para *m = 0* y *n = 3*, resolver la ecuación matricial:

$$X \cdot A + 2I_3 = A^2$$

a)

Debe ser A = A^T.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ -1 & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A=A^T \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ m & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ -1 & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1=1 \\ -1=m \\ 1=1 \\ m=-1 \\ n=n \\ 1=1 \\ 1=1 \\ 1=1 \\ 2=2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{m=-1}$$

Para que no tenga inversa debe tener determinante nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & n & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2n-1-1-n-2-1=n-5$$

$$|A|=0 \Rightarrow n-5=0 \Rightarrow \boxed{n=5}$$

Para cumplir las dos condiciones impuestas a la matriz A debe ser *m = –1* y *n = 5*.

b) Para $m = 0$ y $n = 3$ la matriz A queda $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=6-1-3-1=1\neq 0.$$ Existe la inversa de A.

$$\mathrm{A}^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

c) Para $m = 0$ y $n = 3$ la matriz A queda $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y tiene inversa, calculada en el apartado anterior $\mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Despejamos X en la ecuación matricial.

$$X\cdot A+2I_3=A^2\Rightarrow X\cdot A\cdot A^{-1}+2I_3\cdot A^{-1}=A^2\cdot A^{-1}\Rightarrow X\cdot I_3+2A^{-1}=A\cdot A\cdot A^{-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow X+2A^{-1}=A\cdot I_3\Rightarrow X+2A^{-1}=A\Rightarrow \boxed{X=A-2A^{-1}}$$

Sustituimos los valores de A y A^{-1} y obtenemos la expresión de X.

$$X=A-2A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 10 & 6 & -8 \\ 2 & 2 & -2 \\ -6 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix} -9 & -7 & 9 \\ -2 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & -4 \end{pmatrix}}$$

B.1. [hasta 2.5 puntos]
Una empresa produce dos tipos de camisas con perlas blancas, grises y rosas. Para hacer una camisa del tipo A hacen falta 20 perlas blancas, 20 grises y 30 rosas, mientras que para una camisa del tipo B se necesitan 10 perlas blancas, 20 grises y 60 rosas.
La empresa dispone de un máximo de 900 perlas blancas y 1400 grises, y decide utilizar al menos 1800 perlas rosas.
Se sabe que el beneficio que se obtiene por cada camisa del tipo A es de 60 euros, y por cada camisa del tipo B de 50 euros.
a) [2 puntos] Calcula cuántas unidades de cada tipo de camisa debe producir para obtener el máximo beneficio, así como el valor de dicho beneficio.
b) [0,5 puntos] ¿Es posible que la empresa fabrique 40 camisas del tipo A y 20 del tipo B? Razona la respuesta.

a) Llamamos "x" a las unidades de camisas de tipo A que debe producir e "y" a las unidades de camisa tipo B.
Hacemos una tabla con los datos del ejercicio.

	Perlas blancas	Perlas grises	Perlas rosas	Beneficio
Nº de camisas A (x)	20x	20x	30x	60x
Nº de camisas B (y)	10y	20y	60y	50y
TOTALES	$20x+10y$	$20x+20y$	$30x+60y$	$60x+50y$

La función a maximizar es el beneficio $B(x,y)=60x+50y$.

Las restricciones del problema que definen la región factible son:

"*La empresa dispone de un máximo de 900 perlas blancas y 1400 grises*" → $20x+10y\le 900$; $20x+20y\le 1400$

"La empresa decide utilizar al menos 1800 perlas rosas" → $30x+60y\ge 1800$

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Reunimos las inecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l}20x+10y\le 900\\20x+20y\le 1400\\30x+60y\ge 1800\\x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2x+y\le 90\\x+y\le 70\\x+2y\ge 60\\x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones.

