Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2021

Proves d'accés a la universitat

Matemátiques

Sèrie 2

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

1. Considereu la paràbola $y = 4 - x^2$ i un valor $a > 0$.

a) Comproveu que l'equació de la recta tangent a la gràfica de la paràbola en el punt d'abscissa $x = a$ és $y = -2ax + a^2 + 4$ i calculeu els punts de tall d'aquesta recta tangent amb els eixos de coordenades. [1,25 punts]

b) Calculeu el valor de $a > 0$ perquè l'àrea del triangle determinat per aquesta recta tangent i els eixos de coordenades sigui mínima. [1,25 punts]

2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real *p*:

$$\begin{cases} px + y + z = 2 \\ 2x + py + p^2 z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre *p*. [1,25 punts]

b) Resoleu, si és possible, el sistema per al cas $p = 2$. [1,25 punts]

3. Considereu el punt $P = (-1, 3, 1)$, el pla $\pi : x = y$ i la recta $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = z - 2$.

a) Trobeu les coordenades del punt P' simètric a P respecte al pla π. [1,25 punts]

b) De tots els plans que contenen la recta *r*, trobeu l'equació cartesiana del que és perpendicular al pla π. [1,25 punts]

4. Sigui la funció $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ definida en el domini $x > 0$, en què ln és el logaritme neperià.

a) Trobeu les coordenades d'un punt de la corba $y = f(x)$ en el qual la recta tangent a la corba sigui horitzontal i analitzeu si la funció té un extrem relatiu en aquest punt. [1 punt]

b) Determineu si la funció $f(x)$ té alguna asímptota horitzontal. [0,5 punts]

c) Calculeu l'àrea de la regió delimitada per la corba $y = f(x)$ i les rectes $x = 1$ i $x = \mathrm{e}$. Feu un dibuix aproximat de la gràfica de la funció en el domini $0 < x < 5$, en què quedi representada l'àrea que heu calculat. [1 punt]

5. ***a)*** Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, resoleu l'equació matricial $A^2X = A - 3I$, en què ***I*** és la matriu identitat. [1,25 punts]

b) Una matriu quadrada ***M*** satisfà que $M^3 - 3M^2 + 3M - I = 0$, en què ***I*** és la matriu identitat. Justifiqueu que ***M*** és invertible i expresseu la inversa de ***M*** en funció de les matrius ***M*** i ***I***. [1,25 punts]

6. Considereu la funció $f(x) = e^{x-1} - x - 1$.

a) Estudieu-ne la continuïtat, els extrems relatius i els intervals de creixement i decreixement. [1,25 punts]

b) Demostreu que l'equació $f(x) = 0$ té exactament dues solucions entre $x = -1$ i $x = 3$. [1,25 punts]

SOLUCIONES

1. Considereu la paràbola $y = 4 - x^2$ i un valor $a > 0$.
a) Comproveu que l'equació de la recta tangent a la gràfica de la paràbola en el punt d'abscissa $x = a$ és $y = -2ax + a^2 + 4$ i calculeu els punts de tall d'aquesta recta tangent amb els eixos de coordenades.
[1,25 punts]
b) Calculeu el valor de $a > 0$ perquè l'àrea del triangle determinat per aquesta recta tangent i els eixos de coordenades sigui mínima. [1,25 punts]

a) La recta tangente a la gráfica de la parábola en $x = a$ tiene ecuación $y - f(a) = f'(a)(x-a)$.

