PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2018-2019

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Instrucciones:
a) Duración: 1 hora y 30 minutos
b) Elija una de las dos opciones propuestas y conteste los ejercicios de la opción elegida.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima que le corresponde.
d) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos.
e) Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma. Justifique las respuestas.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 0\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}7 & -12 & 16\\ -1 & 7 & 12\end{pmatrix}$$

a) **(1 punto)** Justifique cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

1) $A\cdot A^t$ es una matriz simétrica.

2) $A\cdot A^t + B$ posee inversa.

b) **(1.5 puntos)** Resuelva la ecuación matricial $B\cdot X + A = C$.

EJERCICIO 2

El coste de producción de un bien en una fábrica viene dado por $C(x)=2(2x-1)^2+1$, con $0\le x\le 2$, donde x es la cantidad producida en millones de kilogramos.

a) **(1 punto)** Estudie el crecimiento y decrecimiento de la función $C(x)$.

b) **(0.75 puntos)** Determine la cantidad a producir para que el coste de producción sea mínimo. ¿Cuál es dicho coste?

c) **(0.75 puntos)** Realice un esbozo de la gráfica de la función $C(x)$.

EJERCICIO 3

Una marca de patinetes eléctricos fabrica tres modelos distintos A, B y C. El modelo A supone el 25 % de su producción, el B el 40 % y el resto de la producción corresponde al modelo C. Transcurridos tres meses desde su venta, se comprobó que el 15% de patinetes del modelo A, el 10% del B y el 12% del C había presentado alguna avería. Se elige al azar un patinete de esta marca.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que dicho patinete haya presentado alguna avería.

b) **(0.5 puntos)** Si sabemos que el patinete elegido es del modelo A, ¿cuál es la probabilidad de que no haya presentado avería?

c) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que haya presentado avería o sea del modelo C?

EJERCICIO 4

Las puntuaciones obtenidas por los participantes en un concurso se distribuyen siguiendo una ley Normal de varianza 36 y media desconocida. Se toma una muestra aleatoria de 64 concursantes, cuya puntuación media es 35 puntos.

a) **(1.5 puntos)** Obtenga un intervalo, con un 92% de confianza para la puntuación media de los participantes en dicho concurso

b) **(1 punto)** Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar la puntuación media del total de concursantes, con un error inferior a 2 puntos y un nivel de confianza del 98 %.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Una empresa comercializa dos tipos de concentrado de café, A y B, que se obtienen a partir de tres tipos de grano: de Colombia, de Etiopía y de Costa Rica. Para elaborar, 1 kg de concentrado A se necesitan 4'5 kg de grano de Colombia y 3 kg de grano de Etiopía. Por otra parte, se requieren 7'5 kg de grano de Colombia y 1'5 kg de grano de Costa Rica para elaborar 1 kg de concentrado B. Actualmente la empresa dispone de un máximo de 67'5 kg de grano de Colombia, 30 kg de grano de Etiopía, y 9 kg de grano de Costa Rica. Además, se exige que el número de kilogramos de concentrado A producidos debe ser mayor o igual que la mitad de los kilogramos de concentrado B.

a) **(1.75 puntos)** Represente la región factible que describe el problema anterior y determine sus vértices.

b) **(0.25 puntos)** Indique de manera razonada si con las condiciones dadas sería posible producir 7 kg del concentrado A y 5 kg del concentrado B.

c) **(0.5 puntos)** Sabiendo que el beneficio obtenido por la venta de cada kilogramo de concentrado del tipo A es 2 euros y de cada kilogramo del tipo B es 4 euros, ¿cuántos kilogramos del tipo A y cuántos del tipo B se habrán de producir para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

EJERCICIO 2

De una cierta función *f*, sabemos que su función derivada es $f\,'(x) = 3x^2 - 3$.

a) **(1 punto)** Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*, y calcule la abscisa de sus extremos relativos.

b) **(0.75 puntos)** Determine la curvatura de *f* y halle la abscisa de su punto de inflexión.

c) **(0.75 puntos)** Calcule la función *f*, sabiendo que su gráfica pasa por el punto (–1, 3).

EJERCICIO 3

De dos sucesos A y B de un mismo espacio muestral se sabe que:

$$P(A\cap B)=0.2,\ P(A\cup B)=0.4,\ P(A/B)=0.8.$$

a) **(1.2 puntos)** Calcule *P(B)* y *P(A).*

b) **(0.5 puntos)** ¿Son los sucesos *A* y *B* independientes? Razone la respuesta.

c) **(0.8 puntos)** Calcule $P\left(A^C \cup B^C\right)$.