$2x+y=90$

x	$y=90-2x$
20	50
40	10

$x+y=70$

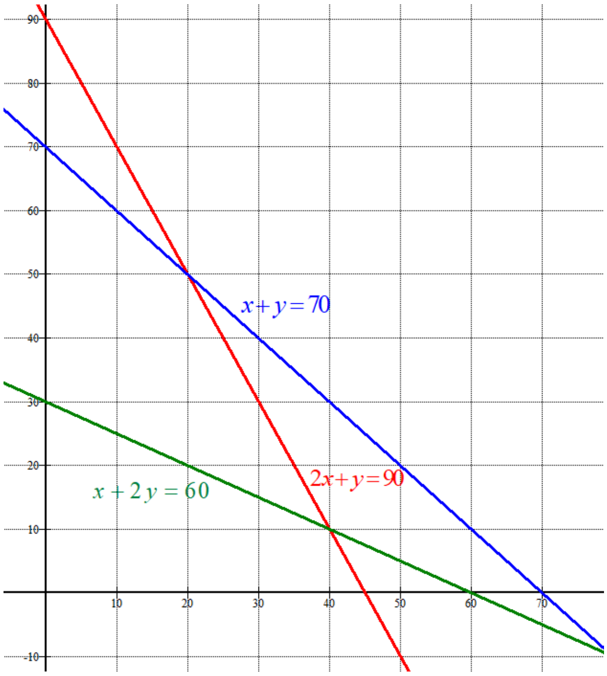
x	$y=70-x$
20	50
50	20

$x+2y=60$

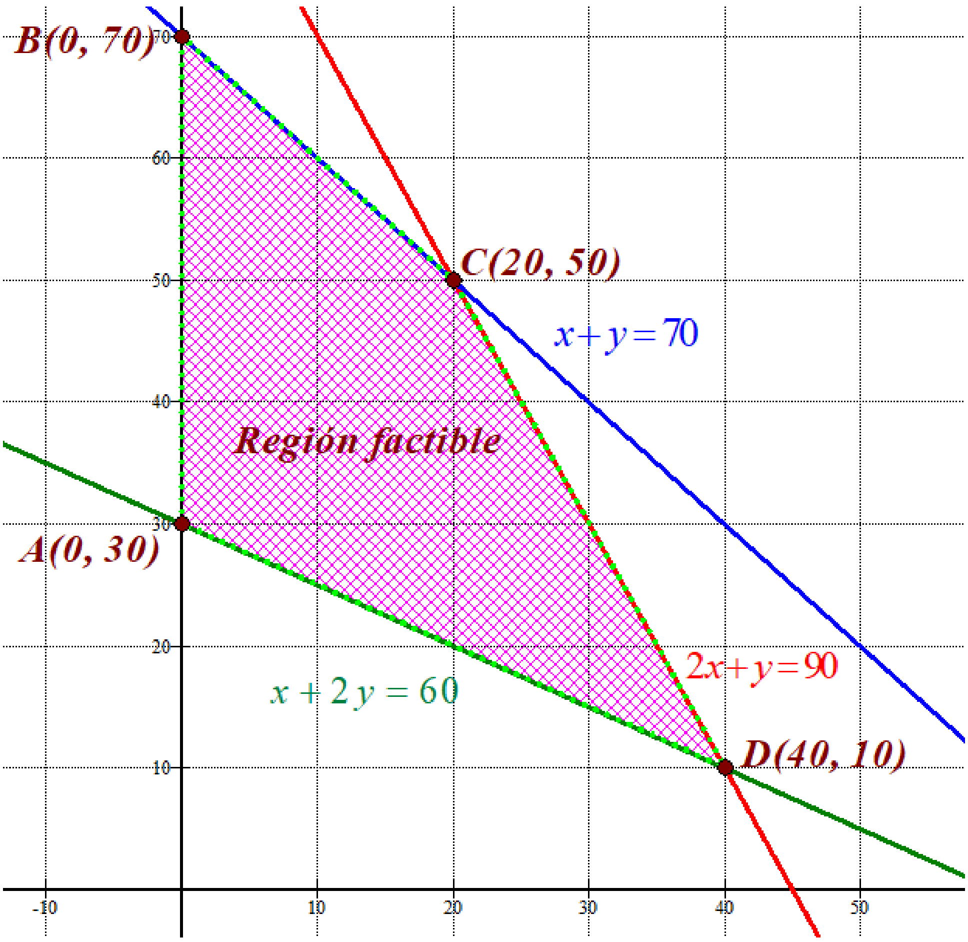
x	$y=\frac{60-x}{2}$
0	30
40	10

$x\ge 0;\ y\ge 0$

Primer cuadrante



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 2x+y\le 90 \\ x+y\le 70 \\ x+2y\ge 60 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas azul y roja y por encima de la recta verde. La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo.



Valoramos la función beneficio $B(x,y)=60x+50y$ en cada uno de los vértices de la región factible en busca del valor máximo.