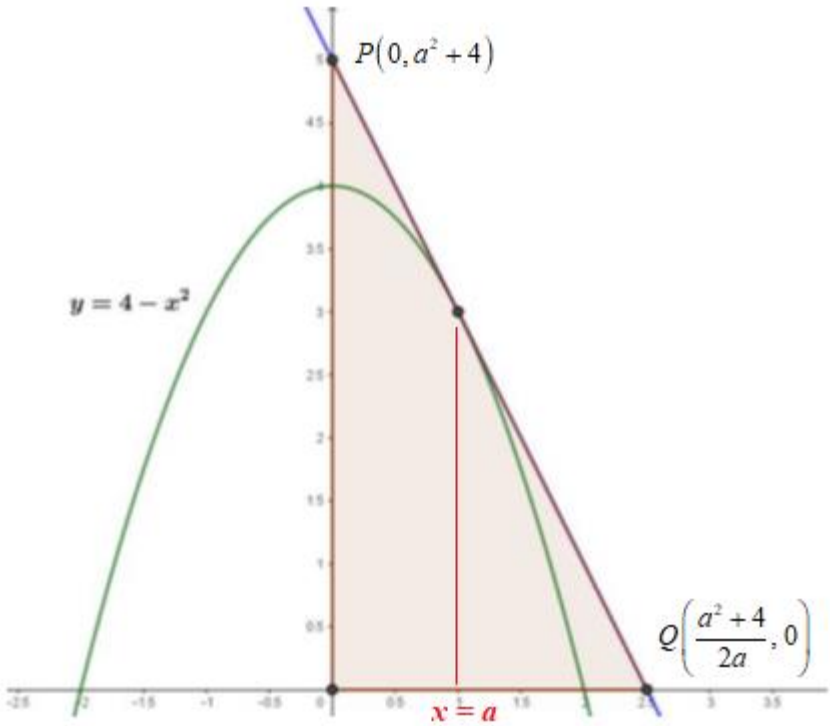
$$\left.\begin{array}{l} f(a) = 4 - a^2 \\ f(x) = 4 - x^2 \to f'(x) = -2x \to f'(a) = -2a \\ y - f(a) = f'(a)(x-a) \end{array}\right\} \Rightarrow y - (4 - a^2) = -2a(x-a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 4 + a^2 = -2ax + 2a^2 \Rightarrow y = -2ax + 2a^2 + 4 - a^2 \Rightarrow \boxed{y = -2ax + a^2 + 4}$$

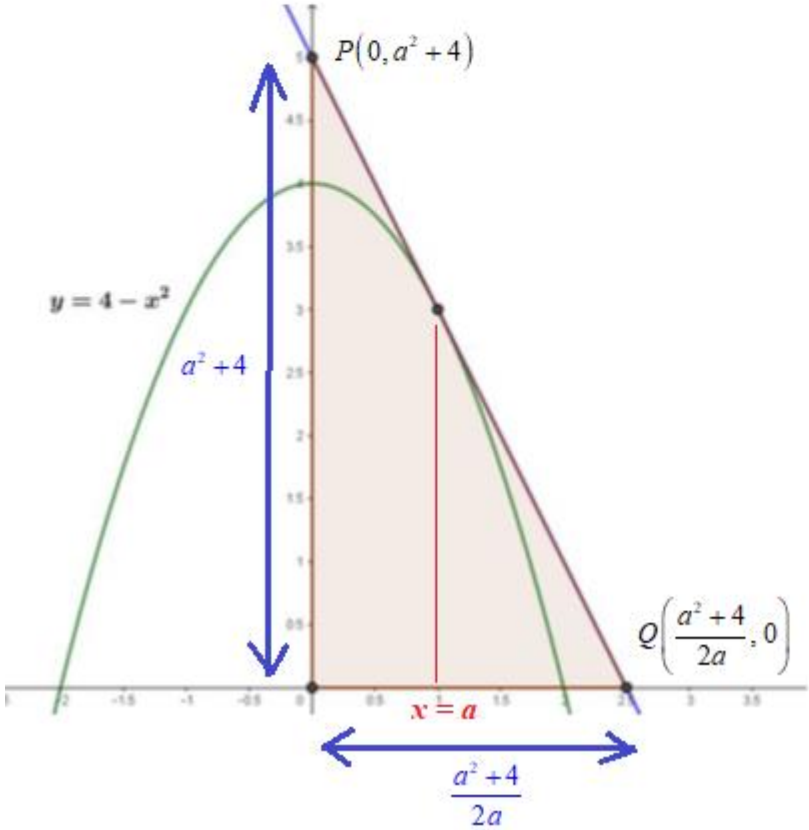
Hallamos los puntos de corte de la tangente con los ejes coordenados.

$$\left.\begin{array}{l} y = -2ax + a^2 + 4 \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = -0 + a^2 + 4 = a^2 + 4 \Rightarrow \boxed{P(0, a^2 + 4)}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = -2ax + a^2 + 4 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = -2ax + a^2 + 4 \Rightarrow 2ax = a^2 + 4 \Rightarrow x = \frac{a^2 + 4}{2a} \Rightarrow \boxed{Q\left(\frac{a^2 + 4}{2a}, 0\right)}$$



b) Consideramos el triángulo determinado por los puntos de corte de la tangente con los ejes de coordenadas.



