Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA — EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2021ko EKAINA — ORDINARIA 2021

MATEMATIKA II — **MATEMÁTICAS II**

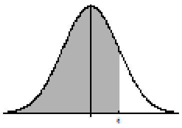
Este examen tiene cinco partes, de 2,5 puntos cada una. Debes responder a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder a una única pregunta.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1

Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro α:

$$\begin{cases} \alpha x - y + z = 1 \\ 3x - y + \alpha z = \alpha \\ x + (\alpha - 1) z = 1 \end{cases}$$

Resolver el sistema para $\alpha = 3$, si es posible.

Ejercicio B1

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Determinar para qué valores del parámetro α la matriz A no tiene inversa.

b) Calcular, si es posible, la matriz inversa de A para $\alpha = 2$.

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2

Sea *r* la recta que pasa por los puntos $A = (1, a, -1)$ y $B = (b, 1, 1)$ y π el plano de ecuación $x + y - 2z = 2b$.

a) Calcular los valores de los parámetros *a* y *b* para que la recta *r* sea perpendicular al plano π.
b) Calcular los valores de los parámetros *a* y *b* para que la recta *r* esté contenida en el plano π.

Ejercicio B2

Encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P = (-2, 1, 0)$ y corta perpendicularmente a la recta *r* de ecuaciones paramétricas

$$\{x = 1 - 2t,\ y = 1 + t,\ z = t\}$$

Calcular la distancia de P al punto de corte de ambas rectas.

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Estudiar los máximos, mínimos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = 5 + 8x^2 - x^4$. Representa la gráfica de *f*.

Ejercicio B3

Sea la función $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + A$.

a) Obtener los valores de los parámetros A, B y C para que la gráfica de *f* pase por el punto (0, 1) y tenga un mínimo en el punto (1, 1).
b) ¿La función obtenida tiene otros máximos o mínimos? En caso afirmativo, encontrarlos.

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

Sean las funciones $f(x)=1/x$, $g(x)=x^2$, $h(x)=x^2/8$.

a) Dibujar el recinto finito, en el primer cuadrante, limitado por las gráficas de esas tres funciones.
b) Calcular el área de dicho recinto.

Ejercicio B4

Calcular, explicando los métodos utilizados,

$$I=\int(x+2)\sin(2x)dx \quad y \quad J=\int\frac{x+7}{x^2-4x-5}dx$$

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5

En una farmacia se ha recibido un lote de medicamentos de los tipos A, I y M. El 80 % corresponde al medicamento A, el 10 % al I y el resto al M. En la revisión realizada por la farmacéutica se ha observado que hay medicamentos caducados en los siguientes porcentajes: el 10 % de A, el 20 % de I y el 5 % de M. Se elige una caja de medicamentos al azar. Hallar:

a) La probabilidad de coger un medicamento caducado.
b) Si sabemos que el medicamento está caducado, la probabilidad de que sea del tipo A.

Ejercicio B5

En una ciudad se han elegido al azar 3900 personas. Hallar:

a) La probabilidad de que al menos 15 de ellas cumplan años el día del patrón de la ciudad.
b) La probabilidad de que el número de personas que cumplan años el día del patrón esté comprendido entre 5 y 15, ambos incluidos.

Soluciones

Ejercicio A1

Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro α:

$$\begin{cases} \alpha x - y + z = 1 \\ 3x - y + \alpha z = \alpha \\ x + (\alpha - 1) z = 1 \end{cases}$$

Resolver el sistema para $\alpha = 3$, si es posible.

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 1 \\ 3 & -1 & \alpha \\ 1 & 0 & \alpha - 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & \alpha & \alpha \\ 1 & 0 & \alpha - 1 & 1 \end{array}\right).$$

Veamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & -1 & 1 \\ 3 & -1 & \alpha \\ 1 & 0 & \alpha - 1 \end{vmatrix} = -\alpha^2 + \alpha - \alpha + 1 + 3\alpha - 3 = -\alpha^2 + 3\alpha - 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -\alpha^2 + 3\alpha - 2 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(-1)(-2)}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2} = \begin{cases} \frac{-3+1}{-2} = 1 \\ \frac{-3-1}{-2} = 2 \end{cases}$$

Hay tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $\alpha \neq 1 \ y \ \alpha \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $\alpha = 1$

Para este valor el sistema queda:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3x - y + z = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Dado lo sencillo que queda el sistema lo resolvemos y establecemos que tipo de sistema es.

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 3x - y + z = 1 \\ \boxed{x = 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - y + z = 1 \\ 3 - y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + z = 0 \\ -y + z = -2 \end{cases} \Rightarrow \text{¡¡Imposible!!}$$

Hay dos ecuaciones que el primer miembro de la igualdad es igual pero el otro es distinto, una situación imposible de resolver.

El sistema es **incompatible** (sin solución)

CASO 3. $\alpha = 2$

Para este valor el sistema queda:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ 3x - y + 2z = 2 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

Dado lo sencillo que queda el sistema lo resolvemos y establecemos que tipo de sistema es.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ 3x - y + 2z = 2 \\ x + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ 3x - y + 2z = 2 \\ x = 1 - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(1-z) - y + z = 1 \\ 3(1-z) - y + 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - 2z - y + z = 1 \\ 3 - 3z - y + 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -y - z = -1 \\ -y - z = -1 \end{cases} \Rightarrow \{\text{Ecuaciones iguales}\} \Rightarrow -y - z = -1 \Rightarrow y + z = 1 \Rightarrow \boxed{y = 1 - z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 1 - (1 - z) = z} \Rightarrow \text{Soluciones:} \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t;\ t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

Hay infinitas soluciones.

El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones)

Para $\alpha = 3$ el sistema es compatible determinado (CASO 1).