A(0, 30) → $B(0,30)=1500$ €

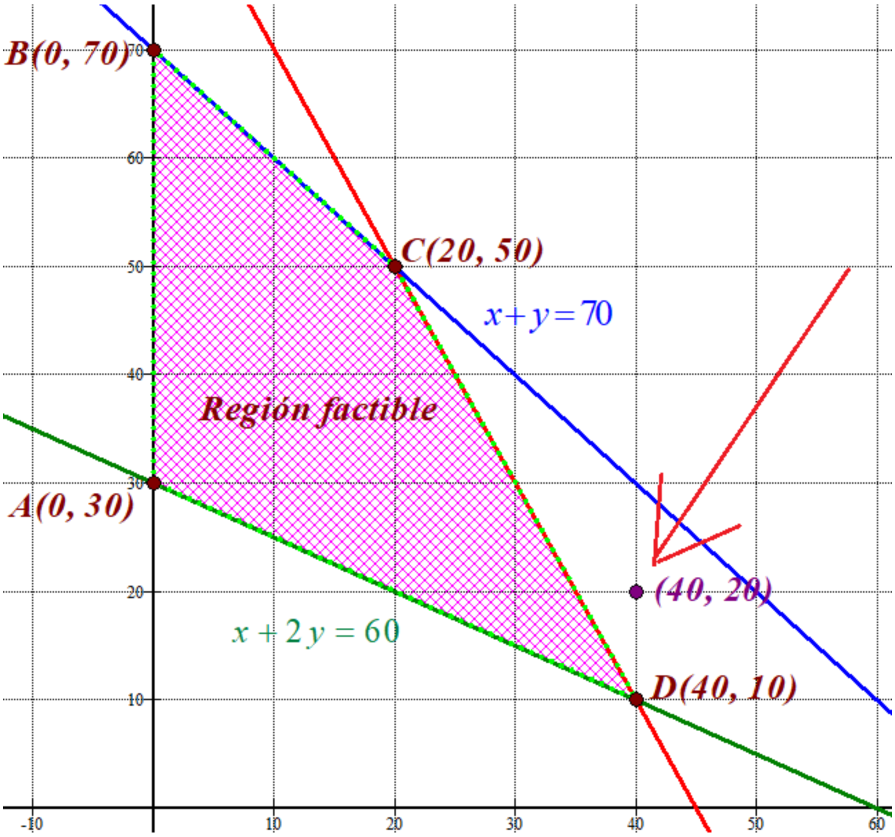
B(0, 70) → $B(0,70)=3500$ €

C(20, 50) → $B(20,50)=1200+2500=3700$ €

D(40, 10) → $B(40,10)=2400+500=2900$ €

El máximo beneficio que se puede obtener en la región factible es 3700 € y se obtiene en el punto C(20, 50), es decir, el máximo beneficio se obtiene fabricando 20 camisas del tipo A y 50 del tipo B.

b) Fabricar 40 camisas del tipo A y 20 del tipo B viene reflejado en el punto (40, 20). Este punto está fuera de la región factible y por tanto no cumple todas las restricciones pedidas en el ejercicio.



BLOQUE: ANÁLISIS

A.2. [hasta 2,5 puntos]
Sea la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^3+3x^2 & si \quad x<1 \\ ax+\dfrac{2}{x} & si \quad x\geq 1\end{cases}$$

a) [0,5 puntos] Determina el valor del parámetro *a* para que la función *f(x)* sea continua en el punto *x = 1*.

b) [0,4 puntos] En el caso $a=\frac{1}{2}$, determina la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa *x = 2*.

c) [1 punto] En el caso *a = 2*, realiza la representación gráfica de la función; para ello, calcula los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión cuando *x < 1*.

d) [0,6 puntos] Calcula:

$$\int\left(x^3+3x^2+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)dx$$

a) Para que la función sea continua en *x = 1* debe cumplirse:

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=a+\dfrac{2}{1}=a+2 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^3+3x^2=1^3+3=4 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} ax+\dfrac{2}{x}=a+2 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)\end{array}\right\}\Rightarrow a+2=4\Rightarrow \boxed{a=2}$$

b) Para $a=\frac{1}{2}$ la función queda $f(x)=\begin{cases} x^3+3x^2 & si \quad x<1 \\ \frac{1}{2}x+\frac{2}{x} & si \quad x\geq 1\end{cases}$ y en el entorno de *x = 2* la función es $f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{2}{x}$.

La ecuación de la recta tangente en *x = 2* es $y-f(2)=f'(2)(x-2)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=\dfrac{1}{2}2+\dfrac{2}{2}=2 \\ f(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{2}{x}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{x^2}\Rightarrow f'(2)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{2^2}=0 \\ y-f(2)=f'(2)(x-2)\end{array}\right\}\Rightarrow y-2=0(x-2)\Rightarrow \boxed{y=2}$$

c) Para $a=2$ la función queda $f(x)=\begin{cases} x^3+3x^2 & si \quad x<1 \\ 2x+\frac{2}{x} & si \quad x\geq 1\end{cases}$.

En *x < 1* la derivada es $f(x)=x^3+3x^2\Rightarrow f'(x)=3x^2+6x$

Igualamos a cero la derivada cuando *x < 1* en busca de los puntos críticos.

$$En\ x<1 \to f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2+6x=0 \Rightarrow 3x(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases}$$

Vemos que ocurre en $x = -2$ y en $x = 0$.

$$f'(x)=3x^2+6x \qquad si \quad x<1 \Rightarrow f''(x)=6x+6 \Rightarrow \begin{cases} f''(-2)=-12+6=-6<0 \\ f''(0)=0+6=6>0 \end{cases}$$

La función presenta un máximo relativo en $x = -2$ y un mínimo relativo en $x = 0$.

Igualamos a cero la segunda derivada en busca de los puntos de inflexión.

