Universidad de Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2020-2021

MATEMÁTICAS II

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.
TIEMPO Y CALIFICACIÓN: 90 minutos. Cada ejercicio se calificará sobre 2,5 puntos.
El estudiante deberá indicar la agrupación de preguntas que responderá. La selección de preguntas deberá realizarse conforme a las instrucciones planteadas, no siendo válido seleccionar preguntas que sumen más de 10 puntos, ni agrupaciones de preguntas que no coincidan con las indicadas, lo que puede conllevar la anulación de alguna pregunta que se salga de las instrucciones.

Bloque 1.A. Un operador turístico vende a las agencias locales viajes concertados al Caribe, Islas Maldivas y Tailandia. A una primera agencia A le vende 10 viajes al Caribe, 10 a las Maldivas y 10 a Tailandia, cobrando por todo ello 12.000 euros. A una segunda agencia B le vende 10 viajes al Caribe y 20 a Tailandia, cobrando por todo ello 13.000 euros. Y a una tercera agencia C le vende 10 viajes al Caribe y 10 a las Maldivas, cobrando por todo ello 7.000 euros. Se pide:

a) Plantea un sistema de ecuaciones que permita calcular el precio del viaje a cada uno de los destinos. Y calcula, si es posible, dicho precio. (1.5 puntos)

b) Si le obligasen a rebajar un 20% el precio del viaje al Caribe dejando los otros iguales, ¿cuánto dinero perdería? (0.5 puntos)

c) ¿Cuál sería el precio del viaje a las Islas Maldivas necesario para compensar la bajada del 20% del viaje al Caribe y así recaudar el mismo dinero? (se mantiene el precio del viaje a Tailandia). (0.5 puntos)

Bloque 1.B. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Escribe el sistema de ecuaciones AX = X en la forma BX = 0. (0.5 puntos)

b) Estudia para qué valores de a el sistema tiene infinitas soluciones. (1 punto)

c) Para $a = 0$ calcula, si existe, la inversa de A. (1 punto)

Bloque 2.A. Sean las parábolas $y_1 = x^2 - 2x + 3$ e $y_2 = ax^2 + b$.

a) Calcula los valores de a y b para que en el punto de abscisa $x = 2$ las dos parábolas tengan la misma recta tangente. Calcula dicha recta tangente. (1 punto)

b) Para $a = 1$, $b = 1$ esboza el recinto limitado por las parábolas entre el eje Y y el punto de corte entre ellas. Calcula el área del mismo. (1.5 puntos)

Bloque 2.B. Sean tres números reales positivos cuya suma es 90 y uno de ellos es la media de los otros dos. Determina los números de forma que el producto entre ellos sea máximo. (2.5 puntos)

Universidad de Oviedo

Prueba de evaluación de Bachillerato
para el acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2020-2021

Bloque 3.A. Dadas las rectas $r: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{-2} = z$ y $s: \begin{cases} x+2y=-1 \\ z=1 \end{cases}$

a) Comprueba que las rectas se cruzan. (0.75 puntos)

b) Obtenga el plano π que contiene a *s* y es paralelo a la recta *r*. Halla la distancia entre el punto $P=(-1,1,0)$ de la recta *r* y el plano π (1.25 puntos)

c) Calcula la distancia entre las rectas. (0.5 puntos)

Bloque 3.B. Dados los puntos A(1, 1, 0) y B(0, 0, 2) y la recta $r: \begin{cases} x=1 \\ y=1+\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}$ Halla:

a) Un punto $C \in r$ de forma que el triángulo ABC sea rectángulo con el ángulo recto en B. (1.25 puntos)

b) El plano π que pasa por A y B y es paralelo a *r*. (1.25 puntos)

Bloque 4.A. En un edificio hay dos ascensores. Cada vecino, cuando utiliza el ascensor, lo hace en el primero el 60% de las veces y en el segundo el 40 %. El porcentaje de fallos del primer ascensor es del 3% y del segundo es del 8 %.

a) Un vecino usa un ascensor. ¿Cuál es la probabilidad de que el ascensor falle? (1.25 puntos)

b) Otro día, un vecino coge un ascensor y le falla. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido el segundo? (1.25 puntos)