Lo resolvemos utilizando Cramer.

$$\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ 3x - y + 3z = 3 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$$

Con matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -6 - 3 + 1 + 6 = -2$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-2 - 3 + 1 + 6}{-6 - 3 + 1 + 6} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 3 & 3 & 3\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 3 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}}=\frac{18+3+3-3-6-9}{-2}=\frac{6}{-2}=-3$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 3 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 3 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}}=\frac{-3-3+1+3}{-2}=\frac{-2}{-2}=1$$

La solución del sistema es $x=-1;\ y=-3;\ z=1$

Ejercicio B1
Sea la matriz

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & \alpha\\ 1 & \alpha & 1\\ 0 & \alpha & -1\end{pmatrix}.$$

a) Determinar para qué valores del parámetro α la matriz A no tiene inversa.

b) Calcular, si es posible, la matriz inversa de A para $\alpha=2$.

a) Averiguamos cuando el determinante de A es no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 3 & \alpha\\ 1 & \alpha & 1\\ 0 & \alpha & -1\end{vmatrix}=-2\alpha+\alpha^2+3-2\alpha=\alpha^2-4\alpha+3$$

$$|A|=0\Rightarrow \alpha^2-4\alpha+3=0\Rightarrow \alpha=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-12}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases}\frac{4+2}{2}=3\\ \frac{4-2}{2}=1\end{cases}$$

El determinante de A se anula para $\alpha=1$ y $\alpha=3$.
Para $\alpha=1$ y $\alpha=3$ la matriz A no tiene inversa.

b) Para $\alpha=2$ la matriz A tiene inversa pues α es distinto de 1 y 3.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{vmatrix}=-4+4+3-4=-1\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 0\\ 3 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=-\begin{pmatrix}-4 & 7 & -1\\ 1 & -2 & 0\\ 2 & -4 & 1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}4 & -7 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ -2 & 4 & -1\end{pmatrix}}$$

Ejercicio A2

Sea *r* la recta que pasa por los puntos $A=(1,a,-1)$ y $B=(b,1,1)$ y π el plano de ecuación $x+y-2z=2b$.

a) Calcular los valores de los parámetros *a* y *b* para que la recta *r* sea perpendicular al plano π.
b) Calcular los valores de los parámetros *a* y *b* para que la recta *r* esté contenida en el plano π.

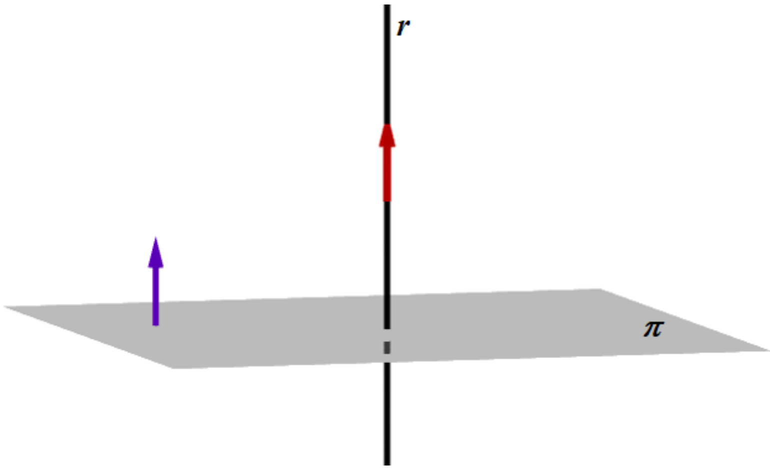
La recta *r* que pasa por los puntos $A=(1,a,-1)$ y $B=(b,1,1)$ tiene como vector director $\overrightarrow{AB}$:

$\overrightarrow{AB}=(b,1,1)-(1,a,-1)=(b-1,1-a,2)$ y su ecuación es:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_r=\overrightarrow{AB}=(b-1,1-a,2)\\ A=(1,a,-1)\in r\end{array}\right\}\Rightarrow r:\begin{cases}x=1+(b-1)\lambda\\ y=a+(1-a)\lambda\\ z=-1+2\lambda\end{cases}$$

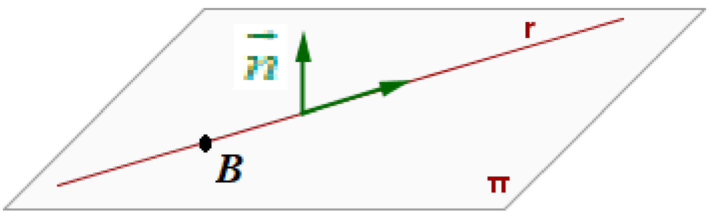
a) Si la recta *r* es perpendicular al plano el vector normal del plano y el director de la recta deben indicar la misma dirección, por lo que sus coordenadas deben ser proporcionales.

$$\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{AB}=(b-1,1-a,2)\\ \pi:x+y-2z=2b\Rightarrow\vec{n}=(1,1,-2)\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{b-1}{1}=\frac{1-a}{1}=\frac{2}{-2}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{b-1}{1}=\dfrac{2}{-2}\to b-1=-1\Rightarrow\boxed{b=0}\\ \dfrac{1-a}{1}=\dfrac{2}{-2}\to 1-a=-1\Rightarrow\boxed{a=2}\end{cases}$$



Los valores necesarios para que la recta *r* sea perpendicular al plano π son *a = 2* y *b = 0.*

b) Si la recta *r* está contenida en el plano debe cumplirse que el vector normal del plano y el director de la recta sean perpendiculares, es decir, su producto escalar sea cero.



$$\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{AB}=(b-1,1-a,2)\\ \pi: x+y-2z=2b \Rightarrow \vec{n}=(1,1,-2)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0 \Rightarrow (b-1,1-a,2)(1,1,-2)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b-1+1-a-4=0 \Rightarrow \boxed{b-a=4}$$

y además que el punto $B=(b,1,1)$ de la recta debe pertenecer al plano π.

$$\left.\begin{array}{l}B=(b,1,1)\in\pi\\ \pi: x+y-2z=2b\end{array}\right\} \Rightarrow b+1-2=2b \Rightarrow \boxed{-1=b}$$

Combinando las dos ecuaciones obtenidas tenemos:

$$\left.\begin{array}{l}b-a=4\\ b=-1\end{array}\right\} \Rightarrow -1-a=4 \Rightarrow \boxed{-5=a}$$

Los valores necesarios para que la recta *r* esté contenida en el plano π son *a = –5* y *b = –1*.

