	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso **2017-2018** **MATERIA**: MATEMÁTICAS II	uc3m Universidad Carlos III de Madrid

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.
Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.
CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.
Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+my \quad =1 \\ -2x-(m+1)y+z=-1 \\ x+(2m-1)y+(m+2)z=2+2m \end{cases}$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutir el sistema en función del parámetro m.
b) (0.5 puntos) Resolver el sistema en el caso $m=0$.

Ejercicio 2 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

a) (1.5 puntos) En un experimento en un laboratorio se han realizado 5 medidas del mismo objeto, que han dado los resultados siguientes: $m_1 = 0.92$; $m_2 = 0.94$; $m_3 = 0.89$; $m_4 = 0.90$; $m_5 = 0.91$.
Se tomará como resultado el valor de x tal que la suma de los cuadrados de los errores sea mínima. Es decir, el valor para el que la función
$E(x)=(x-m_1)^2+(x-m_2)^2+(x-m_3)^2+(x-m_4)^2+(x-m_5)^2$ alcanza el mínimo.
Calcule dicho valor x.

b) (1 punto) Aplique el método de integración por partes para calcular la integral $\int_1^2 x^2 \ln(x)\,dx$, donde ln significa logaritmo neperiano.

Ejercicio 3 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.
Dados los planos $\pi_1 \equiv 4x+6y-12z+1=0$, $\pi_2 \equiv -2x-3y+6z-5=0$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el volumen de un cubo que tenga dos de sus caras en dichos planos.
b) (1.5 puntos) Para el cuadrado de vértices consecutivos ABCD, con A(2, 1, 3) y B(1, 2, 3), calcular los vértices C y D, sabiendo que C pertenece a los planos π_2 y $\pi_3 \equiv x-y+z=2$.

Ejercicio 4 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.
El 60% de las ventas en unos grandes almacenes corresponden a artículos con precios rebajados. Los clientes devuelven el 15% de los artículos que compran rebajados, porcentaje que disminuye al 8% si los artículos han sido adquiridos sin rebajas.

a) (1.25 puntos) Determine el porcentaje global de artículos devueltos.
b) (1.25 puntos) ¿Qué porcentaje de artículos devueltos fueron adquiridos con precios rebajados?

OPCIÓN B

Ejercicio 1 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} m & 0 & 2 \\ -2 & 4 & m \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Obtener los valores del parámetro m para los que la matriz A admite inversa.
b) (1 punto) Para $m = 0$, calcular $A \cdot B$ y $A^{-1} \cdot B$.
c) (0.5 puntos) Calcular $B^t \cdot B$ *y* $B \cdot B^t$, donde B^t denota la matriz traspuesta de B.

Ejercicio 2 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dada la función $f(x) = \dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Determinar, si existen, las asíntotas horizontales de *f(x)*.
b) (0.75 puntos) Calcular $f'(4)$.
c) (1.25 puntos) Hallar el área del recinto limitado por la curva *y = f(x)*, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Ejercicio 3 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dados el punto P(1, 1, 1) y las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 5x + z = 6 \end{cases}$, $s \equiv \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{1/3}$ se pide:

a) (1 punto) Hallar la distancia del punto *P* a la recta *r*.
b) (1 punto) Estudiar la posición relativa de las rectas *r* y *s*.
c) (0.5 puntos) Hallar el plano perpendicular a la recta *s* y que pasa por el punto *P*.

Ejercicio 4 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

En una fábrica se elaboran dos tipos de productos: A y B. El 75% de los productos fabricados son de tipo A y el 25% de tipo B. Los productos de tipo B salen defectuosos un 5% de las veces, mientras que los de tipo A salen defectuosos un 2.5% de las veces.

a) (1 punto) Si se fabrican 5000 productos en un mes, ¿cuántos de ellos se espera que sean defectuosos?

b) (1.5 puntos) Un mes, por motivos logísticos, se cambió la producción, de modo que se fabricaron exclusivamente productos de tipo A. Sabiendo que se fabricaron 6000 unidades, determinar, aproximando la distribución por una normal, la probabilidad de que haya más de 160 unidades defectuosas.