Bloque 4.B. Se tiene un suceso con variable aleatoria X que sigue una distribución normal de media μ = 10 y desviación típica σ = 2: Calcula:

a) La probabilidad de que $X \in [6,10]$. (1.5 puntos)

b) Se hace una revisión de los datos y se observa que la media coincide pero la probabilidad del 80% se alcanza en el valor $X \le 12$: ¿Cuál es la nueva desviación típica? (1 punto)

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(x)=P(Z \le x)$; *F(0) = 0.5; F(0.8416) = 0.8; F(1) = 0.8413; F(1.25) = 0.8944;*

F(1.375) =0.9154; F(1.5) = 0.9332; F(2) = 0.9772)

SOLUCIONES:

Bloque 1.A. Un operador turístico vende a las agencias locales viajes concertados al Caribe, Islas Maldivas y Tailandia. A una primera agencia A le vende 10 viajes al Caribe, 10 a las Maldivas y 10 a Tailandia, cobrando por todo ello 12.000 euros. A una segunda agencia B le vende 10 viajes al Caribe y 20 a Tailandia, cobrando por todo ello 13.000 euros. Y a una tercera agencia C le vende 10 viajes al Caribe y 10 a las Maldivas, cobrando por todo ello 7.000 euros. Se pide:

a) Plantea un sistema de ecuaciones que permita calcular el precio del viaje a cada uno de los destinos. Y calcula, si es posible, dicho precio. (1.5 puntos)

b) Si le obligasen a rebajar un 20% el precio del viaje al Caribe dejando los otros iguales, ¿cuánto dinero perdería? (0.5 puntos)

c) ¿Cuál sería el precio del viaje a las Islas Maldivas necesario para compensar la bajada del 20% del viaje al Caribe y así recaudar el mismo dinero? (se mantiene el precio del viaje a Tailandia). (0.5 puntos)

a) Considerando, en euros, "x" el precio de un viaje al Caribe, "y" el precio de un viaje a las Maldivas y "z" el precio de un viaje a Tailandia, tenemos que:

"*A una primera agencia A le vende 10 viajes al Caribe, 10 a las Maldivas y 10 a Tailandia, cobrando por todo ello 12.000 euros*" → $10x+10y+10z=12000$

"*A una segunda agencia B le vende 10 viajes al Caribe y 20 a Tailandia, cobrando por todo ello 13.000 euros*" → $10x+20y=13000$

"*A una tercera agencia C le vende 10 viajes al Caribe y 10 a las Maldivas, cobrando por todo ello 7.000 euros*" → $10x+10y=7000$

Reunimos las ecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 10x+10y+10z=12000 \\ 10x+20z=13000 \\ 10x+10y=7000 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=1200 \\ x+2z=1300 \\ x+y=700 \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1200 \\ x+2z=1300 \\ x+y=700 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=1200 \\ x+2z=1300 \\ x=700-y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 700-y+y+z=1200 \\ 700-y+2z=1300 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \boxed{z=500} \\ -y+2z=600 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -y+1000=600 \Rightarrow \boxed{y=400} \Rightarrow \boxed{x=700-400=300}$$

La solución es 300 € cada viaje al Caribe, 400 el viaje a Maldivas y 500 el viaje a Tailandia

b) Los viajes al Caribe cuestan 300 €. Si le descontamos el 20 % que es 0.2 · 300 = 60 € por viaje. Esa es la pérdida por viaje al Caribe, como se venden un total (en las 3 agencias) de 30 viajes la pérdida sería de 30 · 60 = 1800 €.

Como se venden 20 viajes a las Maldivas y se deben compensar los 1800 €, tenemos que a cada viaje hay que sumarle $\frac{1800}{20}=90$ €, esto significa que pasaría a costar 490 €.