EJERCICIO 4

Se quiere estimar la proporción de enfermos hospitalizados por causas relacionadas con el consumo de tabaco. Para ello se escoge aleatoriamente una muestra de 50 expedientes sanitarios de enfermos hospitalizados, resultando que el 22% de ellos revelan que la enfermedad fue causada por el tabaco.

a) **(1.5 puntos)** Para un nivel de confianza del 92%, calcule un intervalo de confianza para la proporción de enfermos hospitalizados por causas relacionadas con el consumo de tabaco.

b) **(1 punto)** Determine cuántos expedientes hay que elegir como mínimo para que, con el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral anteriores, el error que se cometa al estimar la proporción de los enfermos hospitalizarlos por causas debidas al tabaco sea inferior al 3 %.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 0\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}7 & -12 & 16\\ -1 & 7 & 12\end{pmatrix}$$

a) **(1 punto)** Justifique cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

1) $A\cdot A^t$ es una matriz simétrica.

2) $A\cdot A^t + B$ posee inversa.

b) **(1.5 puntos)** Resuelva la ecuación matricial $B\cdot X + A = C$.

a)

1) $A\cdot A^t=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ Si es cierta la afirmación.

2) Calculamos su determinante y vemos si se anula.

$$A\cdot A^t + B=\begin{pmatrix}5 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -4\\ -3 & 2\end{pmatrix}$$

$$\left|A\cdot A^t + B\right|=\begin{vmatrix}6 & -4\\ -3 & 2\end{vmatrix}=12-12=0$$

El determinante vale cero y no existe la inversa. No es cierta la afirmación.

b) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$B\cdot X+A=C\Rightarrow B\cdot X=C-A\Rightarrow X=B^{-1}\left(C-A\right)$$

Comprobamos que B tiene inversa.

$$B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow |B|=\begin{vmatrix}1 & -3\\ -2 & 0\end{vmatrix}=-6\neq 0\rightarrow \text{Existe la matriz inversa de B}$$

$$\mathrm{B}^{-1}=\frac{Adj\left(B^t\right)}{|B|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 0\end{pmatrix}}{-6}=\frac{-1}{6}\begin{pmatrix}0 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

Sustituimos en la expresión inicial.

$$X=B^{-1}\left(C-A\right)=\frac{-1}{6}\begin{pmatrix}0 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}7 & -12 & 16\\ -1 & 7 & 12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\right]$$

$$X=\frac{-1}{6}\begin{pmatrix}0 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & -12 & 18\\ 0 & 6 & 12\end{pmatrix}$$

$$X=\frac{-1}{6}\begin{pmatrix}0 & 18 & 36\\ 12 & -18 & 48\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}0 & -3 & -6\\ -2 & 3 & -8\end{pmatrix}}$$

EJERCICIO 2

El coste de producción de un bien en una fábrica viene dado por $C(x)=2(2x-1)^2+1$, con $0\le x\le 2$, donde x es la cantidad producida en millones de kilogramos.
a) **(1 punto)** Estudie el crecimiento y decrecimiento de la función *C(x)*.
b) **(0.75 puntos)** Determine la cantidad a producir para que el coste de producción sea mínimo. ¿Cuál es dicho coste?
c) **(0.75 puntos)** Realice un esbozo de la gráfica de la función *C(x)*.

a) Estudiamos el signo de la derivada.

$$C(x)=2(2x-1)^2+1 \Rightarrow C'(x)=8(2x-1)$$

$$C'(x)=0 \Rightarrow 8(2x-1)=0 \Rightarrow 2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

Averiguamos el signo de la derivada antes y después de *x = 1/2*.

- En $(0,1/2)$ tomamos *x = 0.25* y la derivada vale $C'(0.25)=8(0.5-1)=-4<0$. La función decrece en $(0,1/2)$.
- En $(1/2,2)$ tomamos *x = 1* y la derivada vale $C'(1)=8(2-1)=8>0$. La función crece en $(1/2,2)$.

El coste decrece en $(0,1/2)$ y crece en $(1/2,2)$.

b) Por el estudio del crecimiento y decrecimiento sabemos que la función presenta un mínimo relativo en *x = 1/2*.
Valoramos la función en dicho valor y en los extremos del intervalo para determinar el mínimo coste de entre estos.