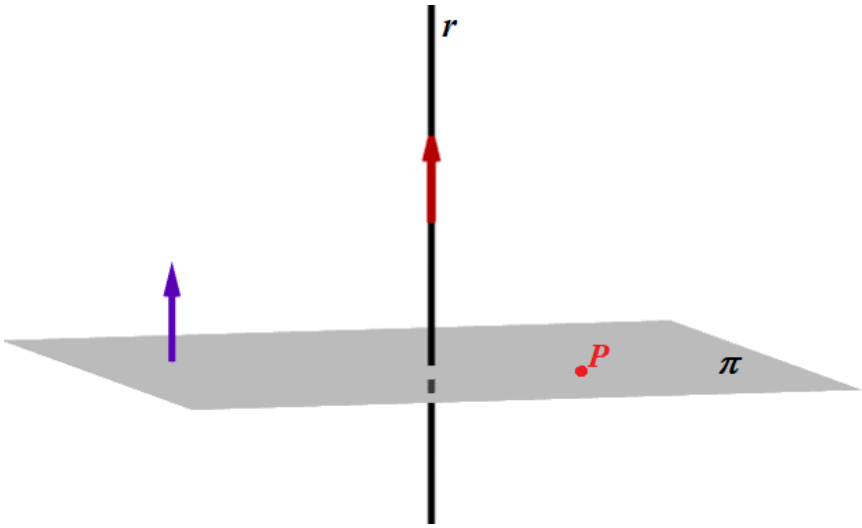
Ejercicio B2

Encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $P=(-2,1,0)$ y corta perpendicularmente a la recta *r* de ecuaciones paramétricas

$$\{x=1-2t,\ y=1+t,\ z=t\}$$

Calcular la distancia de P al punto de corte de ambas rectas.

Hallamos primero el plano π perpendicular a la recta *r* que pasa por el punto P.



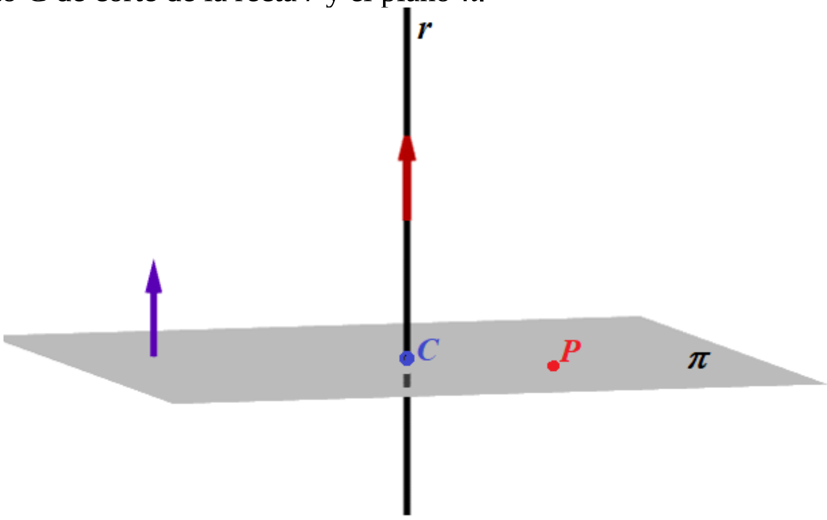
El plano tiene como vector normal el director de la recta.

$$r:\{x=1-2t,\ y=1+t,\ z=t\} \Rightarrow \overrightarrow{v_r}=(-2,1,1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}=\overrightarrow{v_r}=(-2,1,1)\\ P=(-2,1,0)\in\pi\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\pi:-2x+y+z+D=0\\ P=(-2,1,0)\in\pi\end{array}\right\} \Rightarrow -2(-2)+1+0+D=0 \Rightarrow D=-5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi:-2x+y+z-5=0$$

Hallamos el punto C de corte de la recta *r* y el plano π.

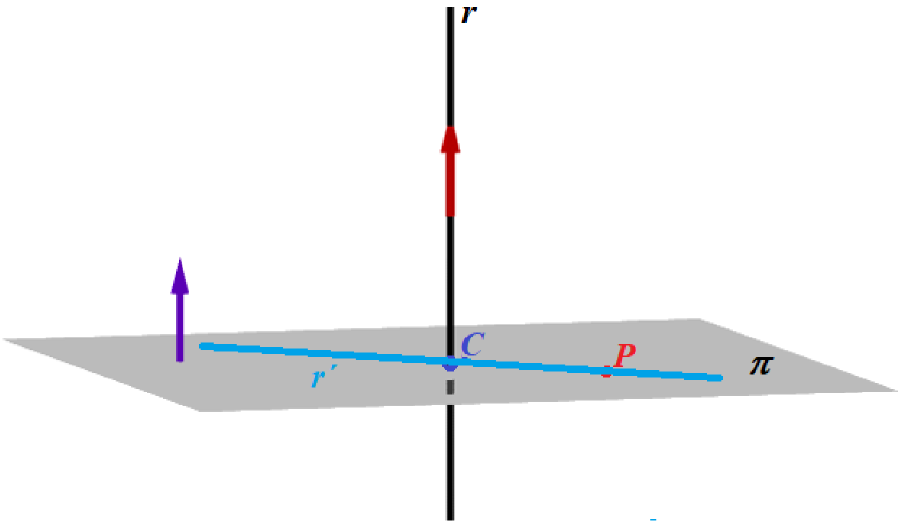


$$\left.\begin{array}{l} r:\begin{cases} x=1-2t \\ y=1+t \\ z=t \end{cases} \\ \pi:-2x+y+z-5=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -2(1-2t)+(1+t)+t-5=0 \Rightarrow -2+4t+1+t+t-5=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6t-6=0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1-2=-1 \\ y=1+1=2 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C(-1,2,1)}$$