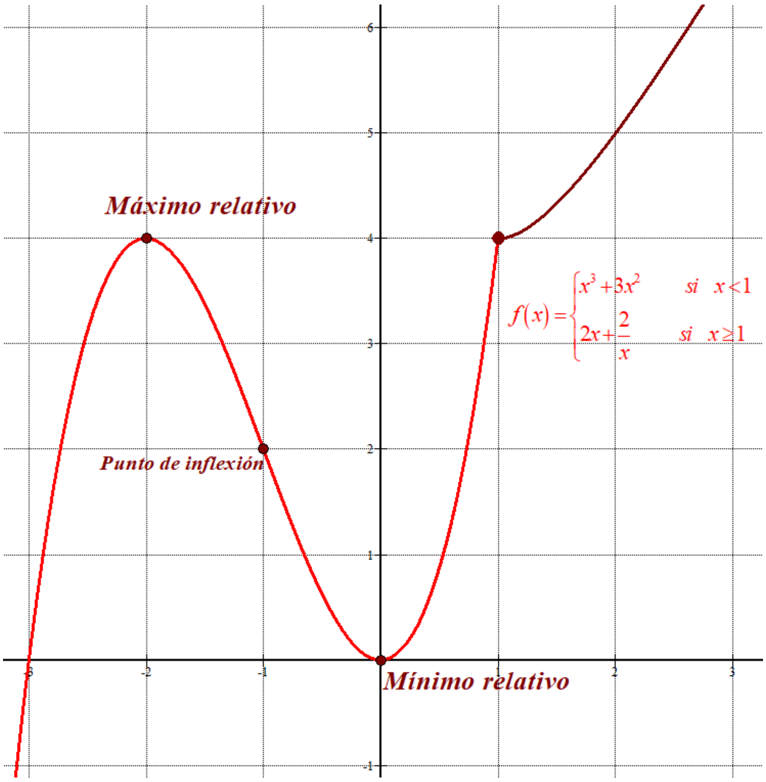
$$si \quad x<1 \Rightarrow f''(x)=6x+6$$
$$f''(x)=0 \Rightarrow 6x+6=0 \Rightarrow x=-1$$
$$f'''(x)=6 \Rightarrow f'''(-1)=6\neq 0$$

La función presenta un punto de inflexión en $x = -1$.

Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

$x<1$	$y=x^3+3x^2$
-3	0
-2	4
-1	2
0	0
1	4 No incluido

$x\geq 1$	$y=2x+\frac{2}{x}$
1	4
2	5
4	8.5



d)

$$\int\left(x^3+3x^2+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)dx=\int x^3dx+3\int x^2dx+2\int\frac{1}{x}dx-4\int\frac{1}{x^2}dx=$$

$$=\frac{x^4}{4}+3\frac{x^3}{3}+2\ln|x|-4\int x^{-2}dx=\frac{x^4}{4}+x^3+2\ln|x|-4\frac{x^{-1}}{-1}=\boxed{\frac{x^4}{4}+x^3+2\ln|x|+4\frac{1}{x}+K}$$

B.2. [hasta 2,5 puntos]
Se considera la función $f(x)=ax^3+bx+11$.

a) [1 punto] Calcula el valor de los parámetros *a* y *b* para que la función *f(x)* tenga un extremo relativo en el punto (2, 5).

b) [0,75 puntos] En el caso $a=\frac{3}{8}$ y $b=\frac{-9}{2}$, estudia los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función.

c) [0,75 puntos] En el caso $a=\frac{3}{8}$ y $b=\frac{-9}{2}$, representa y calcula el área de la región limitada por la función, el eje de abscisas OX y las rectas *x = –2* y *x = 2*.

a) La función pasa por el punto (2, 5) por lo que *f(2) = 5*.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=ax^3+bx+11 \\ f(2)=5 \end{array}\right\} \Rightarrow a\cdot 2^3+2b+11=5 \Rightarrow \boxed{8a+2b=-6}$$

Además la función presenta un extremo relativo en (2, 5), por lo que la derivada primera se anula para *x = 2* → *f ´(2) = 0*.

$$f(x)=ax^3+bx+11 \Rightarrow f'(x)=3ax^2+b$$

$$f'(2)=0 \Rightarrow 3a\cdot 2^2+b=0 \Rightarrow \boxed{12a+b=0}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} 8a+2b=-6 \\ 12a+b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4a+b=-3 \\ b=-12a \end{array}\right\} \Rightarrow 4a-12a=-3 \Rightarrow -8a=-3 \Rightarrow \boxed{a=\frac{3}{8}} \Rightarrow \boxed{b=-12\frac{3}{8}=-\frac{9}{2}}$$

b) Para $a=\frac{3}{8}$ y $b=\frac{-9}{2}$ la función queda $f(x)=\frac{3}{8}x^3-\frac{9}{2}x+11$.
Calculamos su derivada y la igualamos a cero.

$$f(x)=\frac{3}{8}x^3-\frac{9}{2}x+11 \Rightarrow f'(x)=\frac{9}{8}x^2-\frac{9}{2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{9}{8}x^2-\frac{9}{2}=0 \Rightarrow 9x^2-36=0 \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2$$

Tenemos dos puntos críticos: *x = –2* y *x = 2*.
Sustituimos sus valores en la segunda derivada y vemos que tipo de extremo son.

$$f'(x)=\frac{9}{8}x^2-\frac{9}{2} \Rightarrow f''(x)=\frac{18}{8}x=\frac{9}{4}x \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f''(-2)=\frac{9}{4}(-2)=-\frac{9}{2}<0 \\ f''(x)=\frac{9}{4}(2)=\frac{9}{2}>0 \end{array}\right.$$

La función presenta un máximo relativo en $x = -2$ y un mínimo relativo en $x = 2$.