El área del triángulo es la mitad del producto de la base por la altura.

$$A(a) = \frac{\left(\frac{a^2+4}{2a}\right)(a^2+4)}{2} = \frac{(a^2+4)^2}{4a}$$

Derivamos esta función.

$$A(a) = \frac{(a^2+4)^2}{4a} \Rightarrow A'(a) = \frac{2(a^2+4)2a \cdot 4a - 4(a^2+4)^2}{(4a)^2} = \frac{16a^2(a^2+4) - 4(a^2+4)^2}{16a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A'(a) = \frac{4a^2(a^2+4) - (a^2+4)^2}{4a^2} = \frac{(a^2+4)\left[4a^2 - (a^2+4)\right]}{4a^2} = \frac{(a^2+4)\left[4a^2 - a^2 - 4\right]}{4a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A'(a) = \frac{(a^2+4)\left[3a^2 - 4\right]}{4a^2}$$

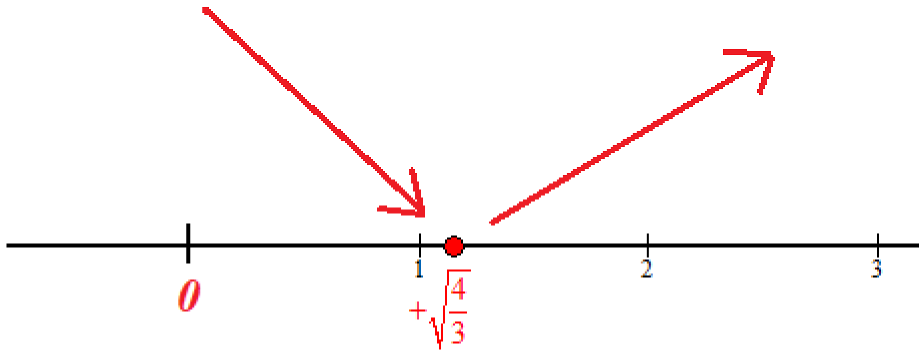
La igualamos a cero en busca de los extremos relativos

$$A'(a)=0 \Rightarrow \frac{(a^2+4)\left[3a^2-4\right]}{4a^2}=0 \Rightarrow \begin{cases} a^2+4=0 \to a^2=-4 \to \text{¡No es posible!} \\ o \\ 3a^2-4=0 \to 3a^2=4 \to a^2=\frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{a=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}} \end{cases}$$

Como la función se define para *a > 0* estudiamos la variación del signo de la derivada entre $a=0$ y $a=+\sqrt{\frac{4}{3}}$ y después de este valor.

- En $\left(0,+\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$ tomamos *a = 1* y la derivada vale $A'(1)=\frac{(1+4)[3-4]}{4}=-\frac{5}{4}<0$. La función decrece en $\left(0,+\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$.
- En $\left(\sqrt{\frac{4}{3}},+\infty\right)$ tomamos *a = 2* y la derivada vale $A'(2)=\frac{(4+4)[12-4]}{16}>0$. La función crece en $\left(\sqrt{\frac{4}{3}},+\infty\right)$.

La función es continua y sigue el esquema siguiente:



La función área tiene un mínimo para $a=+\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real *p*:

$$\begin{cases} px+y+z=2 \\ 2x+py+p^2z=1 \\ 2x+y+z=2 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre *p*. [1,25 punts]
b) Resoleu, si és possible, el sistema per al cas *p* = 2. [1,25 punts]

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} p & 1 & 1 \\ 2 & p & p^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} p & 1 & 1 & 2 \\ 2 & p & p^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Calculamos el determinante de A y lo igualamos a cero, para estudiar su rango en función del parámetro *p*.

$$|A|=\begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 2 & p & p^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=p^2+2p^2+2-2p-2-p^3=-p^3+3p^2-2p$$

$$|A|=0 \Rightarrow -p^3+3p^2-2p=0 \Rightarrow -p\left(p^2-3p+2\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p=0 \\ p^2-3p+2=0 \to p=\dfrac{3\pm\sqrt{(-3)^2-8}}{2}=\dfrac{3\pm1}{2}=\begin{cases} \dfrac{3+1}{2}=2=p \\ \dfrac{3-1}{2}=1=p \end{cases} \end{cases}$$