Bloque 1.B. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}$ y $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Escribe el sistema de ecuaciones AX = X en la forma BX = 0. (0.5 puntos)

b) Estudia para qué valores de *a* el sistema tiene infinitas soluciones. (1 punto)

c) Para *a = 0* calcula, si existe, la inversa de A. (1 punto)

a) Si $AX = X \Rightarrow AX - X = 0 \Rightarrow (A-I)X = 0$

La matriz B sería $B = A - I = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 \end{pmatrix}$

El sistema quedaría $\left.\begin{array}{r} (a-1)x \quad\quad -z = 0 \\ -x \quad -y \quad\quad = 0 \\ y+(a-1)z = 0 \end{array}\right\}$

b) La matriz de coeficientes es $B = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 \end{pmatrix}$

Calculamos su determinante y lo igualamos a cero.

$$|B| = \begin{vmatrix} a-1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 \end{vmatrix} = -(a-1)^2 + 1$$

$$|B| = 0 \Rightarrow -(a-1)^2 + 1 = 0 \Rightarrow (a-1)^2 = 1 \Rightarrow a-1 = \sqrt{1} = \begin{cases} a-1 = 1 \rightarrow \boxed{a=2} \\ o \\ a-1 = -1 \rightarrow \boxed{a=0} \end{cases}$$

Cuando a ≠ 2 o a ≠ 0 el determinante de A es no nulo y el rango de la matriz de coeficientes es 3, al igual que la matriz ampliada y el número de incógnitas.
El sistema es compatible determinado y tiene una única solución.

Vemos que ocurre cuando *a = 2* o cuando *a = 0*.

Si *a = 2* el sistema queda:

$$\left.\begin{array}{r} x \quad -z = 0 \\ -x \quad -y \quad = 0 \\ y+z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x \quad -z = 0 \\ -x \quad -y \quad = 0 \\ y = -z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x - z = 0 \\ -x + z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x - z = 0 \Rightarrow \boxed{x = z}$$

El sistema tiene infinitas soluciones.

Si *a = 0* el sistema queda

$$\left.\begin{array}{r}-x \quad\quad -z=0\\ -x \quad -y \quad\quad =0\\ y-z=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}-x \quad\quad -z=0\\ -x \quad -y \quad\quad =0\\ \boxed{y=z}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}-x-z=0\\ -x-z=0\end{array}\right\} \Rightarrow x=-z$$

El sistema tiene infinitas soluciones.

Resumiendo: El sistema tiene infinitas soluciones cuando $a = 2$ o $a = 0$.

c) Para $a = 0$ la matriz A queda $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, calculamos su determinante, comprobamos que no es nulo y de ser así calculamos su inversa.

$$|A|=\begin{vmatrix}0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=1\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Asj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}}$$

Bloque 2.A. Sean las parábolas $y_1 = x^2 - 2x + 3 \ e \ y_2 = ax^2 + b$.

a) Calcula los valores de *a* y *b* para que en el punto de abscisa *x = 2* las dos parábolas tengan la misma recta tangente. Calcula dicha recta tangente. (1 punto)

b) Para *a = 1, b = 1* esboza el recinto limitado por las parábolas entre el eje *Y* y el punto de corte entre ellas. Calcula el área del mismo. (1.5 puntos)

a) Al ser sus tangentes en *x = 2* iguales deben tomar el mismo valor la función y su derivada en *x = 2*.

$$\left.\begin{array}{l} y_1(2) = 2^2 - 4 + 3 = 3 \\ y_2(2) = a \cdot 2^2 + b = 4a + b \\ y_1(2) = y_2(2) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{3 = 4a + b}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1' = 2x - 2 \Rightarrow y_1'(2) = 2(2) - 2 = 2 \\ y_2' = 2ax \to y_2'(2) = 2a(2) = 4a \\ y_1'(2) = y_2'(2) \end{array}\right\} \Rightarrow 4a = 2 \Rightarrow \boxed{a = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}}$$

Sustituyendo el valor de $a = \frac{1}{2}$ en la primera ecuación tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} 3 = 4a + b \\ a = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow 3 = \frac{4}{2} + b \Rightarrow \boxed{b = 1}$$

Los valores buscados son $a = \frac{1}{2}$ y $b = 1$.

La recta tangente en *x = 2* tiene ecuación $y - y_1(2) = y_1'(2)(x - 2)$.

$$\left.\begin{array}{l} y - y_1(2) = y_1'(2)(x - 2) \\ y_1(2) = 3 \\ y_1'(2) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow y - 3 = 2(x - 2) \Rightarrow y - 3 = 2x - 4 \Rightarrow \boxed{y = 2x - 1}$$

b) Para *a = 1, b = 1* las funciones son $y_1 = x^2 - 2x + 3 \ e \ y_2 = x^2 + 1$.