Como $f(-2)=17$ y $f(2)=5$ el máximo tiene coordenadas (–2, 17) y el mínimo (2, 5).

Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos de inflexión.

$$f'(x)=\frac{9}{8}x^2-\frac{9}{2} \Rightarrow f''(x)=\frac{18}{8}x=\frac{9}{4}x$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow \frac{9}{4}x=0 \Rightarrow x=0$$

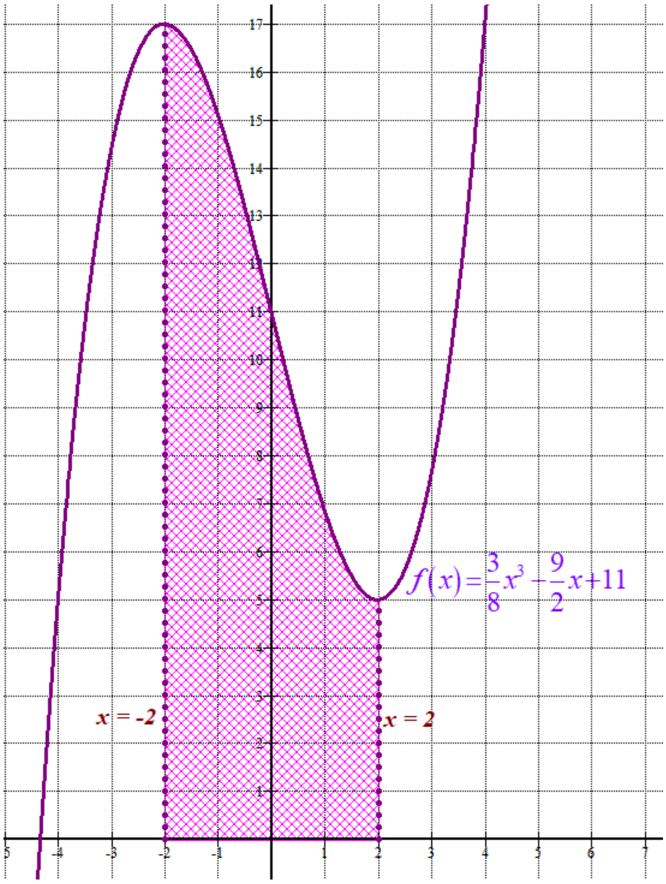
Como $f'''(x)=\frac{9}{4} \to f'''(0)=\frac{9}{4}\neq 0$ la función presenta un punto de inflexión en $x = 0$.

Como $f(0)=11$ el punto de inflexión tiene coordenadas (0, 11)

c) Para $a=\frac{3}{8}$ y $b=\frac{-9}{2}$ la función queda $f(x)=\frac{3}{8}x^3-\frac{9}{2}x+11$.

Hacemos una tabla de valores y representamos la función en el intervalo (–2, 2).

x	$y=\frac{3}{8}x^3-\frac{9}{2}x+11$
–2	17 *Máximo*
–1	15.125
0	11 Punto de inflexión
1	6.875
2	5 *Mínimo*



Como se observa en el dibujo el área es grande, del orden de 44 unidades cuadradas. Hallamos su valor exacto usando el cálculo integral.

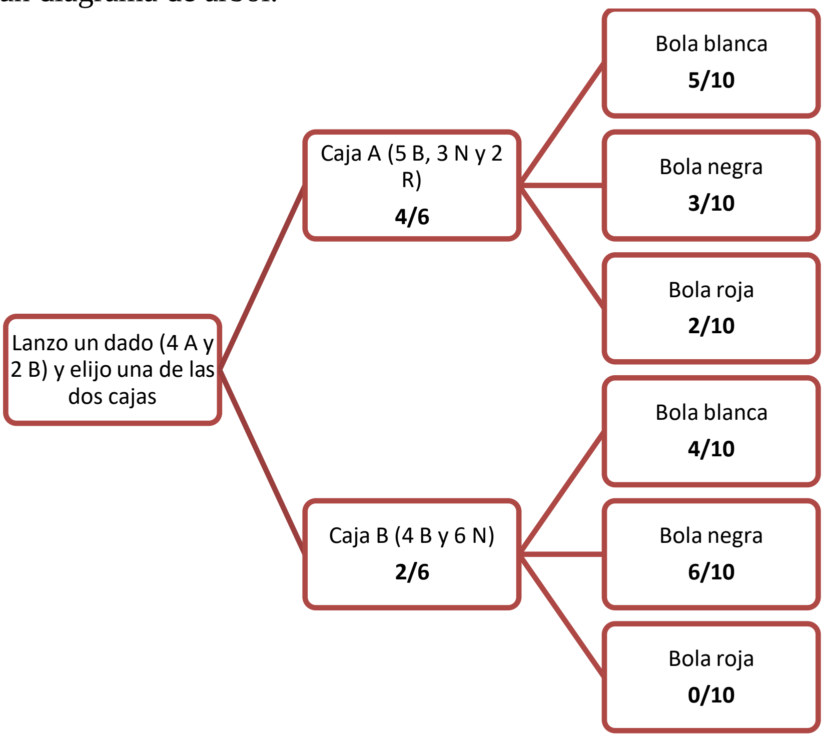
$$\int_{-2}^{2} f(x)dx=\int_{-2}^{2}\frac{3}{8}x^3-\frac{9}{2}x+11dx=\left[\frac{3}{8}\frac{x^4}{4}-\frac{9}{2}\frac{x^2}{2}+11x\right]_{-2}^{2}=\left[\frac{3}{32}x^4-\frac{9}{4}x^2+11x\right]_{-2}^{2}=$$