SOLUCIONES:

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x+my \quad =1 \\ -2x-(m+1)y+z=-1 \\ x+(2m-1)y+(m+2)z=2+2m \end{cases}$$

se pide:
a) (2 puntos) Discutir el sistema en función del parámetro *m*.
b) (0.5 puntos) Resolver el sistema en el caso $m=0$.

a) El sistema tiene asociada la matriz

$A=\begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ -2 & -(m+1) & 1 \\ 1 & 2m-1 & m+2 \end{pmatrix}$ con determinante

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ -2 & -(m+1) & 1 \\ 1 & 2m-1 & m+2 \end{vmatrix}=-(m+1)(m+2)+m+2m(m+2)-2m+1=$$

$$=-m^2-2m-m-2+m+2m^2+4m-2m+1=m^2-1$$

Lo igualamos a cero

$|A|=0 \Rightarrow m^2-1=0 \Rightarrow m^2=1 \Rightarrow m=\sqrt{1}=\pm 1$

Hay tres casos distintos a considerar.

CASO 1. $m\neq \pm 1$

En este caso el rango de A es 3 al igual que el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado. Tiene solución única.

CASO 2. $m=1$

El sistema queda

$$\begin{cases} x+y \quad =1 \\ -2x-2y+z=-1 \\ x+y+3z=4 \end{cases}$$

La matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ no tiene rango 3 ya que su determinante es nulo.

¿El rango de A es 2?

Consideramos el menor que resulta de quitar la 1ª columna y 3ª fila.

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$

El rango de A es 2

La matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ -2 & -2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$

Si consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la 1ª columna (es igual que la 2ª columna)

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ -2 & 1 & -1\\ 1 & 3 & 4\end{vmatrix}=4-6-1+3=0$$

El rango de A/B no es 3.

Si consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la columna 1ª y 2ª y la fila 3ª.

$$\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1\neq 0$$

El rango de A/B es 2.

El sistema es compatible indeterminado, ya que rango de A es 2 al igual que el de A/ B, pero el número de incógnitas es 3. Tiene infinitas soluciones.

CASO 3. $m=-1$

El sistema queda

$$\begin{cases}x-y \quad =1\\ -2x+z=-1\\ x-3y+z=0\end{cases}$$

La matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -2 & 0 & 1\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix}$ no tiene rango 3 ya que su determinante es nulo.

¿El rango de A es 2?

Consideramos el menor que resulta de quitar la 3ª columna y 3ª fila.

$$\begin{vmatrix}1 & -1\\ -2 & 0\end{vmatrix}=-2\neq 0$$

El rango de A es 2

La matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ -2 & 0 & 1 & -1\\ 1 & -3 & 1 & 0\end{pmatrix}$

Si consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la 1ª columna

$$\begin{vmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ -3 & 1 & 0\end{vmatrix}=3-1=2\neq 0$$

El rango de A/B es 3

El sistema es incompatible, ya que el rango de A es 2 y el de A/B es 3. No tiene solución.

b) Si m = 0 el sistema es compatible determinado y queda

$$\begin{cases}x=1\\ -2x-y+z=-1\\ x-y+2z=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2-y+z=-1\\ 1-y+2z=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-y+z=1\\ -y+2z=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=1+y\\ -y+2z=1\end{cases}\Rightarrow -y+2+2y=1\Rightarrow y=-1$$

$$\Rightarrow z=1-1=0$$

La solución es $x=1, \quad y=-1, \quad z=0$

<u>Ejercicio 2</u> : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

a) (1.5 puntos) En un experimento en un laboratorio se han realizado 5 medidas del mismo objeto, que han dado los resultados siguientes: $m_1 = 0.92$; $m_2 = 0.94$; $m_3 = 0.89$; $m_4 = 0.90$; $m_5 = 0.91$.
Se tomará como resultado el valor de x tal que la suma de los cuadrados de los errores sea mínima. Es decir, el valor para el que la función
$E(x)=(x-m_1)^2+(x-m_2)^2+(x-m_3)^2+(x-m_4)^2+(x-m_5)^2$ alcanza el mínimo.
Calcule dicho valor x.

b) (1 punto) Aplique el método de integración por partes para calcular la integral $\int_1^2 x^2\ln(x)\,dx$, donde ln significa logaritmo neperiano.

a) La función es $E(x)=(x-0{,}92)^2+(x-0{,}94)^2+(x-0{,}89)^2+(x-0{,}9)^2+(x-0{,}91)^2$ con derivada

$$E'(x)=2(x-0{,}92)+2(x-0{,}94)+2(x-0{,}89)+2(x-0{,}9)+2(x-0{,}91)$$
$$E'(x)=10x-1{,}84-1{,}88-1{,}78-1{,}8-1{,}82$$
$$E'(x)=10x-9{,}12$$