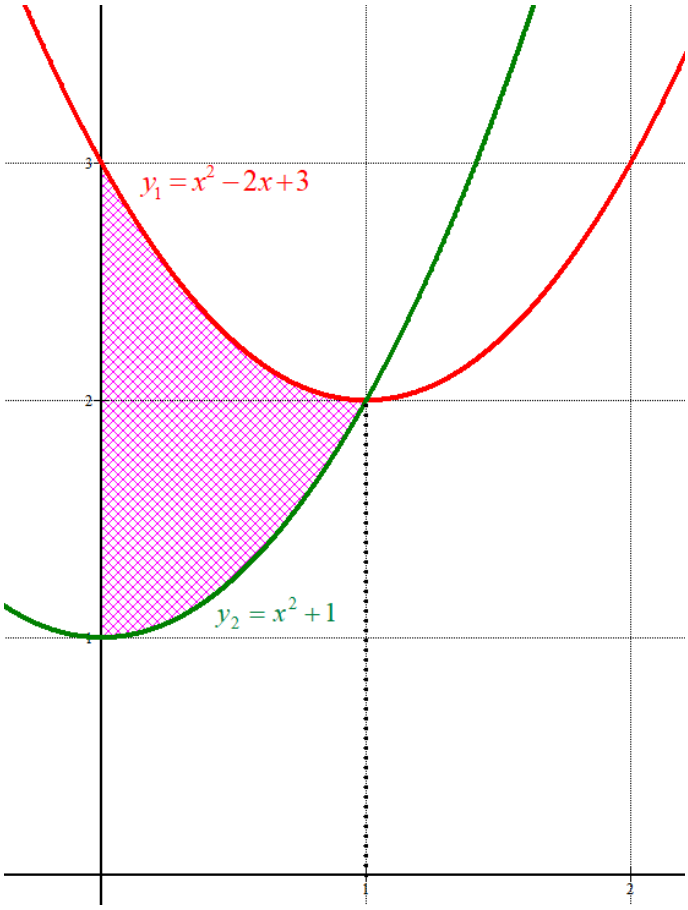
Buscamos los puntos de corte de estas dos parábolas.

$$y_1 = y_2 \Rightarrow x^2 - 2x + 3 = x^2 + 1 \Rightarrow -2x = -2 \Rightarrow x = 1$$

Entonces el recinto del cual nos piden calcular su área comienza en *x = 0* y acaba en *x* = 1. Hacemos una pequeña tabla y dibujamos las parábolas.

x	$y_1 = x^2 - 2x + 3$
–1	6
0	3
1	2
2	3

x	$y_2 = x^2 + 1$
–1	2
0	1
1	2
2	5



El recinto del cual debemos calcular su área es lo coloreado de rosa.
El valor del área del recinto coloreado de rosa es aproximadamente 1 unidad cuadrada.

Precisamos su valor calculando la integral definida entre $x = 0$ y $x = 1$ de $y_1 - y_2$.

$$Área = \int_0^1 x^2 - 2x + 3 - \left(x^2 + 1\right) dx = \int_0^1 -2x + 2 dx = \left[-x^2 + 2x\right]_0^1 = \left[-1^2 + 2\right] - \left[-0^2 + 0\right] = \boxed{1\,u^2}$$

Bloque 2.B. Sean tres números reales positivos cuya suma es 90 y uno de ellos es la media de los otros dos. Determina los números de forma que el producto entre ellos sea máximo. (2.5 puntos)

Llamamos x, y, z a esos tres números.

"*La suma de los tres números es 90*" → $x+y+z=90$

"*Uno de ellos es la media de los otros dos*" → $\frac{x+z}{2}=y$

Nos piden maximizar $f\left(x,y,z\right)=xyz$.