La recta $r´$ perpendicular a la recta r que pasa por el punto P es la recta que pasa por los puntos P y C.

$$\left.\begin{array}{l} C(-1,2,1) \\ P=(-2,1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{u}=\overrightarrow{PC}=(-1,2,1)-(-2,1,0)=(1,1,1) \\ P=(-2,1,0)\in r´ \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{r´:\begin{cases} x=-2+t \\ y=1+t \\ z=t \end{cases}}$$



Como el punto de corte de ambas rectas es el punto C la distancia pedida es la distancia del punto P al C, que es el módulo del vector $\overrightarrow{PC}$ que une ambos puntos.

$$\overrightarrow{PC}=(-1,2,1)-(-2,1,0)=(1,1,1)$$

$$\boxed{Distancia(P,C)=\left|\overrightarrow{PC}\right|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}\ u}$$

Ejercicio A3
Estudiar los máximos, mínimos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=5+8x^2-x^4$. Representa la gráfica de *f*.

Utilizamos la derivada de $f(x)=5+8x^2-x^4$ y averiguamos cuando se anula para determinar sus puntos críticos.

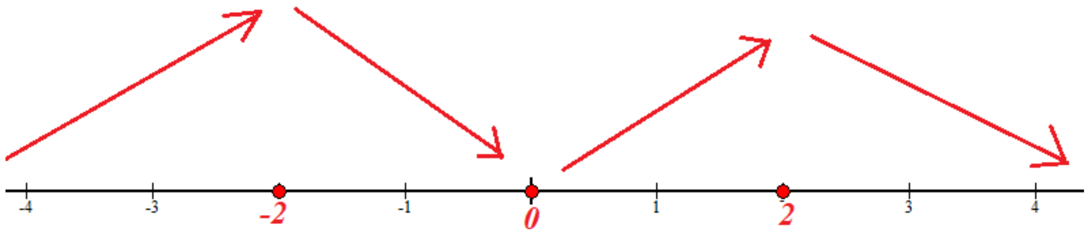
$$f(x)=5+8x^2-x^4 \Rightarrow f'(x)=16x-4x^3$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 16x-4x^3=0 \Rightarrow 4x\left(4-x^2\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ o \\ 4-x^2=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2 \end{cases}$$

La función tiene 3 puntos críticos: *x = –2, x = 0, x = 2.*
Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos 3 valores obtenidos.

- En $(-\infty,-2)$ tomamos *x = –3* y la derivada vale $f'(-3)=16(-3)-4(-3)^3=60>0$. La función crece en $(-\infty,-2)$.
- En $(-2,0)$ tomamos *x = –1* y la derivada vale $f'(-1)=16(-1)-4(-1)^3=-12<0$. La función decrece en $(-2,0)$.
- En $(0,2)$ tomamos *x = 1* y la derivada vale $f'(1)=16-4(1)^3=12>0$. La función crece en $(0,2)$.
- En $(2,+\infty)$ tomamos *x = 3* y la derivada vale $f'(3)=16(3)-4(3)^3=-60<0$. La función decrece en $(2,+\infty)$.

La función es continua y sigue el esquema siguiente.



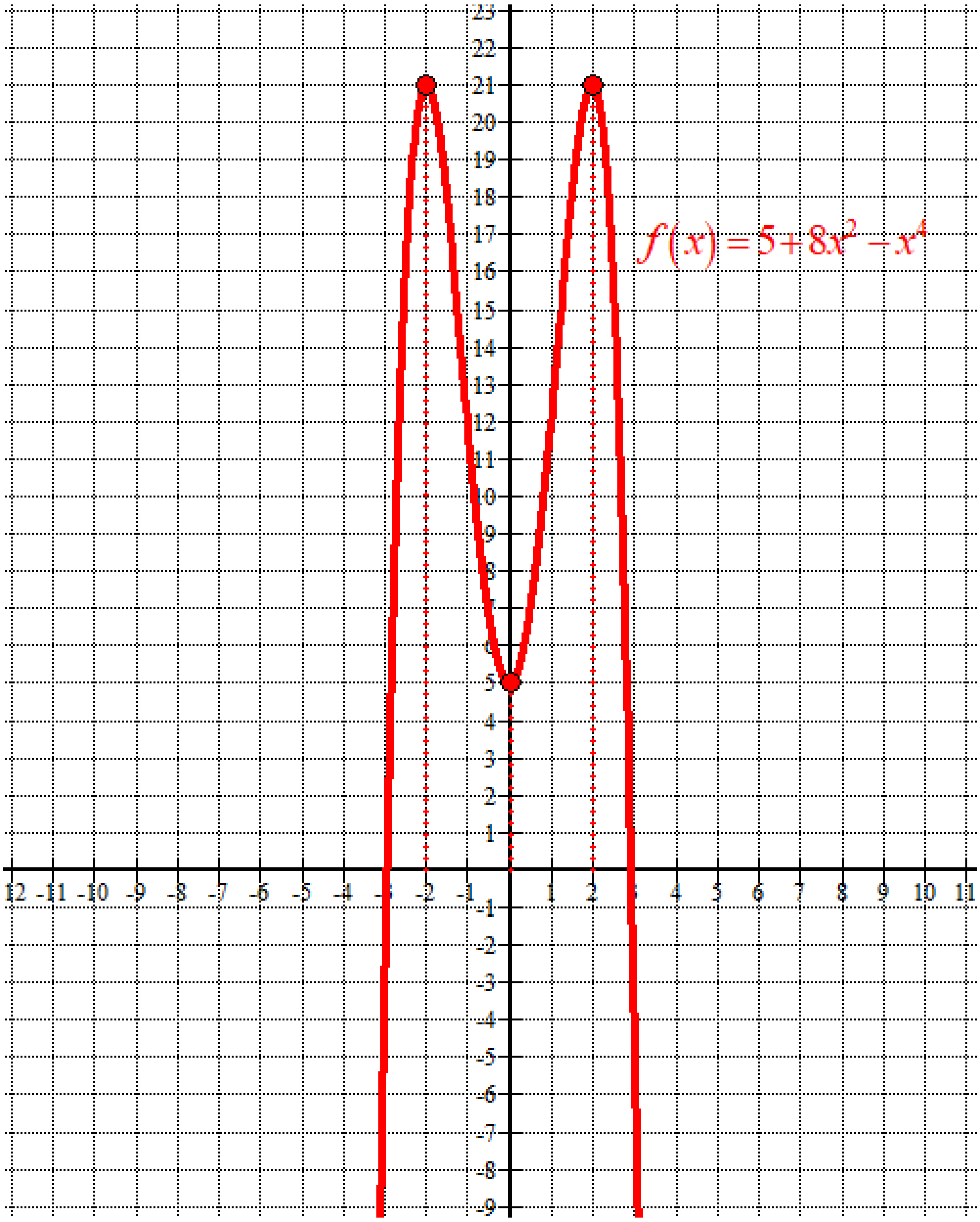
La función crece en $(-\infty,-2)\cup(0,2)$ y decrece en $(-2,0)\cup(2,+\infty)$.