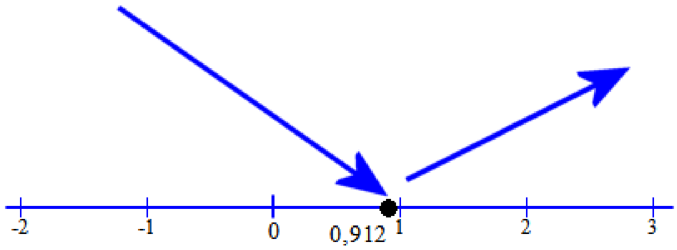
Si igualamos a cero.

$$E'(x)=0 \Rightarrow 10x-9{,}12=0 \Rightarrow 10x=9{,}12 \Rightarrow x=\frac{9{,}12}{10}=0{,}912$$

Comprobamos el signo de la derivada antes y después de 0,912.

En $(-\infty, 0.912)$ tomamos x = 0 y la derivada es $E'(0)=0-9{,}12=-9{,}12<0$. La función decrece.

En $(0{,}912,+\infty)$ tomamos x = 1 y la derivada es $E'(1)=10-9{,}12=0{,}88>0$. La función crece.



Por lo que en x = 0,912 hay un mínimo.

b) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int x^2\ln(x)\,dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=\ln(x)\to du=\frac{1}{x}dx\\ dv=x^2dx\to v=\int x^2dx=\frac{x^3}{3}\end{array}\right\}=\frac{x^3}{3}\ln(x)-\int\frac{x^3}{3}\frac{1}{x}dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}\ln(x)-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{x}dx=\frac{x^3}{3}\ln(x)-\frac{1}{3}\int x^2dx=\frac{x^3}{3}\ln(x)-\frac{1}{3}\frac{x^3}{3}$$

$$\int x^2\ln(x)\,dx=\frac{x^3}{3}\ln(x)-\frac{x^3}{9}+C$$

Lo aplicamos al problema.

$$\int_1^2 x^2\ln(x)dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)-\frac{x^3}{9}\right]_1^2 = \left[\frac{2^3}{3}\ln(2)-\frac{2^3}{9}\right]-\left[\frac{1^3}{3}\ln(1)-\frac{1^3}{9}\right] = \frac{8}{3}\ln 2-\frac{8}{9}+\frac{1}{9} = \boxed{\frac{8}{3}\ln 2-\frac{7}{9}}$$

Ejercicio 3 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dados los planos $\pi_1 \equiv 4x+6y-12z+1=0$, $\pi_2 \equiv -2x-3y+6z-5=0$, se pide:

a) (1 punto) Calcular el volumen de un cubo que tenga dos de sus caras en dichos planos.

b) (1.5 puntos) Para el cuadrado de vértices consecutivos ABCD, con A(2, 1, 3) y B(1, 2, 3), calcular los vértices C y D, sabiendo que C pertenece a los planos π_2 y $\pi_3 \equiv x-y+z=2$.

a) Veamos la posición relativa de los planos. Para ello veamos como son sus vectores normales. $\overrightarrow{n_1}=(4,6,-12)$ y $\overrightarrow{n_2}=(-2,-3,6)$.

¿Son paralelos los vectores?

$\frac{4}{-2}=\frac{6}{-3}=\frac{-12}{6}$ e iguales a –2. Los planos son paralelos.

El cubo del que nos piden su volumen tiene sus dos caras opuestas en cada uno de los planos. Averigüemos la distancia entre los planos y el volumen del cubo será esa distancia al cubo. Un punto del plano $\pi_1 \equiv 4x+6y-12z+1=0$ puede ser

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ z=0 \\ 4x+6y-12z+1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 6y+1=0 \Rightarrow y=\frac{-1}{6} \Rightarrow P_1\left(0,\frac{-1}{6},0\right)$$

Calculemos la distancia entre los planos paralelos como la distancia de un punto de uno de ellos al otro plano.

$$d(\pi_1,\pi_2)=d(P_1,\pi_2)=\frac{\left|\frac{3}{6}-5\right|}{\sqrt{4+9+36}}=\frac{\left|\frac{-27}{6}\right|}{\sqrt{49}}=\frac{\frac{27}{6}}{7}=\frac{27}{42}=\frac{9}{14}u$$

Volumen del cubo es $\left(\frac{9}{14}\right)^3=\boxed{\frac{729}{2744}u^3}$

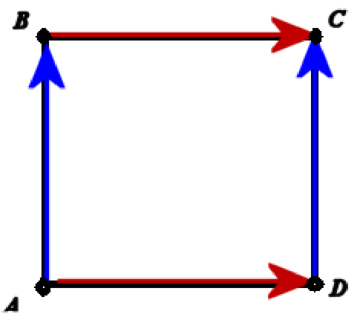
b) Averigüemos las coordenadas del punto C.