$$=\left[\frac{3}{32}2^4-\frac{9}{4}2^2+11\cdot 2\right]-\left[\frac{3}{32}(-2)^4-\frac{9}{4}(-2)^2+11(-2)\right]=\frac{3}{2}-9+22-\frac{3}{2}+9+22=\boxed{44\,u^2}$$

BLOQUE: PROBABILIDAD

A.3. [hasta 2,5 puntos]
Dos cajas, A y B, contienen bolas de colores con la siguiente composición:
A: 5 blancas, 3 negras y 2 rojas B: 4 blancas y 6 negras
Por otro lado, tenemos un dado que tiene 4 caras marcadas con la letra A y las otras dos con la letra B. Tiramos el dado, y sacamos una bola al azar de la caja que indica el dado.
a) [1 punto] ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea blanca?
b) [0,5 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea roja?
c) [1 punto] La bola extraída ha resultado ser blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la caja B?

Realizamos un diagrama de árbol.



Llamamos A = Salga A al lanzar el dado, B = Salga B al lanzar el dado.
BB = Sacar bola blanca, BN = Sacar bola negra y BR = Sacar bola roja.

a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(BB)=P(A)P(BB/A)+P(B)P(BB/B)=\frac{4}{6}\cdot\frac{5}{10}+\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{10}=\frac{28}{60}=\boxed{\frac{7}{15}\approx 0.4667}$$

b) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(BR)=P(A)P(BR/A)+P(B)P(BR/B)=\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{10}+\frac{2}{6}\cdot\frac{0}{10}=\frac{8}{60}=\boxed{\frac{2}{15}\approx 0.1333}$$

c) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/BB)=\frac{P(B\cap BB)}{P(BB)}=\frac{P(B)P(BB/B)}{P(BB)}=\frac{\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{10}}{\frac{7}{15}}=\boxed{\frac{2}{7}\approx 0.2857}$$

B.3. [hasta 2,5 puntos]
Sean A, B, C, D, E y F sucesos de un determinado experimento aleatorio.
a) [0,75 puntos] Sabemos que $P(A)=0,5$; $P(A\cup B)=0,7$ y $P(A\cap B)=0,4$. Halla la probabilidad de que ocurra B.
b) [1 punto] Sabemos que $P(C)=0,4$; $P(D)=0,3$ y $P(C\cup D)=0,5$. Halla la probabilidad de que ocurra C sabiendo que no ocurre D.
c) [0,75 puntos] Sabemos que $P(E)=0,6$; $P(F)=0,8$ y que los sucesos E y F son independientes. Calcula la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos.

a) Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$0.7=0.5+P(B)-0.4$$

$$\boxed{P(B)=0.7-0.5+0.4=0.6}$$

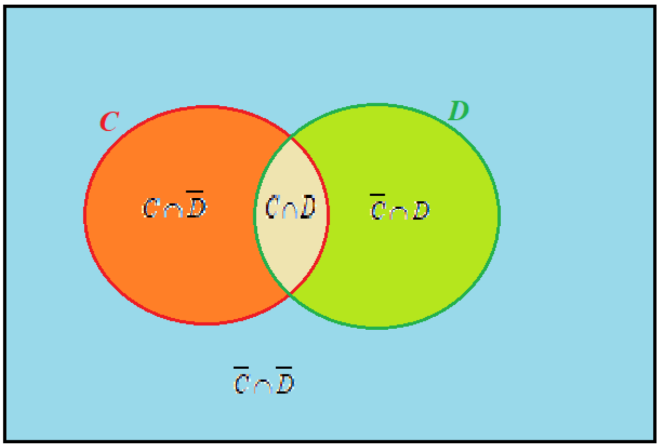
b) Hallamos la probabilidad de la intersección con la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(C\cup D)=P(C)+P(D)-P(C\cap D)$$

$$0.5=0.4+0.3-P(C\cap D)$$

$$P(C\cap D)=0.4+0.3-0.5=0.2$$

Nos piden calcular $P(C/\overline{D})=\dfrac{P(C\cap\overline{D})}{P(\overline{D})}=\dfrac{P(C)-P(C\cap D)}{1-P(D)}=\dfrac{0.4-0.2}{1-0.3}=\boxed{\dfrac{2}{7}\approx 0.2857}$



$\rightarrow P(C\cap\overline{D})=P(C)-P(C\cap D)$

c) Si los sucesos E y F son independientes entonces $P(E\cap F)=P(E)P(F)=0.6\cdot 0.8=0.48$.