La función presenta dos máximos relativos en *x = –2* y en *x = 2.*
Como $f(-2)=5+8(-2)^2-(-2)^4=5+32-16=21$ **y** $f(2)=5+8(2)^2-2^4=21$ las coordenadas de los máximos relativos son (–2, 21) y (2, 21).

La función presenta un mínimo relativo en *x = 0.*
Como $f(0)=5$ las coordenadas del mínimo relativo son (0, 5).

Para dibujar la gráfica hacemos una tabla de valores.

x	$y=5+8x^2-x^4$
-3	-4
-2	21
0	5
2	21
3	-4



Ejercicio B3
Sea la función $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + A$.
a) Obtener los valores de los parámetros A, B y C para que la gráfica de *f* pase por el punto (0, 1) y tenga un mínimo en el punto (1, 1).
b) ¿La función obtenida tiene otros máximos o mínimos? En caso afirmativo, encontrarlos.

a) Si la gráfica de la función pasa por el punto (0, 1) se cumple que *f(0) = 1*.

$$\left.\begin{array}{r} f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + A \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0) = 1 = A(0)^3 + B(0)^2 + C(0) + A = A \Rightarrow \boxed{A = 1}$$

La función queda $f(x) = x^3 + Bx^2 + Cx + 1$

Como la función pasa por el punto (1, 1) que es mínimo se cumple que *f(1) = 1*.

$$\left.\begin{array}{r} f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + A \\ f(1) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1) = 1 = (1)^3 + B(1)^2 + C(1) + 1 \Rightarrow 1 = B + C + 2 \Rightarrow \boxed{B + C = -1}$$

Como el punto (1, 1) es mínimo de la función la derivada se anula para *x = 1*.

$$\left.\begin{array}{r} f(x) = x^3 + Bx^2 + Cx + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2Bx + C \\ f'(1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(1) = 3(1)^2 + 2B(1) + C = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 + 2B + C = 0 \Rightarrow \boxed{C = -3 - 2B}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y determinamos el valor de B y de C.

$$\left.\begin{array}{l} B + C = -1 \\ C = -3 - 2B \end{array}\right\} \Rightarrow B - 3 - 2B = -1 \Rightarrow -B = -1 + 3 \Rightarrow \boxed{B = -2} \Rightarrow \boxed{C = -3 + 4 = 1}$$

Los valores de los parámetros son A = 1, B = –2 y C = 1.
La función queda $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$
Podemos comprobar que en *x = 1* presenta un mínimo pues su derivada primera se anula y la segunda toma valor positivo.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x - 4$$

$$f'(1) = 3 - 4 + 1 = 0 \quad y \quad f''(1) = 6 - 4 = 2 > 0$$

b) Igualamos a cero la derivada primera y obtenemos el resto de puntos críticos.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 12}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} = \begin{cases} \dfrac{4+2}{6} = 1 \\ \dfrac{4-2}{6} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

La función tiene dos puntos críticos: $x = 1$, $x = 1/3$.

En $x = 1$ ya hemos visto que hay un mínimo relativo.
Averiguamos que ocurre en $x = 1/3$ sustituyendo este valor en la segunda derivada.

$$f''(x) = 6x - 4 \Rightarrow f''\left(\frac{1}{3}\right) = 6\left(\frac{1}{3}\right) - 4 = -2 < 0$$

La función presenta un máximo relativo en $x = 1/3$.

Ejercicio A4

Sean las funciones $f(x)=1/x$, $g(x)=x^2$, $h(x)=x^2/8$.

a) Dibujar el recinto finito, en el primer cuadrante, limitado por las gráficas de esas tres funciones.
b) Calcular el área de dicho recinto.

a) Averiguamos los puntos de corte entre las funciones.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=1/x \\ g(x)=x^2 \\ f(x)=g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{x}=x^2 \Rightarrow 1=x^3 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt[3]{1}=1}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=1/x \\ h(x)=x^2/8 \\ f(x)=h(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{x^2}{8} \Rightarrow 8=x^3 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt[3]{8}=2}$$

$$\left.\begin{array}{l} g(x)=x^2 \\ h(x)=x^2/8 \\ g(x)=h(x) \end{array}\right\} \Rightarrow x^2=\frac{x^2}{8} \Rightarrow 8x^2=x^2 \Rightarrow 7x^2=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt{0}=0}$$

Hacemos una tabla de valores para cada función en el intervalo (0, 2).