Nos planteamos cuatro situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $p\neq 0,\ p\neq 1\ y\ p\neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas.
El sistema es compatible determinado (una única solución)

CASO 2. $p=0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Dado lo sencillo del sistema analizamos el sistema resolviéndolo.
Vemos como queda el sistema:

$$\begin{cases} y+z=2 \\ 2x=1 \\ 2x+y+z=2 \end{cases}$$

Intentamos resolverlo.

$$\begin{cases} y+z=2 \\ 2x=1 \\ 2x+y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+z=2 \\ \boxed{x=\frac{1}{2}=0.5} \\ 2x+y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+z=2 \\ 1+y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+z=2 \\ y+z=1 \end{cases} \to \text{¡Imposible!}$$

El sistema es incompatible (Sin solución)

CASO 3. $p=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Dado lo sencillo del sistema analizamos el sistema resolviéndolo.

Vemos como queda el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+y+z=1 \\ 2x+y+z=2 \end{cases}$$

Intentamos resolverlo.

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ \boxed{\begin{matrix} 2x+y+z=1 \\ 2x+y+z=2 \end{matrix}} \end{cases} \to \text{¡Imposible!}$$

El sistema es incompatible (Sin solución)

CASO 4. $p=2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Dado lo sencillo del sistema analizamos el sistema resolviéndolo.

Vemos como queda el sistema:

$$\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ 2x+2y+4z=1 \\ 2x+y+z=2 \end{cases}$$

Intentamos resolverlo.

$$\begin{cases} 2x+y+z=2 \\ 2x+2y+4z=1 \\ 2x+y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \text{Ecuación } 1^a = \text{Ecuación } 3^a \\ \text{Eliminamos la ecuación } 3^a \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y+z=2 \\ 2x+2y+4z=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=2-2x-z \\ 2x+2y+4z=1 \end{cases} \Rightarrow 2x+2(2-2x-z)+4z=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x+4-4x-2z+4z=1 \Rightarrow -2x+2z+4=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-z-2=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=-\frac{1}{2}+2+z \Rightarrow \boxed{x=\frac{3}{2}+z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 2 - 2\left(\frac{3}{2} + z\right) - z \Rightarrow y = 2 - 3 - 2z - z \Rightarrow \boxed{y = -1 - 3z}$$

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

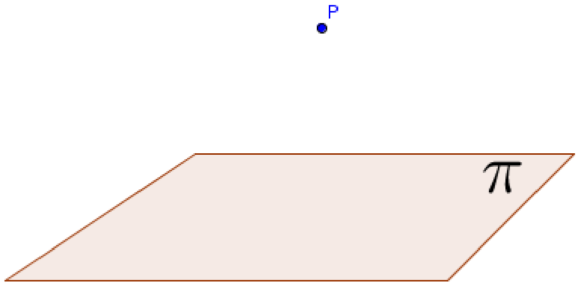
Las soluciones del sistema son $x = \frac{3}{2} + t;\ y = -1 - 3t;\ z = t;\quad t \in \mathbb{R}$

b) Las soluciones del sistema para *p = 2* se han obtenido en el apartado anterior y son $x = \frac{3}{2} + t;\ y = -1 - 3t;\ z = t;\quad t \in \mathbb{R}$

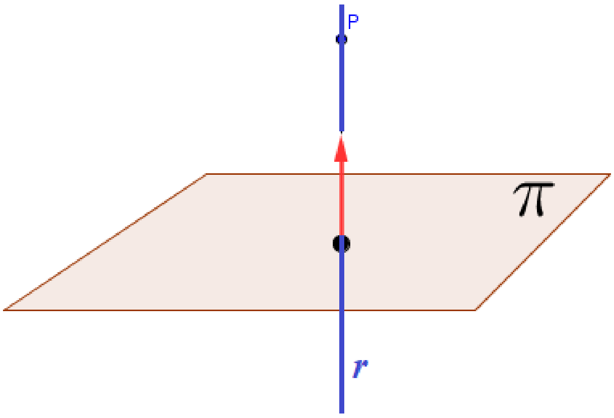
3. Considereu el punt $P = (-1, 3, 1)$, el pla $\pi : x = y$ i la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z-2$.