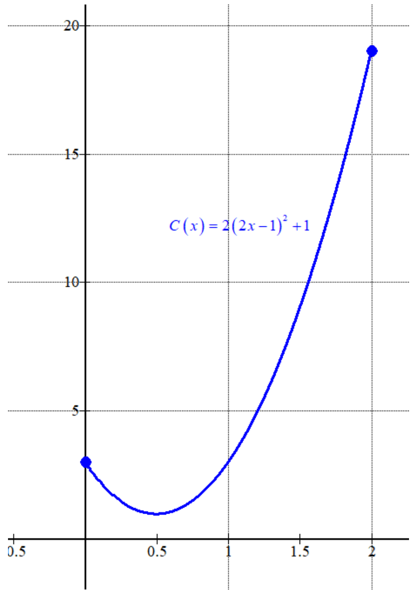
$$C(0)=2(0-1)^2+1=3$$

$$C(0.5)=2(1-1)^2+1=1 \text{ ¡¡MÍNIMO!!}$$

$$C(2)=2(4-1)^2+1=19$$

Para que el coste sea mínimo hay que producir medio millón de kilogramos.
Este coste mínimo es de $C(0.5)=1$.

c) La gráfica es un trozo de parábola. Hemos determinado el vértice V(0.5, 1) y dos puntos más de su gráfica (0, 3) y (2, 19). Y conocemos sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.



EJERCICIO 3

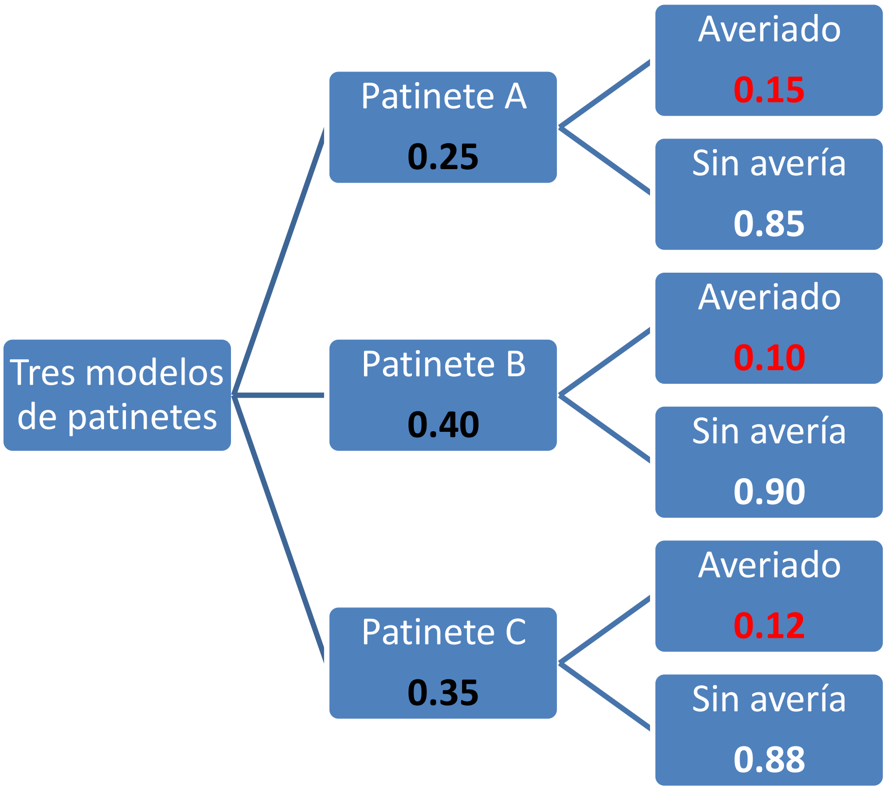
Una marca de patinetes eléctricos fabrica tres modelos distintos A, B y C. El modelo A supone el 25 % de su producción, el B el 40 % y el resto de la producción corresponde al modelo C. Transcurridos tres meses desde su venta, se comprobó que el 15% de patinetes del modelo A, el 10% del B y el 12% del C había presentado alguna avería. Se elige al azar un patinete de esta marca.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que dicho patinete haya presentado alguna avería.

b) **(0.5 puntos)** Si sabemos que el patinete elegido es del modelo A, ¿cuál es la probabilidad de que no haya presentado avería?

c) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que haya presentado avería o sea del modelo C?

El modelo C supone un 100 – 25 – 40 = 35 % de la producción.
Realizamos un diagrama de árbol.