De las ecuaciones iniciales podemos expresar los números en función de una sola variable.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=90 \\ \frac{x+z}{2}=y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=90-y-z \\ x+z=2y \end{array}\right\} \Rightarrow 90-y-z+z=2y \Rightarrow 90=3y \Rightarrow \boxed{y=30} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=90-30-z \Rightarrow \boxed{z=60-x}$$

Sustituimos en la función que deseamos maximizar:

$$\left.\begin{array}{l} f\left(x,y,z\right)=xyz \\ y=30 \\ z=60-x \end{array}\right\} \Rightarrow f\left(x,y,z\right)=x\cdot 30\cdot\left(60-x\right)=1800x-30x^2=f\left(x\right)$$

Nuestro objetivo es hallar el máximo de la función $f(x)=1800x-30x^2$.
Derivamos e igualamos a cero.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=1800-60x \\ f'\left(x\right)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1800-60x=0 \Rightarrow \boxed{x=\frac{1800}{60}=30}$$

Como la derivada segunda es $f''(x)=-60$ entonces $f''(30)=-60<0$, por lo que en $x = 30$ hay un máximo de la función.
Determinamos los otros números: $z=60-30=30$, $y = 30$, $x = 30$.

El producto se maximiza cuando los tres números son iguales a 30.

Bloque 3.A. Dadas las rectas $r:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=z$ y $s:\begin{cases} x+2y=-1 \\ z=1 \end{cases}$

a) Comprueba que las rectas se cruzan. (0.75 puntos)

b) Obtenga el plano π que contiene a *s* y es paralelo a la recta *r*. Halla la distancia entre el punto $P=(-1,1,0)$ de la recta *r* y el plano π (1.25 puntos)

c) Calcula la distancia entre las rectas. (0.5 puntos)

a) Obtenemos un vector director y un punto de cada recta.

$$r:\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{-2}=z \Rightarrow r:\begin{cases} P_r=(-1,1,0) \\ \overrightarrow{u_r}=(3,-2,1) \end{cases}$$

$$s:\begin{cases} x+2y=-1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow s:\begin{cases} x=-1-2y \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow s:\begin{cases} x=-1-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow s:\begin{cases} Q_s=(-1,0,1) \\ \overrightarrow{v_s}=(-2,1,0) \end{cases}$$

Vemos que las rectas no son paralelas ni coincidentes porque sus vectores directores no tienen coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_s}=(-2,1,0) \\ \overrightarrow{u_r}=(3,-2,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-2}{3}\neq\frac{1}{-2}\neq\frac{0}{1}$$

Para ver si se cortan o cruzan calculamos el valor del producto mixto de los vectores $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{v_s}$ y $\overrightarrow{P_rQ_s}$.

$$\overrightarrow{P_rQ_s}=(-1,0,1)-(-1,1,0)=(0,-1,1)$$

$$\left[\overrightarrow{P_rQ_s},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{v_s}\right]=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0+2+3-4-0-0=1\neq 0$$

Al ser distinto de cero las rectas se cruzan.

b) Si el plano π contiene a *s* entonces uno de los vectores directores del plano es $\overrightarrow{v_s}=(-2,1,0)$ y pasa por el punto $Q_s=(-1,0,1)$. Además, es paralelo a la recta *r*, por lo que otro de los vectores directores del plano es $\overrightarrow{u_r}=(3,-2,1)$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}=\overrightarrow{v_s}=(-2,1,0) \\ \vec{v}=\overrightarrow{u_r}=(3,-2,1) \\ Q_s=(-1,0,1)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow x+1+4z-4-3z+3+2y=0 \Rightarrow$$