a) Trobeu les coordenades del punt P' simètric a P respecte al pla π. [1,25 punts]

b) De tots els plans que contenen la recta r, trobeu l'equació cartesiana del que és perpendicular al pla π. [1,25 punts]



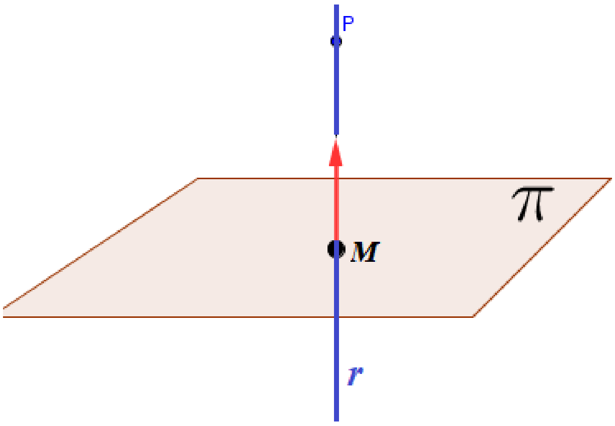
Para hallar el punto simétrico de P respecto del plano nos planteamos hallar primero la ecuación de la recta "r" perpendicular al plano π que pasa por P. Como la recta es perpendicular al plano tiene como vector director el vector normal del plano.



$$\pi : x = y \Rightarrow \pi : x - y = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1, -1, 0)$$

$$r: \begin{cases} \vec{u} = \vec{n} = (1, -1, 0) \\ P(-1, 3, 1) \in r \end{cases} \Rightarrow \boxed{r: \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 1 \end{cases}}$$

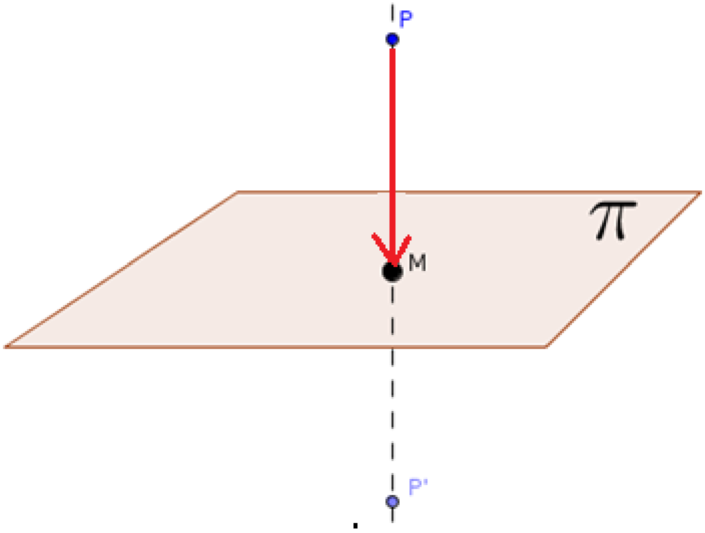
Hallamos el punto de corte M del plano y la recta.



$$\left.\begin{array}{l} r:\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=1 \end{cases} \\ \pi: x-y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -1+\lambda-(3-\lambda)=0 \Rightarrow -4+2\lambda=0 \Rightarrow 4=2\lambda \Rightarrow \lambda=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-1+2=1 \\ y=3-2=1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{M(1,1,1)}$$

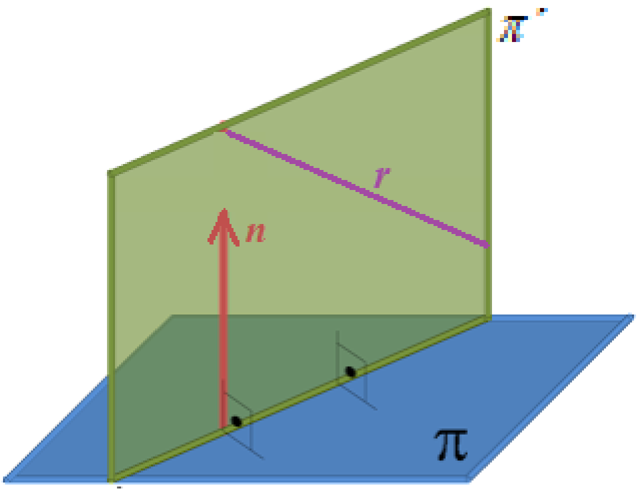
El punto P´ es el punto que surge de sumarle al punto M el vector $\overrightarrow{PM}$.