Llamamos A, B y C a los sucesos ser patinete de modelo A, B o C respectivamente.
Llamamos F al suceso tener avería en el patinete. $\overline{F}$ es el suceso no tener avería.

a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(F)=P(A)P(F/A)+P(B)P(F/B)+P(C)P(F/C)=$$

$$=0.25\cdot 0.15+0.40\cdot 0.10+0.35\cdot 0.12=\boxed{0.1195}$$

b) Es la probabilidad que podemos observar en el diagrama de árbol. $P\left(\overline{F}/A\right)=\boxed{0.85}$

c) Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(F\cup C)=P(F)+P(C)-P(F\cap C)=P(F)+P(C)-P(C)P(F/C)=$$

$$=0.1195+0.35-0.35\cdot 0.12=\boxed{0.4275}$$

EJERCICIO 4

Las puntuaciones obtenidas por los participantes en un concurso se distribuyen siguiendo una ley Normal de varianza 36 y media desconocida. Se toma una muestra aleatoria de 64 concursantes, cuya puntuación media es 35 puntos.

a) **(1.5 puntos)** Obtenga un intervalo, con un 92% de confianza para la puntuación media de los participantes en dicho concurso

b) **(1 punto)** Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar la puntuación media del total de concursantes, con un error inferior a 2 puntos y un nivel de confianza del 98 %.

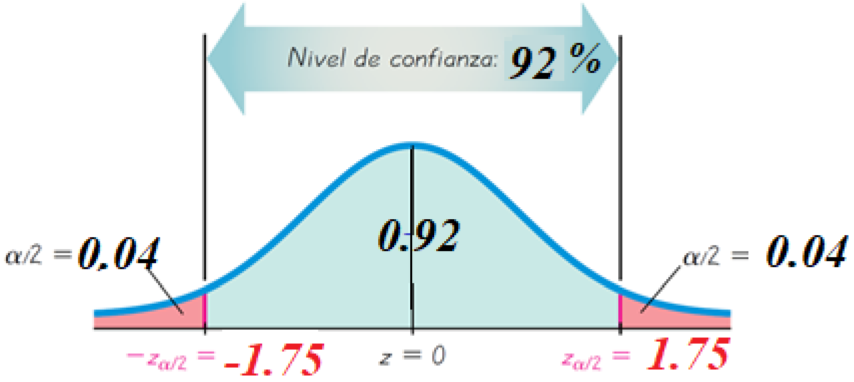
La desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza → $\sigma = \sqrt{36} = 6$

X = Puntuación obtenida por un participante en un concurso.

X = N(μ, 6)

n = 64 concursantes $\bar{x} = 35 \; puntos$

a) Determinamos $z_{\alpha/2}$ con un nivel de confianza del 92 %.



1 – ∝ = 0,92 → ∝ = 0,08 →∝/2 = 0'04 →1 – ∝/2 = 0,96 → $z_{\alpha/2}$ = **1.75**

Calculamos el error del intervalo de confianza.

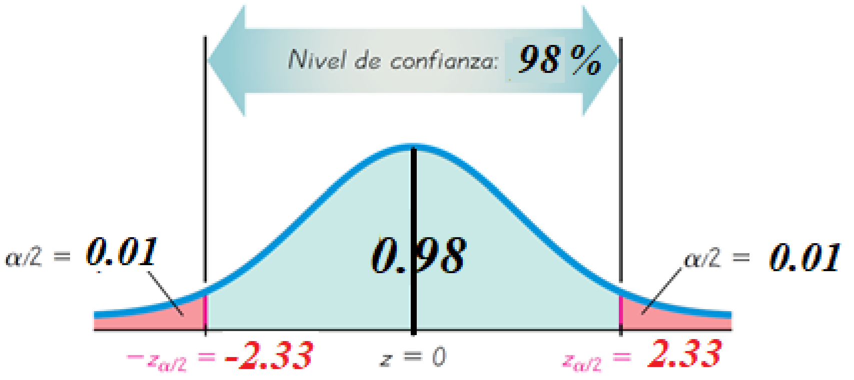
$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.75 \cdot \frac{6}{\sqrt{64}} = 1.3125$$

El intervalo de confianza para la media es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = (35 - 1.3125, \quad 35 + 1.3125) = (33.6875, 36.3125)$$

b) ¿n?

Determinamos $z_{\alpha/2}$ con un nivel de confianza del 98 %.