$f(x)=1/x$

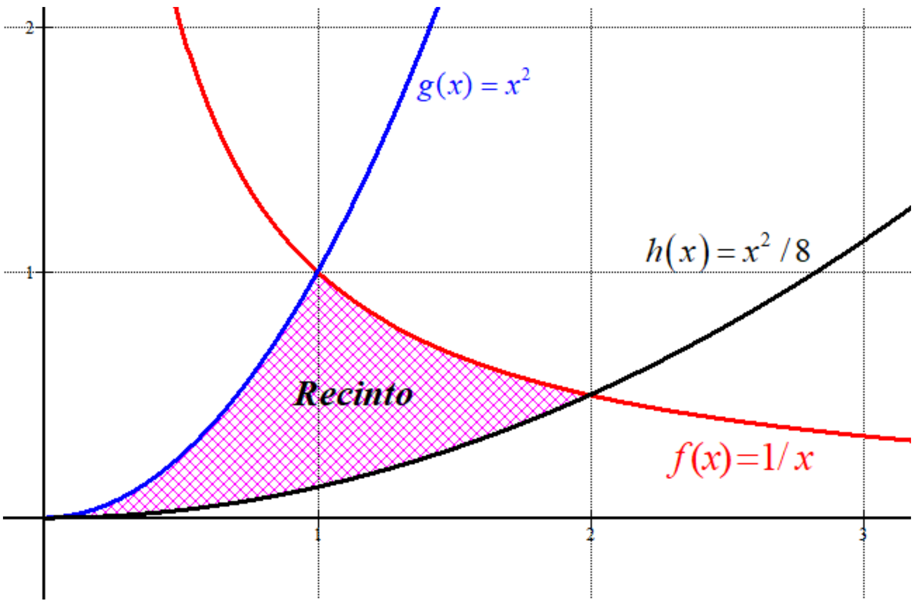
x	$y=\frac{1}{x}$
0.5	2
1	1
2	0.5
4	0.25

$g(x)=x^2$

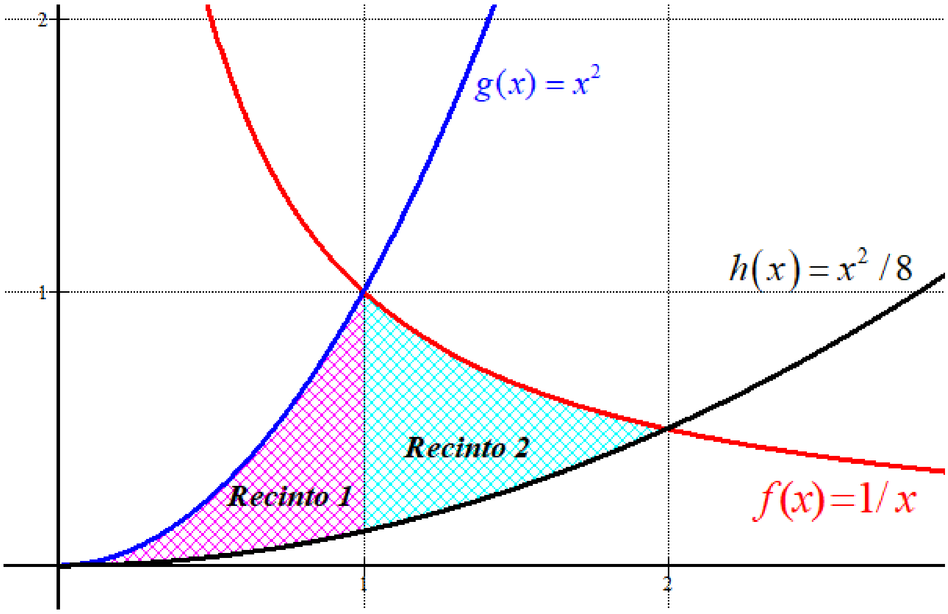
x	$y=x^2$
0	0
1	1
2	4
4	16

$h(x)=x^2/8$

x	$y=\frac{x^2}{8}$
0	0
1	0.125
2	0.5
4	2



b) Para calcular el área del recinto lo dividimos en dos partes: entre 0 y 1 el área la calculamos con una integral definida de *g(x) – h(x)* y entre 1 y 2 cuya área la calculamos con una integral definida de *f(x) – h(x)*.



Observamos en el dibujo que el área total del recinto debe ser algo menos de una unidad cuadrada. Calculamos su valor exacto usando integrales.

$$\text{Área recinto } 1=\int_0^1 x^2-\frac{x^2}{8}dx=\int_0^1\frac{8x^2-x^2}{8}dx=\int_0^1\frac{7x^2}{8}dx=\left[\frac{7}{8}\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\left[\frac{7x^3}{24}\right]_0^1=$$

$$=\left[\frac{7\cdot 1^3}{24}\right]-\left[\frac{0}{24}\right]=\frac{7}{24}u^2$$

$$\text{Área recinto } 2=\int_1^2\frac{1}{x}-\frac{x^2}{8}dx=\left[\ln x-\frac{x^3}{24}\right]_1^2=\left[\ln 2-\frac{2^3}{24}\right]-\left[\ln 1-\frac{1^3}{24}\right]=$$

$$=\ln 2-\frac{8}{24}-0+\frac{1}{24}=\boxed{\ln 2-\frac{7}{24}u^2}$$

$$\text{Área total del recinto }=\frac{7}{24}+\ln 2-\frac{7}{24}=\ln 2\simeq\boxed{0.69\,u^2}$$