$$\overrightarrow{PM}=(1,1,1)-(-1,3,1)=(2,-2,0) \Rightarrow \boxed{P'=(1,1,1)+(2,-2,0)=(3,-1,1)}$$

El punto simétrico de P(–1,3,1) respecto del plano $\pi: x = y$ tiene coordenadas P´(3, –1,1)

b) Buscamos la ecuación de un plano π' que contiene a la recta $r: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=z-2$ y es perpendicular al plano π: $x = y$. Dicho plano π' tiene como vectores directores el director de la recta r y el normal del plano π. Y contiene el punto P_r de la recta.



$$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=z-2 \Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{v_r}=(2,3,1)\\ P_r(1,0,2)\end{cases}$$

$$\pi':\begin{cases}\vec{u}=\overrightarrow{v_r}=(2,3,1)\\ \vec{v}=\vec{n}=(1,-1,0)\\ P_r(1,0,2)\in\pi'\end{cases} \Rightarrow \pi':\begin{vmatrix} x-1 & y & z-2\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=0 \Rightarrow y-2z+4-3z+6+x-1=0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\pi': x+y-5z+9=0}$$

El plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π tiene ecuación $\pi': x+y-5z+9=0$

4. Sigui la funció $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$ definida en el domini $x > 0$, en què ln és el logaritme neperià.
a) Trobeu les coordenades d'un punt de la corba $y = f(x)$ en el qual la recta tangent a la corba sigui horitzontal i analitzeu si la funció té un extrem relatiu en aquest punt. [1 punt]
b) Determineu si la funció $f(x)$ té alguna asímptota horitzontal. [0,5 punts]
c) Calculeu l'àrea de la regió delimitada per la corba $y = f(x)$ i les rectes $x = 1$ i $x = e$. Feu un dibuix aproximat de la gràfica de la funció en el domini $0 < x < 5$, en què quedi representada l'àrea que heu calculat. [1 punt]

a) La recta tangente a la gráfica de la parábola en $x=a$ tiene ecuación $y-f(a)=f'(a)(x-a)$.

Para que la recta tangente sea horizontal debe tener pendiente 0, por lo que debe ser $f'(a)=0$.

Buscamos los puntos del dominio donde se anula la derivada.

$$f(x)=\frac{\ln(x)}{x}\rightarrow f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-1\cdot\ln(x)}{x^2}=\frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{1-\ln(x)}{x^2}=0\Rightarrow 1-\ln(x)=0\Rightarrow\ln(x)=1\Rightarrow\boxed{x=e}$$

Como $f(e)=\dfrac{\ln(e)}{e}=\dfrac{1}{e}$ el punto pedido tiene coordenadas $\left(e,\dfrac{1}{e}\right)$.

Para estudiar qué tipo de extremo relativo es analizamos el signo de la derivada antes y después de $x=e$.

- En $(0,e)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1)=\dfrac{1-\ln(1)}{1^2}=1>0$. La función crece en $(0,e)$
- En $(e,+\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3)=\dfrac{1-\ln(3)}{3^2}<0$. La función decrece en $(e,+\infty)$.