1 – ∝ = 0,98 → ∝ = 0,02 →∝/2 = 0'01 →1 – ∝/2 = 0,99 → $z_{\alpha/2}$ = **2.33**

Igualamos el error del intervalo de confianza a 2.

$$Error = 2 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \Rightarrow 2.33 \cdot \frac{6}{\sqrt{n}} = 2 \Rightarrow 2.33 \cdot 6 = 2\sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{6 \cdot 2.33}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \left(\frac{6 \cdot 2.33}{2} \right)^2 = 48.8601$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser entero y superior al hallado, es decir, de 49 concursantes.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Una empresa comercializa dos tipos de concentrado de café, A y B, que se obtienen a partir de tres tipos de grano: de Colombia, de Etiopía y de Costa Rica. Para elaborar, 1 kg de concentrado A se necesitan 4'5 kg de grano de Colombia y 3 kg de grano de Etiopía. Por otra parte, se requieren 7’5 kg de grano de Colombia y 1'5 kg de grano de Costa Rica para elaborar 1 kg de concentrado B. Actualmente la empresa dispone de un máximo de 67’5 kg de grano de Colombia, 30 kg de grano de Etiopía, y 9 kg de grano de Costa Rica. Además, se exige que el número de kilogramos de concentrado A producidos debe ser mayor o igual que la mitad de los kilogramos de concentrado B.

a) **(1'75 puntos)** Represente la región factible que describe el problema anterior y determine sus vértices.

b) **(0'25 puntos)** Indique de manera razonada si con las condiciones dadas sería posible producir 7 kg del concentrado A y 5 kg del concentrado B.

c) **(0'5 puntos)** Sabiendo que el beneficio obtenido por la venta de cada kilogramo de concentrado del tipo A es 2 euros y de cada kilogramo del tipo B es 4 euros, ¿cuántos kilogramos del tipo A y cuántos del tipo B se habrán de producir para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

a) Es un problema de programación lineal.
Sea x = nº de kilogramos del concentrado A de café.
Sea y = nº de kilogramos del concentrado B de café.

	Colombia	Etiopía	Costa Rica
Concentrado A (x)	$4.5x$	$3x$	0
Concentrado B (y)	$7.5y$	0	$1.5y$
	$4.5x+7.5y$	$3x$	$1.5y$

Obtenemos las inecuaciones a partir de las restricciones.

“*Solo dispone de 67.5 kg de Colombia*” → $4.5x+7.5y \leq 67.5$.
“*Solo dispone de 30 kg de Etiopía*” → $3x \leq 30$.
“*Solo dispone de 9 kg de Costa Rica*” → $1.5y \leq 9$.
“*El número de kilogramos de concentrado A producidos debe ser mayor o igual que la mitad de los kilogramos de concentrado B*” → $x \geq \frac{y}{2}$.
Las cantidades deben ser positivas → $x \geq 0; \quad y \geq 0$

El sistema de inecuaciones que define la región factible es:

$$\left.\begin{array}{l} 4.5x+7.5y \leq 67.5 \\ 3x \leq 30 \\ 1.5y \leq 9 \\ x \geq \dfrac{y}{2} \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 9x+15y \leq 135 \\ x \leq 10 \\ 3y \leq 18 \\ 2x \geq y \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+5y \leq 45 \\ x \leq 10 \\ y \leq 6 \\ y \leq 2x \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$3x+5y=45$ $\quad$ $x=10$ $\quad$ $y=6$ $\quad$ $y=2x$ $\quad$ $x\geq 0;\quad y\geq 0$