El punto de corte se obtiene de resolver el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de los planos $\pi_2 \equiv -2x-3y+6z-5=0$ y $\pi_3 \equiv x-y+z=2$

$$\left.\begin{array}{l} \pi_2 \equiv -2x-3y+6z-5=0 \\ \pi_3 \equiv x-y+z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2x-3y+6z-5=0 \\ x=y-z+2 \end{array}\right\} \Rightarrow -2y+2z-4-3y+6z-5=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5y+8z-9=0 \Rightarrow y=\frac{9-8z}{-5} \Rightarrow x=\frac{9-8z}{-5}-z+2=\frac{9-8z+5z-10}{-5} \Rightarrow x=\frac{-3z-1}{-5}=\frac{1+3z}{5}$$

El punto C tiene coordenadas $C\left(\frac{1+3z}{5},\frac{8z-9}{5},z\right)$.



Observando el dibujo se aprecia que son ortogonales los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$. Su producto escalar es cero.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(1,2,3)-(2,1,3)=(-1,1,0) \\ \overrightarrow{BC}=\left(\frac{1+3z}{5},\frac{8z-9}{5},z\right)-(1,2,3)=\left(\frac{3z-4}{5},\frac{8z-19}{5},z-3\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{3z-4}{5},\frac{8z-19}{5},z-3\right)(-1,1,0)=0$$

$$\frac{-3z+4}{5}+\frac{8z-19}{5}=0 \Rightarrow 5z-15=0 \Rightarrow z=3$$

$$\boxed{C\left(\frac{1+9}{5},\frac{24-9}{5},3\right)=(2,3,3)}$$

Además se cumple que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Averigüemos las coordenadas del punto D(a,b,c).

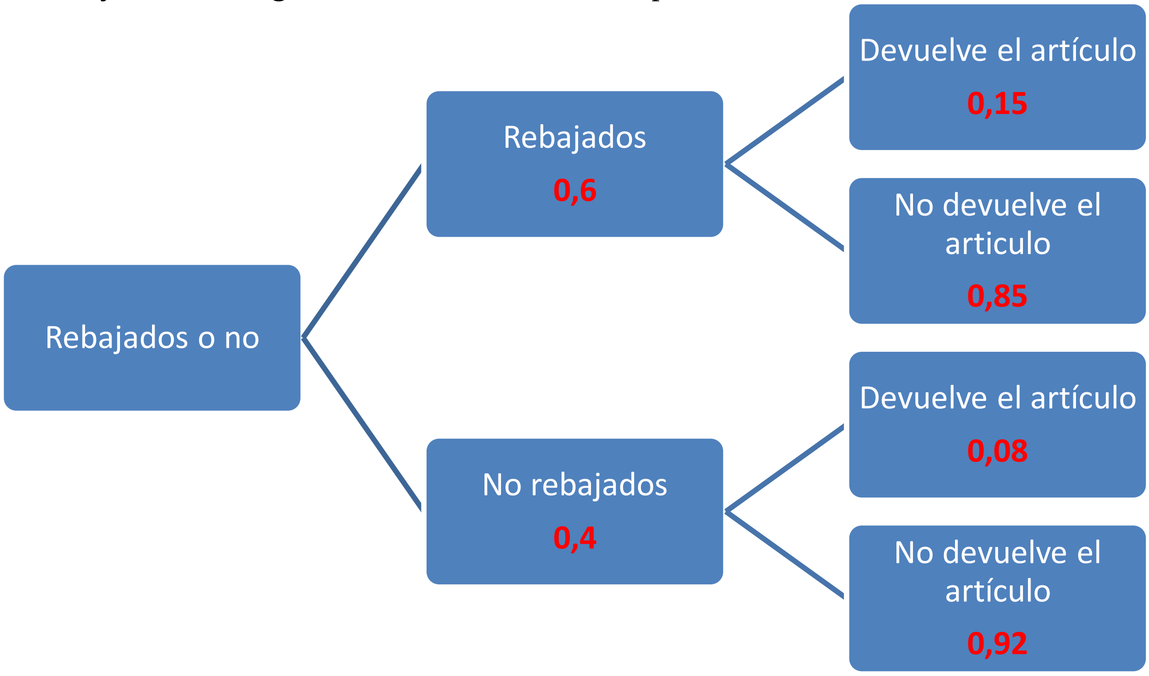
$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Rightarrow (1,2,3)-(2,1,3)=(2,3,3)-(a,b,c) \Rightarrow (-1,1,0)=(2-a,3-b,3-c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -1=2-a \\ 1=3-b \\ 0=3-c \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=3 \\ b=2 \\ c=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{D(3,2,3)}$$