Nos piden calcular $P\left(\overline{E}\cap\overline{F}\right)$.

$$P\left(\overline{E}\cap\overline{F}\right)=P\left(\overline{E\cup F}\right)=1-P\left(E\cup F\right)=1-\left[P\left(E\right)+P\left(F\right)-P\left(E\cap F\right)\right]=$$

$$=1-\left[0.6+0.8-0.48\right]=\boxed{0.08}$$

OTRA FORMA

Con la tabla de contingencia.

	F	$\overline{F}$	
E	$E\cap F$ → **48**	$E\cap\overline{F}$	**60**
$\overline{E}$	$\overline{E}\cap F$	$\overline{E}\cap\overline{F}$	
	80		**100**

La completamos.

	F	$\overline{F}$	
E	$E\cap F$ → **48**	$E\cap\overline{F}$ → **12**	**60**
$\overline{E}$	$\overline{E}\cap F$ → **32**	$\overline{E}\cap\overline{F}$ → **8**	**40**
	80	**20**	**100**

Como nos piden $P\left(\overline{E}\cap\overline{F}\right)$ miramos los datos de la tabla y tenemos que:

$$\boxed{P\left(\overline{E}\cap\overline{F}\right)=\frac{8}{100}=0.08}$$

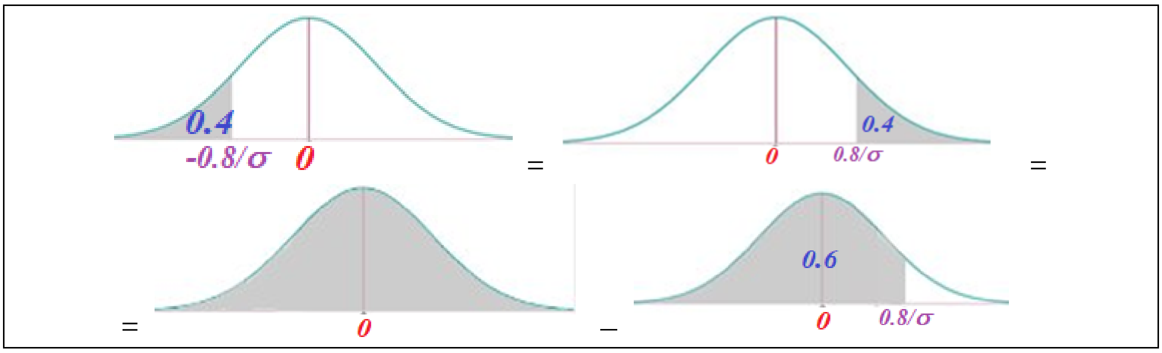
BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA

A.4. [hasta 2,5 puntos]
En un test de empatía el 40 % de la población examinada obtuvo un resultado inferior a 4 puntos. Sabemos que el resultado del test sigue una distribución normal de media 4,8 puntos.
a) [0,75 puntos] Calcula la desviación típica de la distribución.
b) [0,75 puntos] Si la desviación típica es 3,14 puntos, ¿qué puntuación es superada únicamente por el 35 % de la población?
c) [1 punto] Si la desviación típica es 3,14 puntos, ¿qué porcentaje de la población tiene un resultado que se diferencia de la media en menos de 2 puntos?

X = Puntos obtenidos en el test de empatía.
X= N(4.8, σ)

a)

$$P(X \le 4) = 0.4 \Rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{4-4.8}{\sigma}\right) = 0.4 \Rightarrow P\left(Z \le -\frac{0.8}{\sigma}\right) = 0.4 \Rightarrow \ldots$$



$$\ldots \Rightarrow 1 - P\left(Z \le \frac{0.8}{\sigma}\right) = 0.4 \Rightarrow P\left(Z \le \frac{0.8}{\sigma}\right) = 0.6 \Rightarrow \{\text{Buscamos en la tabla de N(0,1)}\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{0.8}{\sigma} = \frac{0.25+0.26}{2} \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{0.8}{0.255} = 3{,}137}$$

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	[illegible]	[illegible]	0'5279	0'5319	0'5359
[illegible]	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	[illegible]	[illegible]	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879

b) X = Puntos obtenidos en el test de empatía.
X= N(4.8, 3.14)

$$P(X > a) = 0.35 \Rightarrow P(X \le a) = 0.65 \Rightarrow P\left(Z \le \frac{a-4.8}{3.14}\right) = 0.65 \Rightarrow$$

$$\text{Buscamos en la tabla de la N}(0,1) \Rightarrow \frac{a-4.8}{3.14} = \frac{0.38+0.39}{2} \Rightarrow \boxed{a = 0.385 \cdot 3.14 + 4.8 = 6}$$

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	[illegible]	[illegible]
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	[illegible]	[illegible]
[illegible]	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	[illegible]	[illegible]
0'3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0'6480	0'6517
[illegible]	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224

Solo el 35 % de la población consigue una puntuación superior a 6 puntos.