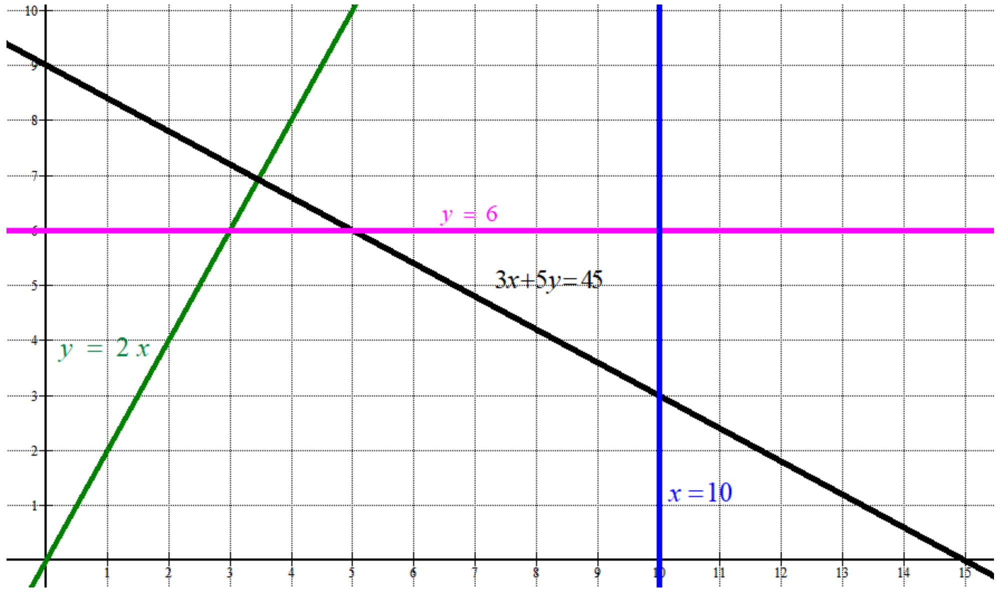
x	$y=\dfrac{45-3x}{5}$
5	6
10	3

$x=10$	y
10	0
10	6

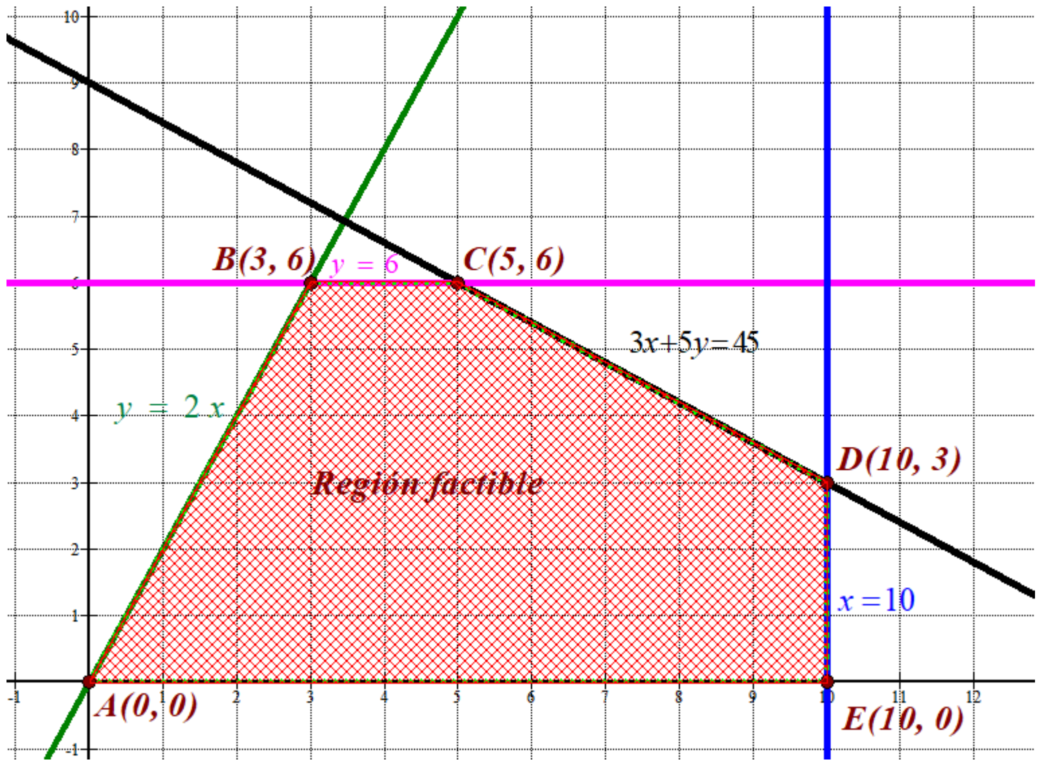
x	$y=6$
10	6
5	6

x	$y=2x$
0	0
3	6

Primer cuadrante

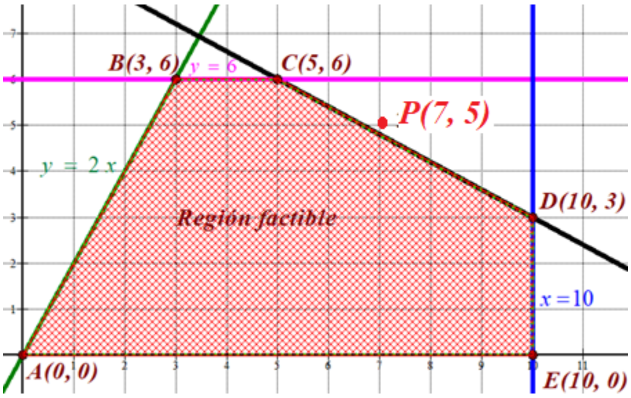


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 3x+5y\leq 45 \\ x\leq 10 \\ y\leq 6 \\ y\leq 2x \\ x\geq 0;\quad y\geq 0 \end{array}\right\}$ nos dicen que la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas verde, negra y rosa y a la izquierda de la recta vertical azul. La coloreamos de rojo en el siguiente dibujo.