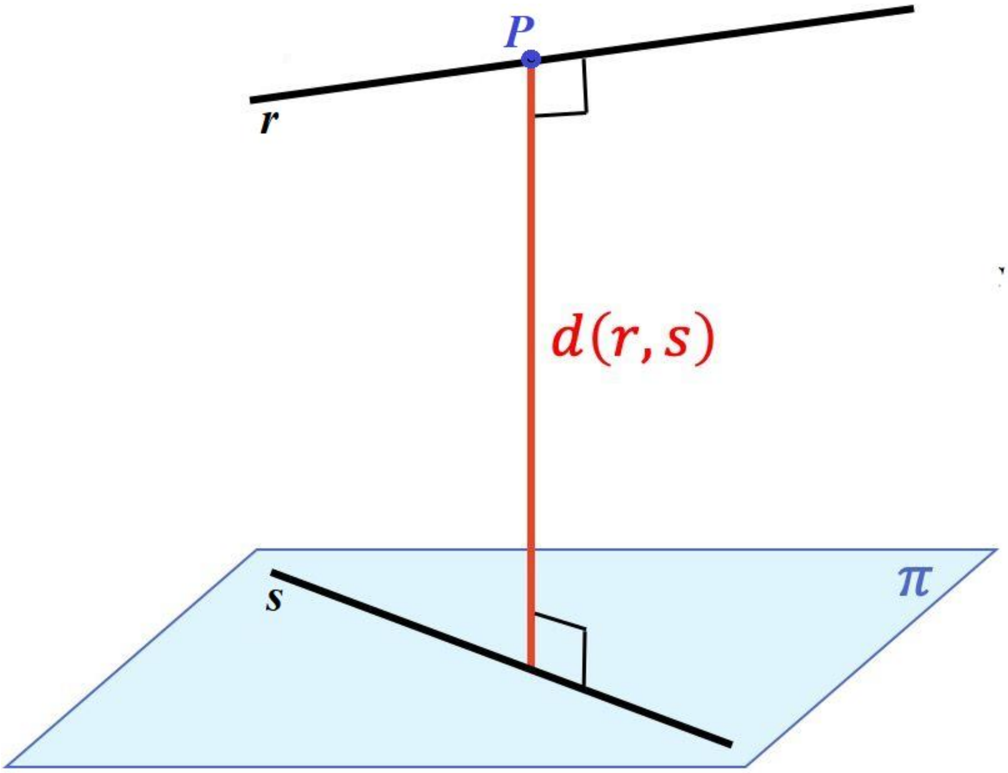
$$\Rightarrow \boxed{\pi\equiv x+2y+z=0}$$

Calculamos la distancia del punto $P=(-1,1,0)$ al plano π.

$$\left.\begin{array}{l}\pi \equiv x+2y+z=0 \\ P=(-1,1,0)\end{array}\right\} \Rightarrow d(P,\pi)=\frac{|-1+2+0|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\boxed{\frac{1}{\sqrt{6}} \simeq 0.408\, u}$$

c) La distancia entre las rectas es la de un punto cualquiera de *r* al plano paralelo π que contiene a *s*. El punto P es el que hemos llamado P_r y pertenece a r. El plano π es el calculado en el apartado anterior. Entonces tenemos que:

$$d(r,s)=d(P_r,\pi)=d(P,\pi)=\frac{1}{\sqrt{6}}u$$

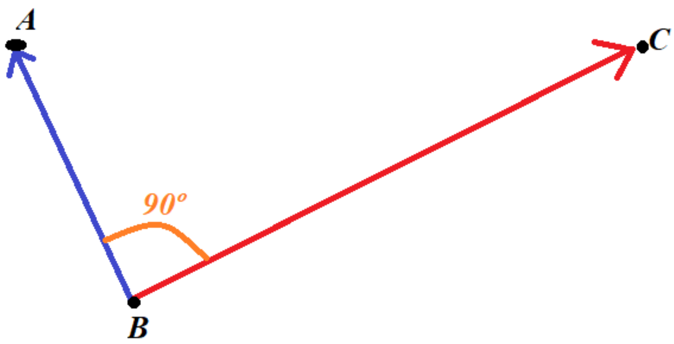


Bloque 3.B. Dados los puntos A(1, 1, 0) y B(0, 0, 2) y la recta $r:\begin{cases} x=1 \\ y=1+\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}$ Halla:

a) Un punto $C\in r$ de forma que el triángulo ABC sea rectángulo con el ángulo recto en B. (1.25 puntos)

b) El plano π que pasa por A y B y es paralelo a *r*. (1.25 puntos)

a) Para que sea rectángulo en el punto B deben ser perpendiculares los vectores $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$.