Ejercicio 4 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.
El 60% de las ventas en unos grandes almacenes corresponden a artículos con precios rebajados. Los clientes devuelven el 15% de los artículos que compran rebajados, porcentaje que disminuye al 8% si los artículos han sido adquiridos sin rebajas.

a) (1.25 puntos) Determine el porcentaje global de artículos devueltos.
b) (1.25 puntos) ¿Qué porcentaje de artículos devueltos fueron adquiridos con precios rebajados?

Construyamos un diagrama de árbol asociado al experimento.



a)

$$P(\text{Un artículo sea devuelto})=P(\text{Artículo sea rebajado})\cdot P(\text{Artículo sea devuelto / Es rebajado})+$$
$$+P(\text{Artículo no sea rebajado})\cdot P(\text{Artículo sea devuelto / No es rebajado})=$$
$$=0,6\cdot 0,15+0,4\cdot 0,08=0,090+0,032=0,122$$

El porcentaje es del 12,2%.

b)

$$P\left(\text{Sea rebajado / Es devuelto}\right)=\frac{P\left(\text{Sea rebajado y sea devuelto}\right)}{P\left(\text{Es devuelto}\right)}=\frac{0,09}{0,122}=0,737$$

El porcentaje es del 73,7%

OPCIÓN B

Ejercicio 1 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} m & 0 & 2 \\ -2 & 4 & m \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Obtener los valores del parámetro m para los que la matriz A admite inversa.
b) (1 punto) Para $m=0$, calcular $A\cdot B$ y $A^{-1}\cdot B$.
c) (0.5 puntos) Calcular $B^t\cdot B$ y $B\cdot B^t$, donde B^t denota la matriz traspuesta de B.

a) Para que una matriz tenga inversa debe tener determinante no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix} m & 0 & 2 \\ -2 & 4 & m \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-4m-4-m^2$$

Igualamos a cero

$$|A|=0 \Rightarrow m^2+4m+4=0 \Rightarrow m=\frac{-4\pm\sqrt{16-16}}{2}=\frac{-4}{2}=-2$$

La matriz A tiene inversa siempre que $m\neq -2$

b) Para $m=0$ la matriz A queda

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular $A^{-1}\cdot B$ debemos hallar la inversa de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-4\neq 0 \Rightarrow \text{Existe la inversa}$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}}{-4}=\frac{-1}{4}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{-1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 2 & -8 \\ -2 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}\cdot B=\frac{-1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 2 & -8 \\ -2 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\frac{-1}{4}\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c)

$$B=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix} \text{ y } B^t=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$B^t\cdot B=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1x3)\cdot(3x1)\ =\ 1x1}$$

$$B\cdot B^t=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3x1)\cdot(1x3)\ =\ 3x3}$$

<u>Ejercicio 2</u> : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dada la función $f(x)=\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Determinar, si existen, las asíntotas horizontales de *f(x)*.

b) (0.75 puntos) Calcular $f'(4)$.

c) (1.25 puntos) Hallar el área del recinto limitado por la curva *y = f(x)*, el eje OX y las rectas $x=-1$ y $x=1$.

a) Asíntota vertical. $x=a$

Como el dominio es todo R. no hay asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$$

$$b=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2+9}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{-x}=1$$

La asíntota horizontal es $y=1$.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

No hay, al existir asíntota horizontal.

b)

Como la función $f(x)=\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}$ se puede expresar como:

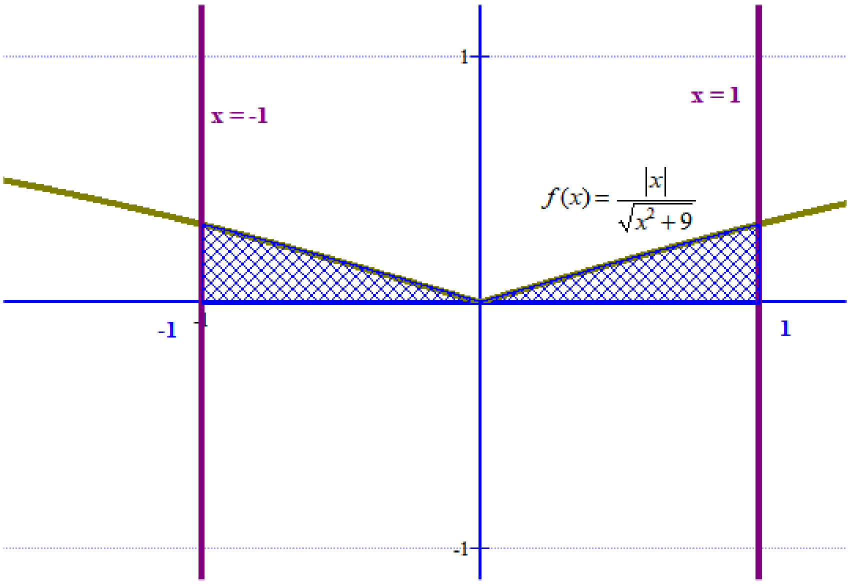
$$f(x)=\begin{cases}=\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+9}} & si \quad x\le 0\\[2ex] =\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}} & si \quad x>0\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases} =\dfrac{-\sqrt{x^2+9}+x\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}}{\left(\sqrt{x^2+9}\right)^2}=\dfrac{-\sqrt{x^2+9}+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}}{x^2+9} & si \quad x<0 \\ =\dfrac{\sqrt{x^2+9}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}}{x^2+9} & si \quad x>0 \end{cases}$$

El valor de $f'(4)=\dfrac{\sqrt{4^2+9}-\dfrac{4^2}{\sqrt{4^2+9}}}{4^2+9}=\dfrac{5-\dfrac{16}{5}}{25}=\dfrac{\dfrac{9}{5}}{25}=\boxed{\dfrac{9}{125}}$

c)

La función $f(x)=\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}$ solo corta al eje OX en x = 0, pero siempre es positiva. La región de la cual nos piden el área es la de la figura:



Como se puede apreciar es menor que 1 u^2.
Calculémosla con el uso de una integral definida y teniendo en cuenta la simetría, el área pedida es el doble del área entre 0 y 1.

$$Área=2\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}dx=2\int_0^1\frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}dx=2\left[\sqrt{x^2+9}\right]_0^1=2\left(\left[\sqrt{1^2+9}\right]-\left[\sqrt{0^2+9}\right]\right)$$

$$Área=2\left(\sqrt{10}-3\right)=2\sqrt{10}-6\,u^2=\boxed{0,32\,u^2}$$

OTRA FORMA DE CALCULAR EL ÁREA
Como la función siempre es positiva, aunque corte el eje OX en x = 0, el área es:

$$Área=\int_{-1}^{0}\frac{-x}{\sqrt{x^2+9}}dx+\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}dx=-\int_{-1}^{0}\frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}dx+\int_0^1\frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}dx=\left[-\sqrt{x^2+9}\right]_{-1}^{0}+\left[\sqrt{x^2+9}\right]_0^1=$$

$$=\left(\left[-\sqrt{0^2+9}\right]-\left[-\sqrt{(-1)^2+9}\right]\right)+\left(\left[\sqrt{1^2+9}\right]-\left[\sqrt{0^2+9}\right]\right)=-3+\sqrt{10}+\sqrt{10}-3$$

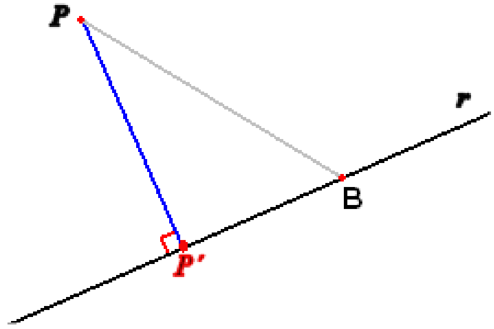
$$Área=2\sqrt{10}-6\,u^2=\boxed{0,32\,u^2}$$

Ejercicio 3 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.

Dados el punto P(1, 1, 1) y las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x+y=2 \\ 5x+z=6 \end{cases}$, $s \equiv \frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{1/3}$ se pide:

a) (1 punto) Hallar la distancia del punto *P* a la recta *r*.
b) (1 punto) Estudiar la posición relativa de las rectas *r* y *s*.
c) (0.5 puntos) Hallar el plano perpendicular a la recta *s* y que pasa por el punto *P*.

a) La situación es la del dibujo.