Los vértices los determinamos a la vista de la cuadrícula del dibujo.
Tienen coordenadas A(0,0), B(3, 6), C(5, 6), D(10, 3) y E(10, 0).

b) Producir 7 kg del concentrado A y 5 kg del concentrado B lo representa el punto P(7, 5) que no pertenece a la región factible. No se podrían producir esos kg de concentrado cumpliendo las restricciones.



c) La función objetivo es el beneficio que viene dado por la expresión $B(x,y)=2x+4y$.
Valoramos la función objetivo en cada uno de los vértices, en busca de su valor máximo.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$

B(3, 6) → $B(3,6)=6+24=30$

C(5, 6) → $B(5,6)=10+24=34$ ¡¡MÁXIMO!!

D(10, 3) → $B(10,3)=20+12=32$

E(10, 0) → $B(10,0)=20$

El máximo valor de la función es 34 y se alcanza en el vértice C(5, 6).
Se deben producir 5 kg de concentrado A y 6 de concentrado B para obtener un máximo beneficio de 34 euros.

EJERCICIO 2

De una cierta función *f*, sabemos que su función derivada es $f'(x) = 3x^2 - 3$.

a) **(1 punto)** Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*, y calcule la abscisa de sus extremos relativos.

b) **(0.75 puntos)** Determine la curvatura de *f* y halle la abscisa de su punto de inflexión.

c) **(0.75 puntos)** Calcule la función *f*, sabiendo que su gráfica pasa por el punto (–1, 3).

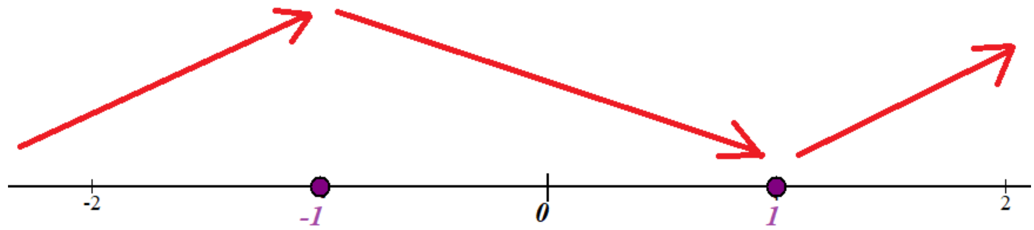
a) Igualamos a cero la derivada, en busca de los puntos críticos.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de –1 y 1.

- En $(-\infty, -1)$ tomamos *x = –2* y la derivada vale $f'(-2) = 3(-2)^2 - 3 = 9 > 0$. La función crece en $(-\infty, -1)$.
- En $(-1, 1)$ tomamos *x = 0* y la derivada vale $f'(0) = -3 < 0$. La función decrece en $(-1, 1)$.
- En $(1, +\infty)$ tomamos *x = 2* y la derivada vale $f'(2) = 12 - 3 = 9 > 0$. La función crece en $(1, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente



La función crece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y decrece en $(-1, 1)$.

La función tiene un máximo relativo en *x = –1* y un mínimo relativo en *x = 1*.

b) Utilizamos la derivada segunda.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f''(x) = 6x$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Estudiamos el signo de la derivada segunda antes y después de *x = 0.*

- En $(-\infty, 0)$ tomamos *x = –1* y la derivada segunda vale $f''(1) = -6 < 0$. La función es cóncava (∩) en $(-\infty, 0)$.
- En $(0, +\infty)$ tomamos *x = 1* y la derivada segunda vale $f''(1) = 6 > 0$. La función es convexa (∪) en $(0, +\infty)$.

La función es cóncava en $(-\infty, 0)$ y convexa en $(0, +\infty)$.

Hay un punto de inflexión en *x = 0.*

c) Calculamos la función integrando la derivada.

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int 3x^2 - 3dx = x^3 - 3x + K$$

Como la gráfica de la función pasa por el punto (–1, 3) se cumple que *f(–1) = 3.*

$$\left.\begin{array}{r} f(x) = x^3 - 3x + K \\ f(-1) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 3 = (-1)^3 - 3(-1) + K \Rightarrow 3 = -1 + 3 + K \Rightarrow K = 1$$

La función es $f(x) = x^3 - 3x + 1$

EJERCICIO 3

De dos sucesos A y B de un mismo espacio muestral se sabe que:

$$P(A\cap B)=0.2,\ P(A\cup B)=0.4,\ P(A/B)=0.8.$$

a) **(1.2 puntos)** Calcule *P(B)* y *P(A).*

b) **(0.5 puntos)** ¿Son los sucesos *A* y *B* independientes? Razone la respuesta.