$$C\in r:\begin{cases} x=1 \\ y=1+\lambda \Rightarrow C=(1,1+\lambda,1+\lambda) \\ z=1+\lambda \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{BA}=(1,1,0)-(0,0,2)=(1,1,-2) \\ \overrightarrow{BC}=(1,1+\lambda,1+\lambda)-(0,0,2)=(1,1+\lambda,-1+\lambda) \\ \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \end{array}\right\}\Rightarrow (1,1,-2)(1,1+\lambda,-1+\lambda)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+1+\lambda+2-2\lambda=0\Rightarrow -\lambda=-4\Rightarrow \lambda=4\Rightarrow \boxed{C=(1,5,5)}$$

b) Si el plano contiene a los puntos A y B entonces uno de sus vectores directores es $\overrightarrow{BA}$. Además, es paralelo a *r*, por lo que otro vector director del plano es el vector director de la recta.

$$r:\begin{cases} x=1 \\ y=1+\lambda \Rightarrow \vec{v_r}=(0,1,1) \\ z=1+\lambda \end{cases}$$

$$\pi\equiv\begin{cases} \vec{u}=\vec{v_r}=(0,1,1) \\ \vec{v}=\overrightarrow{BA}=(1,1,-2)\Rightarrow \pi\equiv \begin{vmatrix} x & y & z-2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=0\Rightarrow -2x+y-z+2-x=0\Rightarrow \\ B(0,0,2)\in\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi\equiv -3x+y-z+2=0}$$

Bloque 4.A. En un edificio hay dos ascensores. Cada vecino, cuando utiliza el ascensor, lo hace en el primero el 60% de las veces y en el segundo el 40 %. El porcentaje de fallos del primer ascensor es del 3% y del segundo es del 8 %.

a) Un vecino usa un ascensor. ¿Cuál es la probabilidad de que el ascensor falle? (1.25 puntos)

b) Otro día, un vecino coge un ascensor y le falla. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido el segundo? (1.25 puntos)

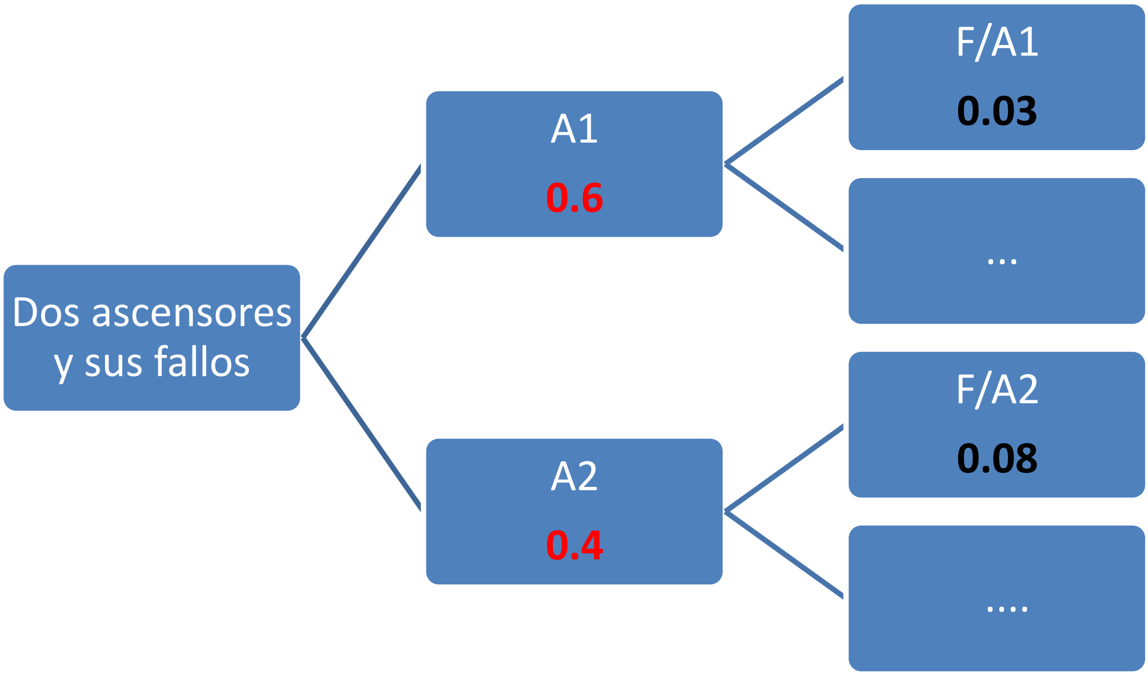
a) Llamamos $A1$ = *Usar el ascensor 1*, $A2$ = *Usar el ascensor 2*.