Ejercicio B4

Calcular, explicando los métodos utilizados,

$$I=\int(x+2)\sin(2x)dx \quad y \quad J=\int\frac{x+7}{x^2-4x-5}dx$$

$$I=\int(x+2)\sin(2x)dx=\left\{\begin{array}{c}\text{Integración por partes}\\ u=x+2\rightarrow du=dx\\ dv=\sin(2x)dx\rightarrow v=\int\sin(2x)dx=-\frac{1}{2}\cos(2x)\end{array}\right\}=$$

$$=(x+2)\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)-\int-\frac{1}{2}\cos(2x)dx=-\frac{1}{2}(x+2)\cos(2x)+\frac{1}{2}\int\cos(2x)dx=$$

$$=-\frac{1}{2}(x+2)\cos(2x)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right)=\boxed{-\frac{1}{2}(x+2)\cos(2x)+\frac{1}{4}\sin(2x)+K}$$

$$J=\int\frac{x+7}{x^2-4x-5}dx=\{\text{Descomposición en fracciones simples}\}=\ldots$$

$$x^2-4x-5=0\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4(-5)}}{2}=\frac{4\pm6}{2}=\begin{cases}\frac{4+6}{2}=5\\ \frac{4-6}{2}=-1\end{cases}\Rightarrow x^2-4x-5=(x-5)(x+1)$$

$$\frac{x+7}{x^2-4x-5}=\frac{x+7}{(x-5)(x+1)}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-5)}{(x-5)(x+1)}$$

$$x+7=A(x+1)+B(x-5)\Rightarrow\begin{cases}x=5\rightarrow12=A(6)\rightarrow A=2\\ x=-1\rightarrow6=B(-6)\rightarrow B=-1\end{cases}$$

$$\frac{x+7}{x^2-4x-5}=\frac{2}{x-5}-\frac{1}{x+1}$$

$$\ldots=\int\frac{2}{x-5}-\frac{1}{x+1}dx=\int\frac{2}{x-5}dx-\int\frac{1}{x+1}dx=\boxed{2\ln|x-5|-\ln|x+1|+K}$$

Ejercicio A5

En una farmacia se ha recibido un lote de medicamentos de los tipos A, I y M. El 80 % corresponde al medicamento A, el 10 % al I y el resto al M. En la revisión realizada por la farmacéutica se ha observado que hay medicamentos caducados en los siguientes porcentajes: el 10 % de A, el 20 % de I y el 5 % de M. Se elige una caja de medicamentos al azar. Hallar:

a) La probabilidad de coger un medicamento caducado.
b) Si sabemos que el medicamento está caducado, la probabilidad de que sea del tipo A.

PRIMERA FORMA.

Supongamos que tenemos 100 cajas de medicamentos, de ellas 80 son de A, 10 de I y otras 10 de M.
Están caducados el 10 % de A, es decir, el 10 % de 80 que son 0.10 · 80 = 8 cajas caducadas.
Están caducados el 20 % de I, es decir, el 20 % de 10 que son 0.20 · 10 = 2 cajas caducadas.
Están caducados el 5 % de M, es decir, el 5 % de 80 que son 0.05 · 10 = 0.5 cajas caducadas.

Este último dato es un poco raro y podríamos pasar a considerar que tenemos 200 cajas en total y volver a calcular todo, pero sigamos resolviendo con este dato irreal pero que nos sirve para nuestros cálculos.

a) Como tenemos 100 cajas de medicamentes y de ellos 8, 2 y 0.5 caducadas aplicamos Laplace.

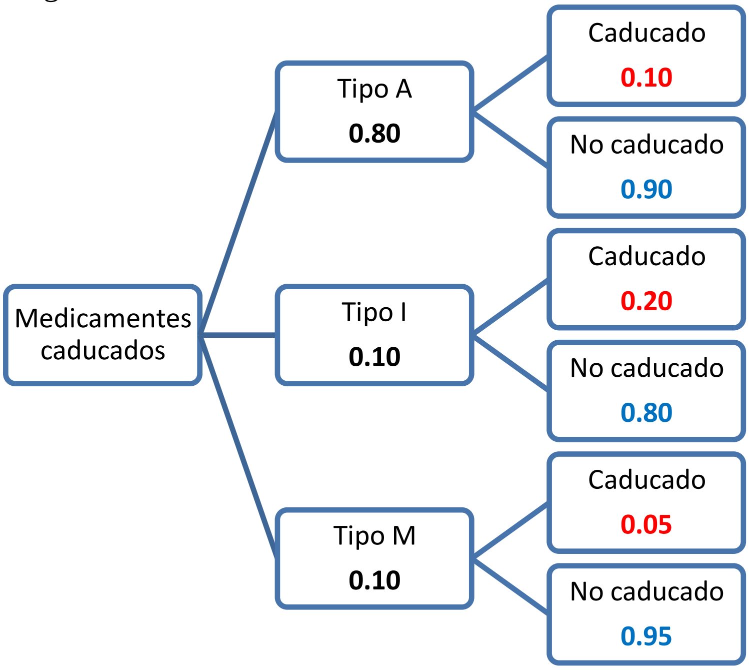
$$P(\text{Un medicamento caducado}) = \frac{\text{nº casos favorables}}{\text{nº casos posibles}} = \frac{8+2+0.5}{100} = \frac{10.5}{100} = \boxed{\frac{21}{200} = 0.105}$$

b) Como son 10.5 las cajas caducadas y solo 8 son del tipo A, aplicamos Laplace.

$$P(\text{Sea del tipo A / Está caducado}) = \frac{\text{nº casos favorables}}{\text{nº casos posibles}} = \frac{8}{8+2+0.5} = \frac{8}{10.5} = \boxed{\frac{16}{21} \approx 0.762}$$

SEGUNDA FORMA.

Hacemos un diagrama de árbol.



Llamamos A = Coger un medicamento del tipo A, I = Coger un medicamento del tipo I, M = Coger un medicamento del tipo M.
Llamamos C = Coger un medicamento caducado, C^T = Coger un medicamento no caducado.

a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(C) = P(A)P(C/A) + P(I)P(C/I) + P(M)P(C/M) =$$

$$= 0.8 \cdot 0.1 + 0.1 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.05 = \boxed{0.105}$$

b) Es una probabilidad a posteriori y para determinarla aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A)P(C/A)}{P(C)} = \frac{0.8 \cdot 0.1}{0.105} = \boxed{\frac{16}{21} \simeq 0.762}$$

Ejercicio B5
En una ciudad se han elegido al azar 3900 personas. Hallar:

a) La probabilidad de que al menos 15 de ellas cumplan años el día del patrón de la ciudad.
b) La probabilidad de que el número de personas que cumplan años el día del patrón esté comprendido entre 5 y 15, ambos incluidos.