c) **(0.8 puntos)** Calcule $P\left(A^C\cup B^C\right)$.

a) Utilizamos la fórmula de la probabilidad condicionada.

$$\left.\begin{array}{r} P(A/B)=0.8\Rightarrow \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=0.8 \\ P(A\cap B)=0.2 \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{0.2}{P(B)}=0.8\Rightarrow \boxed{P(B)=\frac{0.2}{0.8}=0.25}$$

Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cup B)=0.4 \\ P(A\cap B)=0.2 \\ P(B)=0.25 \\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \end{array}\right\}\Rightarrow 0.4=P(A)+0.25-0.2\Rightarrow \boxed{P(A)=0.4-0.05=0.35}$$

b) Para que sean independientes debe cumplirse $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

$$¿\ P(A\cap B)=P(A)P(B)?$$

¿0.2 = 0.25 · 0.35?

¿0.2 = 0.0875?

¡¡No son iguales!!

Los sucesos A y B no son independientes.

c) Utilizamos la ley de Morgan sobre unión de sucesos contrarios.

$$P\left(A^C\cup B^C\right)=P\left((A\cap B)^C\right)=1-P(A\cap B)=1-0.2=\boxed{0.8}$$

EJERCICIO 4

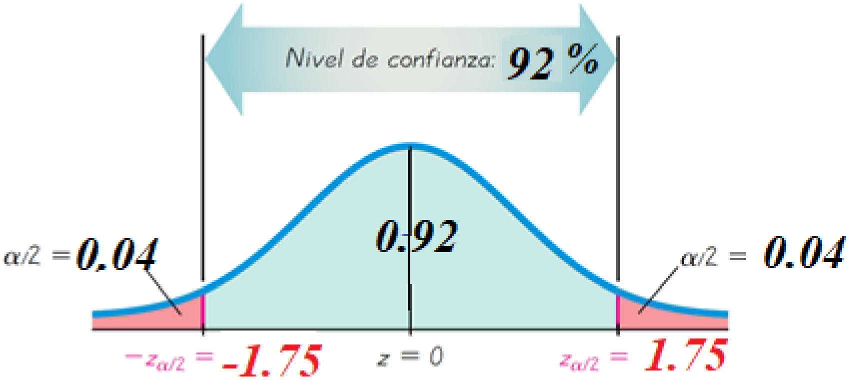
Se quiere estimar la proporción de enfermos hospitalizados por causas relacionadas con el consumo de tabaco. Para ello se escoge aleatoriamente una muestra de 50 expedientes sanitarios de enfermos hospitalizados, resultando que el 22% de ellos revelan que la enfermedad fue causada por el tabaco.

a) **(1.5 puntos)** Para un nivel de confianza del 92%, calcule un intervalo de confianza para la proporción de enfermos hospitalizados por causas relacionadas con el consumo de tabaco.

b) **(1 punto)** Determine cuántos expedientes hay que elegir como mínimo para que, con el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral anteriores, el error que se cometa al estimar la proporción de los enfermos hospitalizarlos por causas debidas al tabaco sea inferior al 3 %.

n = 50. $p = 0.22 \rightarrow q = 1 - p = 1 - 0.22 = 0.78$

b) Con un nivel de confianza del 92 % tenemos



$1 - \propto = 0{,}92 \rightarrow \propto = 0{,}08 \rightarrow \propto/2 = 0'04 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}96 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.75}$

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 1.75 \cdot \sqrt{\frac{0.22 \cdot 0.78}{50}} \simeq 0.10252$$

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$\left(p - Error,\ p + Error\right) = \left(0.22 - 0.10252,\quad 0.22 + 0.10252\right) = \left(0.11748, 0.32252\right)$$

c) ¿n?

Con un nivel de confianza del 92 % tenemos $z_{\alpha/2}$ = **1.75**

$$Error = 0.03 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 0.03 \Rightarrow 1.75 \cdot \sqrt{\frac{0.22 \cdot 0.78}{n}} = 0.03 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{0.22 \cdot 0.78}{n}} = \frac{0.03}{1.75} \Rightarrow \frac{0.22 \cdot 0.78}{n} = \left(\frac{0.03}{1.75}\right)^2 \Rightarrow n = \frac{0.22 \cdot 0.78}{\left(\frac{0.03}{1.75}\right)^2} \approx 583.9166$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser entero y superior al hallado, es decir, de 584 expedientes.