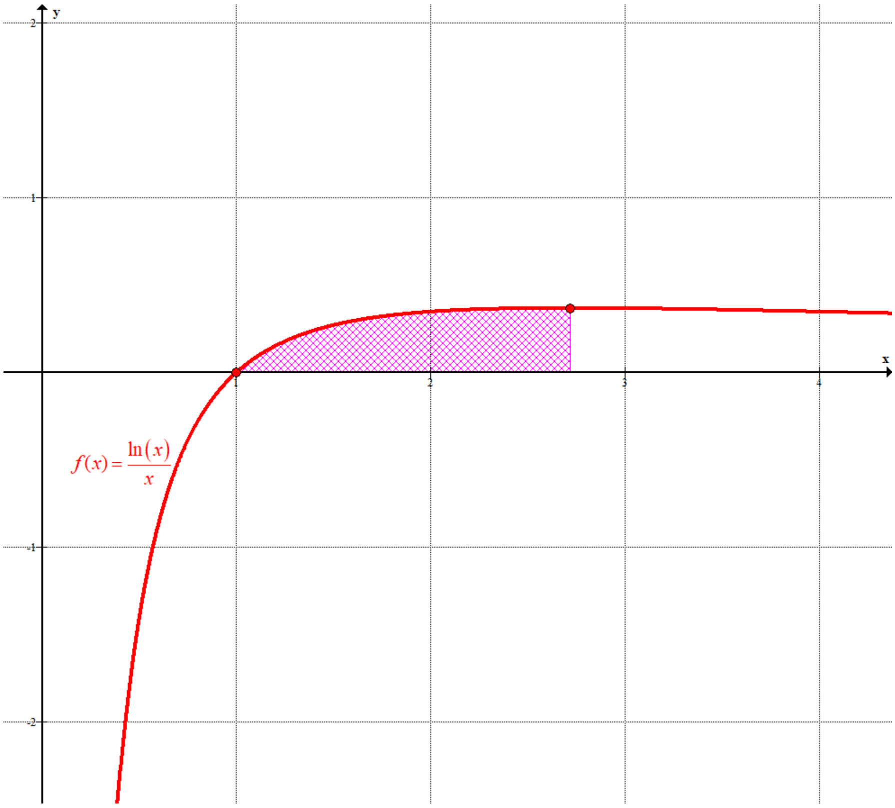
La función presenta un máximo relativo en $x = e$, pues en dicho valor cambia de crecer a decrecer.

b) $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=\frac{\infty}{\infty}=Indeterminación\,(L'Hòpital)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

La asíntota horizontal tiene ecuación $y=0$.

c) Hacemos una tabla de valores en el intervalo *(1, e)*.

x	$f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$
1	0
2	$\frac{\ln 2}{2}=0.35$
e	$\frac{\ln e}{e}=\frac{1}{e}=0.37$



Como la función es positiva en el intervalo *(1, e)* el valor del área del recinto del dibujo se obtiene con la integral definida de la función $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$ entre $x = 1$ y $x = e$.

$$\int_1^e f(x)dx=\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}dx=\dots$$

$$\boxed{\int \frac{\ln(x)}{x}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ \ln(x)=t\to\frac{1}{x}dx=dt\\ dx=xdt\end{array}\right\}=\int\frac{t}{x}xdt=\int tdt=\frac{t^2}{2}=\frac{(\ln(x))^2}{2}}$$

$$\dots=\left[\frac{(\ln(x))^2}{2}\right]_1^e=\left[\frac{(\ln(e))^2}{2}\right]-\left[\frac{(\ln(1))^2}{2}\right]=\boxed{\frac{1}{2}u^2}$$

El área del recinto es 0.5 u^2.

5. *a)* Donada la matriu $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$, resoleu l'equació matricial $A^2X=A-3I$, en què ***I*** és la matriu identitat. [1,25 punts]

b) Una matriu quadrada ***M*** satisfà que $M^3-3M^2+3M-I=0$, en què ***I*** és la matriu identitat. Justifiqueu que ***M*** és invertible i expresseu la inversa de ***M*** en funció de les matrius ***M*** i ***I***.
[1,25 punts]

a) ¿La matriz $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ tiene inversa?

$|A|=\begin{vmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{vmatrix}=1\neq 0$. Su determinante es no nulo y la matriz A tiene inversa. La calculamos.

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

Usamos la inversa de la matriz A para despejar X en la ecuación matricial $A^2X=A-3I$.

$$A^2X=A-3I\Rightarrow A^{-1}A^2X=A^{-1}A-3A^{-1}I\Rightarrow A^{-1}AAX=I-3A^{-1}\Rightarrow AX=I-3A^{-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}I-3A^{-1}A^{-1}\Rightarrow X=A^{-1}-3A^{-1}A^{-1}\Rightarrow$$

$$X=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&3\\3&0&0\\0&3&0\end{pmatrix}$$

.