c) X = Puntos obtenidos en el test de empatía.
X= N(4.8, 3.14)

$$P(4.8-2 \le X \le 4.8+2) = P(2.8 \le X \le 6.8) = P(X \le 6.8) - P(X \le 2.8) =$$

$$= \{Tipificamos\} = P\left(Z \le \frac{6.8-4.8}{3.14}\right) - P\left(Z \le \frac{2.8-4,8}{3.14}\right) = P(Z \le 0.64) - P(Z \le -0.64) =$$

$$= P(Z \le 0.64) - P(Z \ge 0.64) = P(Z \le 0.64) - \left[1 - P(Z \le 0.64)\right] =$$

$$= 0.7389 - [1 - 0.7389] = \boxed{0.4778}$$

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	[illegible]	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	[illegible]	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	[illegible]	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	[illegible]	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	[illegible]	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	[illegible]	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0'7389	[illegible]	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
[illegible]	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	[illegible]	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133

El 47.78 % de la población tiene un resultado que se diferencia de la media en menos de 2 puntos.

B.4. [hasta 2,5 puntos]
El gasto que realizan los jóvenes de una determinada ciudad durante un fin de semana es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media μ desconocida y desviación típica 6 euros.

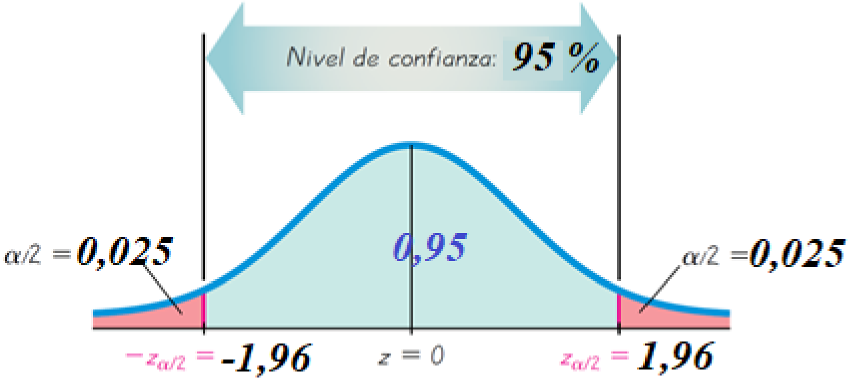
a) [1,5 puntos] Se toma una muestra aleatoria simple, y se obtiene que el intervalo de confianza para la media es (24,47, 26,43) con un nivel de confianza del 95 %. Calcula el valor de la media muestral y el tamaño de la muestra elegida.
b) [1 punto] Se ha seleccionado otra muestra de tamaño 49 para estimar μ. Calcula el error máximo admisible cometido para dicha estimación con un nivel de confianza del 97 %.

X = El gasto que realizan los jóvenes de una determinada ciudad durante un fin de semana.
X = N(μ, 6)

a) La media muestral es el valor central del intervalo de confianza.

$$\text{Media muesral} = \bar{x} = \frac{26,43+24,47}{2} = 25,45 \; euros$$

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 95% el $z_{\alpha/2}$.



1 – ∝ = 0,95 → ∝ = 0,05 →∝/2 = 0'025 →1 – ∝/2 = 0,975 → $z_{\alpha/2}$ **= 1,96**

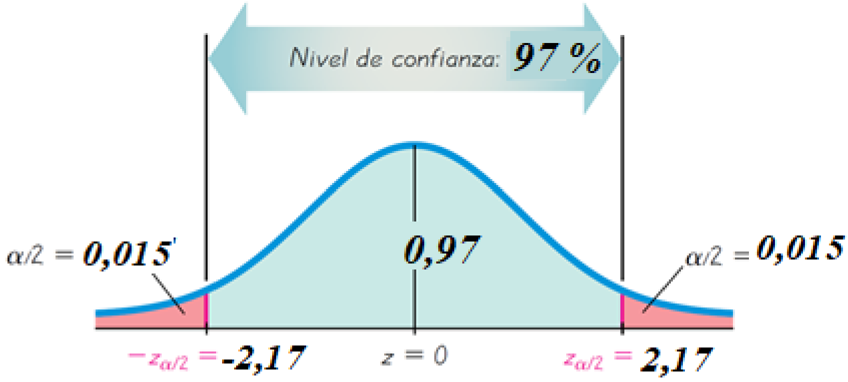
El error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza $Error = \frac{26,43-24,47}{2} = 0,98$.
Utilizando la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow Error = 1,96 \cdot \frac{6}{\sqrt{n}} = 0,98 \Rightarrow 1,96 \cdot 6 = 0,98 \cdot \sqrt{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1,96 \cdot 6}{0,98} = 12 \Rightarrow \boxed{n = 144}$$

El tamaño de la muestra es de 144 jóvenes y la media muestral es 25,45 €.

b) Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 97% el $z_{\alpha/2}$.



$1 - \propto = 0{,}97 \rightarrow \propto = 0{,}03 \rightarrow \propto/2 = 0'015 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2{,}17}$

Utilizando la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}17 \cdot \frac{6}{\sqrt{49}} = 1{,}86\ €$$

El error máximo es de 1,86 euros.