Podemos hallar esta distancia calculando las coordenadas del punto P´ que pertenece a la recta r, tal que el segmento $\overline{PP'}$ es perpendicular a r.
Determinamos la ecuación de la recta r´ perpendicular a r y que pasa por P.

$$r \equiv \begin{cases} 2x+y=2 \\ 5x+z=6 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=x \\ y=2-2x \\ z=6-5x \end{cases}$$

El vector director de r es $\vec{u_r}=(1,-2,-5)$. Si P´ pertenece a r sus coordenadas son $P'(x,2-2x,6-5x)$.

$$\overrightarrow{PP'}=(x,2-2x,6-5x)-(1,1,1)=(x-1,1-2x,5-5x)$$

$$\overrightarrow{PP'}\cdot\vec{u_r}=0 \Rightarrow (x-1,1-2x,5-5x)(1,-2,-5)=0 \Rightarrow x-1-2+4x-25+25x=0$$

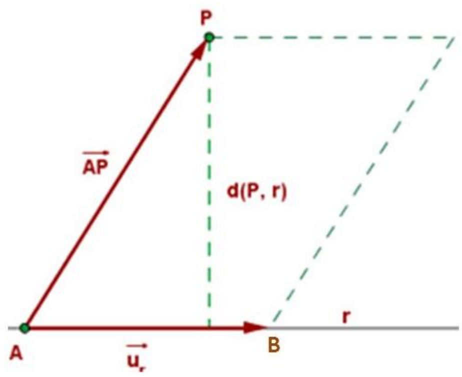
$$30x-28=0 \Rightarrow x=\frac{28}{30}=\frac{14}{15}$$

$$\overrightarrow{PP'}=\left(\frac{14}{15}-1,1-2\frac{14}{15},5-5\frac{14}{15}\right)=\left(\frac{-1}{15},\frac{-13}{15},\frac{5}{15}\right)$$

$$d(P,r)=\left|\overrightarrow{PP'}\right|=\sqrt{\left(\frac{-1}{15}\right)^2+\left(\frac{-13}{15}\right)^2+\left(\frac{5}{15}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{225}+\frac{169}{225}+\frac{25}{225}}=\sqrt{\frac{195}{225}}$$

$$\boxed{d(P,r)=\sqrt{\frac{195}{225}}=\sqrt{\frac{13}{15}}=0,93\,u}$$

OTRA FORMA DE HACERLO



Si obtenemos un punto cualquiera de la recta.

La ecuación de la recta es $r \equiv \begin{cases} x = x \\ y = 2-2x \\ z = 6-5x \end{cases}$, un punto de esta recta es A(0,2,6). La distancia del punto P a la recta r es el cociente del módulo del producto vectorial del vector $\overrightarrow{u_r}$ y $\overrightarrow{AP}$ (el área del paralelogramo formado por los vectores), dividido entre el módulo del vector director $\overrightarrow{u_r}$ (la base del paralelogramo).

$$\overrightarrow{AP} = (1,1,1)-(0,2,6) = (1,-1,-5)$$

$$\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -5 \\ 1 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 5i-5j-2k+k+5j-10i = -5i-k = (-5,0,-1)$$

$$d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{u_r}\right|}{\left|\overrightarrow{u_r}\right|} = \frac{\sqrt{25+1}}{\sqrt{1+4+25}} = \sqrt{\frac{26}{30}} = \boxed{\sqrt{\frac{13}{15}}\ u}$$

b) Para estudiar la posición relativa de las rectas veamos si sus vectores directores tienen coordenadas proporcionales (rectas paralelas o coincidentes).

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,-2,-5) \\ \overrightarrow{u_s} = \left(-1,1,\frac{1}{3}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{-1} \neq \frac{-2}{1} \neq \frac{-5}{1/3}$$

Las rectas no son paralelas ni coincidentes.

¿Son secantes o se cruzan?

Planteamos el sistema formado por las dos rectas, si tiene solución se cortan (al haber punto de intersección entre ellas) y si no tiene solución se cruzan (al no haber punto de intersección entre ellas).

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = t' \\ y = 2-2t' \\ z = 6-5t' \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = 2-t \\ y = -1+t \\ z = 1+\frac{1}{3}t \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t' = 2-t \\ 2-2t' = -1+t \\ 6-5t' = 1+\frac{1}{3}t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2-2(2-t) = -1+t \\ 6-5(2-t) = 1+\frac{1}{3}t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2-4+2t = -1+t \\ 6-10+5t = 1+\frac{1}{3}t \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} t = 1 \\ 5t-\frac{1}{3}t = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow 5-\frac{1}{3} = 5$$ Esta igualdad es imposible.