Se trata de 3900 repeticiones de un experimento "Elegir una persona de una población y comprobar si cumple años el día del patrón" que solo tiene dos posibilidades: Si o No. Las repeticiones son independientes entre sí y la probabilidad de "Si" es 1/365.
Este modelo de probabilidad es una distribución binomial con parámetros n = 3900 y p = 1/365.

X = Número de personas que cumplen años el día del patrón.
X = B(3900, 1/365)

Como el número de repeticiones es muy alto y se cumple que $np \geq 5$ y $nq \geq 5$

$$np = 3900 \cdot \frac{1}{365} = \frac{780}{73} \approx 10.68 \geq 5 \qquad nq = 3900 \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right) \approx 3889.3 \geq 5$$

para el cálculo de probabilidades utilizaremos una aproximación a una normal:

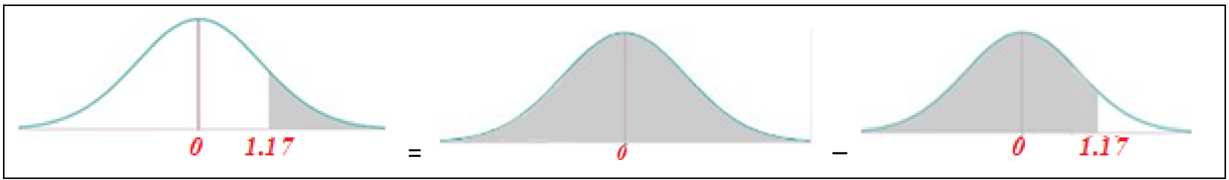
$$X' = N\left(np; \sqrt{npq}\right) = N(10.68; 3.26)$$

a)

$$P(\text{Haya al menos 15 que cumplan años el día del patrón}) = P(X \geq 15) =$$

$$= \{\text{Corrección de Yates o de continuidad}\} = P(X' > 14.5) =$$

$$= \{Tipificamos\} = P\left(Z > \frac{14.5 - 10.68}{3.26}\right) = P(Z > 1.17) = \ldots$$



$$\ldots = 1 - P(Z \leq 1.17) = \{\text{Buscamos en la tabla N(0, 1)}\} = 1 - 0.8790 = \boxed{0.121}$$

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	[illegible]	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	[illegible]	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	[illegible]	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	[illegible]	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	[illegible]	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	[illegible]	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	[illegible]	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	[illegible]	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	[illegible]	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	[illegible]	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	[illegible]	0'8599	0'8621
1'1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319

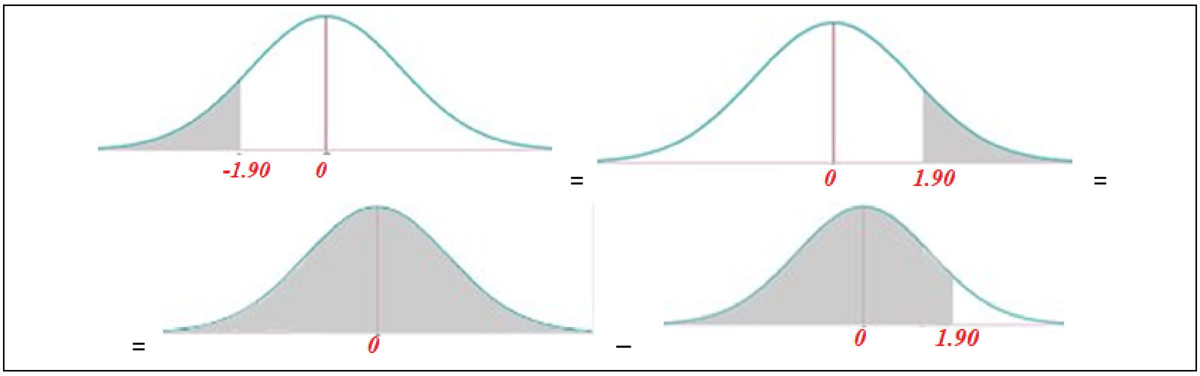
b)

$$P(\text{Hayan entre 5 y 15 personas que cumplan años el día del patrón}) = P(5 \le X \le 15) =$$

$$= \{\text{Corrección de Yates o de continuidad}\} = P(4.5 < X' < 15.5) =$$

$$= \{\textit{Tipificamos}\} = P\left(\frac{4.5-10.68}{3.26} < Z < \frac{15.5-10.68}{3.26}\right) = P(-1.90 < Z < 1.48) =$$

$$= P(Z < 1.48) - P(Z < -1.90) = \ldots$$



$$\ldots = P(Z < 1.48) - P(Z > 1.90) = P(Z < 1.48) - [1 - P(Z < 1.90)] =$$

$$= \{\text{Buscamos en la tabla N(0, 1)}\} = 0.9306 - [1 - 0.9713] = \boxed{0.9019}$$

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	[illegible]	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	[illegible]	0'5359
0'1	[illegible]	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	[illegible]	0'5753
0'2	[illegible]	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	[illegible]	0'6141
0'3	[illegible]	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	[illegible]	0'6517
0'4	[illegible]	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	[illegible]	0'6879
0'5	[illegible]	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	[illegible]	0'7224
0'6	[illegible]	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	[illegible]	0'7549
0'7	[illegible]	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	[illegible]	0'7852
0'8	[illegible]	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	[illegible]	0'8133
0'9	[illegible]	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	[illegible]	0'8389
1	[illegible]	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	[illegible]	0'8621
1'1	[illegible]	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	[illegible]	0'8830
1'2	[illegible]	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	[illegible]	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	[illegible]	0'9177
1'4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	[illegible]	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	[illegible]	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817