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}0&1&-3\\-3&0&1\\1&-3&0\end{pmatrix}}$$

b)

$$M^3-3M^2+3M-I=0\Rightarrow M^3-3M^2+3M=I\Rightarrow M\left(M^2-3M+3I\right)=I\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{M^{-1}=M^2-3M+3I}$$

Para que la matriz M tenga inversa debe tener determinante no nulo y esto se cumple.

$$M\left(M^2-3M+3I\right)=I\Rightarrow\left|M\left(M^2-3M+3I\right)\right|=|I|\Rightarrow|M|\left|M^2-3M+3I\right|=1\Rightarrow$$

$\Rightarrow |M|\neq 0$, pues el producto de los determinantes es no nulo (1).

Y la matriz inversa de M es $M^{-1}=M^2-3M+3I$.

6. Considereu la funció $f(x)=e^{x-1}-x-1$.

a) Estudieu-ne la continuïtat, els extrems relatius i els intervals de creixement i decreixement. [1,25 punts]

b) Demostreu que l'equació $f(x) = 0$ té exactament dues solucions entre $x = -1$ i $x = 3$. [1,25 punts]

a) La función es continua por ser la suma de dos funciones continuas, la exponencial y una polinómica de primer grado.
Para analizar la monotonía estudiaremos el signo de la derivada.

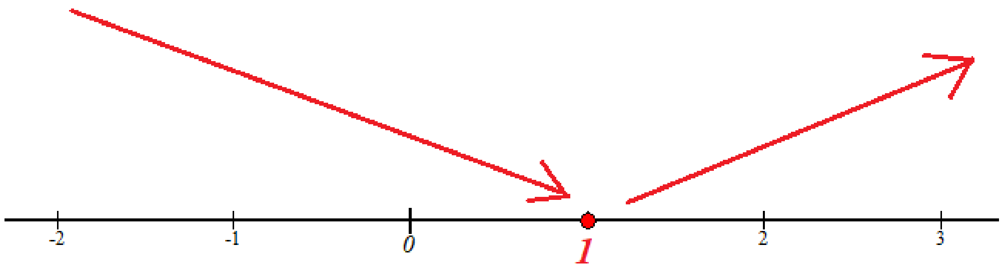
$$f(x)=e^{x-1}-x-1 \Rightarrow f'(x)=e^{x-1}-1$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow e^{x-1}-1=0 \Rightarrow e^{x-1}=1 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$$

En $x = 1$ existe un punto crítico de la función, analizamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- En $(-\infty,1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0)=e^{0-1}-1 \approx -0.6<0$. La función decrece en $(-\infty,1)$.
- En $(1,+\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2)=e^{2-1}-1 \approx 1.71>0$. La función crece en $(1,+\infty)$.

La función es continua y sigue el esquema siguiente:



La función decrece en $(-\infty,1)$ y crece en $(1,+\infty)$.

La función presenta un mínimo relativo en $x = 1$. Como $f(1)=e^{1-1}-1-1=-1$ el mínimo relativo tiene coordenadas (1, –1).

b) Utilizaremos el teorema de Bolzano.

Como $f(-1)=e^{-1-1}-(-1)-1=e^{-2}>0$; $f(3)=e^{3-1}-3-1=e^{2}-4 \approx 3.39>0$, ambos valores son positivos y no podemos aplicar el teorema de Bolzano en el intervalo (–1, 3).
Dividimos el intervalo en dos partes: (–1,1) y (1, 3).

En (–1, 1) tenemos que la función es continua en el intervalo [–1, 1] y toma valores de signo distinto en cada uno de los extremos: $f(-1)=e^{-2}>0$ y $f(1)=-1<0$ aplicando el teorema de Bolzano existe, al menos un valor $c \in (-1,1)$ donde $f(c) = 0$.
Además como la función es decreciente en el intervalo (–1, 1) este valor "c" es único.

En (1, 3) tenemos que la función es continua en el intervalo [1, 3] y toma valores de signo distinto en cada uno de los extremos: $f(1) = -1 < 0$ y $f(3) = e^2 - 4 \approx 3.39 > 0$ aplicando el teorema de Bolzano existe, al menos un valor $d \in (1,3)$ donde $f(d) = 0$.
Además como la función es creciente en el intervalo (1, 3) este valor "d" es único.

Reuniendo lo obtenido entre $x = -1$ y $x = 3$ la función tiene dos valores en los cuales $f(x) = 0$. Además, solo existen esos dos valores que anulan la función, debido a la monotonía de la función.

No lo pide el ejercicio, pero dibujamos la gráfica de la función para comprobar lo obtenido.