El sistema no tiene solución y las rectas se cruzan (no tienen punto en común, pero no son paralelas).

c) El plano perpendicular a la recta $s \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1/3}$ tiene como vector normal el director de s, es decir, $\overrightarrow{u_s} = \left(-1,1,\frac{1}{3}\right)$. El plano tiene ecuación:

$\pi \equiv -x+y+\frac{1}{3}z+D=0$. Como además pasa por el punto P(1, 1, 1), se debe cumplir:

$$-1+1+\frac{1}{3}+D=0 \Rightarrow \frac{1}{3}+D=0 \Rightarrow D=-\frac{1}{3}.$$

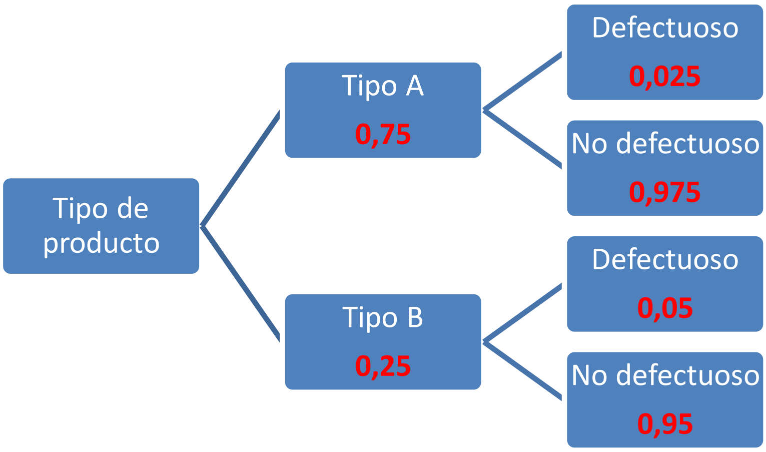
El plano pedido tiene ecuación $\pi \equiv -x+y+\frac{1}{3}z-\frac{1}{3}=0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv -3x+3y+z-1=0}$

Ejercicio 4 : **Calificación máxima:** 2.5 puntos.
En una fábrica se elaboran dos tipos de productos: A y B. El 75% de los productos fabricados son de tipo A y el 25% de tipo B. Los productos de tipo B salen defectuosos un 5% de las veces, mientras que los de tipo A salen defectuosos un 2.5% de las veces.

a) (1 punto) Si se fabrican 5000 productos en un mes, ¿cuántos de ellos se espera que sean defectuosos?

b) (1.5 puntos) Un mes, por motivos logísticos, se cambió la producción, de modo que se fabricaron exclusivamente productos de tipo A. Sabiendo que se fabricaron 6000 unidades, determinar, aproximando la distribución por una normal, la probabilidad de que haya más de 160 unidades defectuosas.

Realizamos un diagrama de árbol con la situación planteada.



a)
$$P(Defectuoso)=P(\text{Es del tipo A})\cdot P(\text{Es defectuoso/Tipo A})+$$
$$+P(\text{Es del tipo B})\cdot P(\text{Es defectuoso/Tipo B})=0,75\cdot 0,025+0,25\cdot 0,05=$$
$$=\boxed{0,03125}$$

5000 · 0,03125 = 156,25 saldrán defectuosos.
Aproximadamente 156 productos saldrán defectuosos.

b) Sea X = Número de productos defectuosos del tipo A.
n = número de repeticiones = 6000.
Probabilidad de sacar un producto defectuoso es de 0,025. p = 0,025

X = B(6000, 0,025)
Se aproxima a una normal de media $\mu = n\cdot p = 6000\cdot 0,025 = 150$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{6000\cdot 0,025\cdot 0,975} = 12,1$. Esto es posible dado que n es muy grande y np > 20.
X = B(6000, 0,025) se aproxima a una normal N(150, 12,1).

$$P(X>160)=\{\text{Corrección de Yates}\}=P(X\geq 160,5)=$$
$$=1-P(X<160,5)=\{Tipifico\}=1-P\left(\frac{X-150}{12,1}<\frac{160,5-150}{12,1}\right)=$$
$$=1-P(Z<0,867)=1-\frac{0,8051+0,8078}{2}=\boxed{0,193}$$