Asimismo, llamamos F = *Fallo del ascensor*.

Con esta terminología tenemos que $P(A1) = 0.6$, $P(A2) = 0.4$.

$P(F/A1) = 0.03$, $P(F/A2) = 0.08$.

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Usamos el teorema de la probabilidad total y tenemos que:

$$P(F) = P(A1)P(F/A1) + P(A2)P(F/A2) = 0.6 \cdot 0.03 + 0.4 \cdot 0.08 = \boxed{0.05}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(A2/F) = \frac{P(A2 \cap F)}{P(F)} = \frac{P(A2)P(F/A2)}{P(F)} = \frac{0.4 \cdot 0.08}{0.05} = \boxed{\frac{16}{25} = 0.64}$$

Bloque 4.B. Se tiene un suceso con variable aleatoria X que sigue una distribución normal de media μ = 10 y desviación típica σ = 2: Calcula:

a) La probabilidad de que $X \in [6,10]$. (1.5 puntos)

b) Se hace una revisión de los datos y se observa que la media coincide pero la probabilidad del 80% se alcanza en el valor $X \leq 12$: ¿Cuál es la nueva desviación típica? (1 punto)

a) Sea X = N(10, 2).

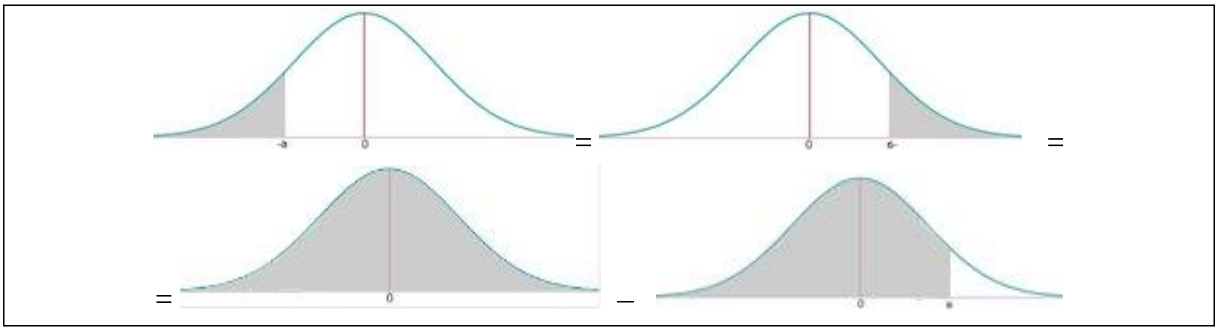
Nos piden $P(6 \leq X \leq 10)$.

$$P(6 \leq X \leq 10) = P(X \leq 10) - P(X \leq 6) = \{Tipificamos\} =$$

$$= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{10-10}{2}\right) - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{6-10}{2}\right) = P(Z \leq 0) - P(Z \leq -2) =$$

$$= P(Z \leq 0) - P(Z \geq 2) = P(Z \leq 0) - \left[1 - P(Z \leq 2)\right] = \left\{\begin{array}{l} \text{Miramos en los datos} \\ F(0) = 0.5 \\ F(2) = 0.9772 \end{array}\right\} =$$

$$= 0.5 - [1 - 0.9772] = \boxed{0.4772}$$



b) Tenemos X = N(10, σ)

Y sabemos que $P(X \leq 12) = 0.8$ por lo que:

$$P(X \leq 12) = P\left(Z \leq \frac{12-10}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{2}{\sigma}\right) = 0.8 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Miramos en los datos} \\ F(0.8416) = 0.8 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{2}{\sigma} = 0.8416 \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{2}{0.8416} = 2.3764}$$

(Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: $F(x) = P(Z \leq x)$; F(0) = 0.5; F(0.8416) = 0.8; F(1) = 0.8413; F(1.25) = 0.8944; F(1.375) = 0.9154; F(1.5) = 0.9332; F(2) = 0.9772)