PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2020-2021

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Instrucciones:
- **a)** Duración: 1 hora y 30 minutos
- **b)** Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior.
- **c)** En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
- **d)** Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
- **e)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

Este examen consta de 4 Bloques (A, B, C y D)

Deberá responder a cuatro ejercicios de entre los ocho propuestos con la condición de que pertenezcan al menos a 3 bloques distintos. En caso de responder a más ejercicios de los requeridos, serán tenidos en cuenta los respondidos en primer lugar.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

(2.5 puntos) Una empresa de recambios industriales produce dos tipos de baterías, A y B. Su producción semanal debe ser de al menos 10 baterías en total y el número de baterías de tipo B no puede superar en más de 10 unidades a las fabricadas de tipo A. Cada batería de tipo A tiene unos gastos de producción de 150 euros y cada batería de tipo B de 100 euros, disponiendo de un máximo de 6000 euros a la semana para el coste total de producción.
Si la empresa vende todo lo que produce y cada batería de tipo A genera un beneficio de 130 euros y la de tipo B de 140 euros, ¿cuántas baterías de cada tipo tendrán que producir a la semana para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

EJERCICIO 2

Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ 0 & 2 & -3 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$, con m un parámetro real.

a) **(0.7 puntos)** ¿Para qué valores del parámetro m existe la matriz inversa de A?

b) **(1.8 puntos)** Para $m = 2$, resuelva la ecuación matricial $X \cdot A - A^2 = I_3$

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Se considera la función $f(x)=x^3-4x^2+4x$

a) **(1 punto)** Estudie su monotonía y calcule sus extremos.

b) **(0.5 puntos)** Represente gráficamente la función.

c) **(0.5 puntos)** Calcule $\int f(x)dx$.

d) **(0.5 puntos)** Calcule el área del recinto acotado limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

EJERCICIO 4

a) **(1 punto)** Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \qquad g(x)=x^3\cdot e^{2x^2}$$

b) **(0.7 puntos)** Represente gráficamente la parábola $h(x)=x^2+x+1$, indicando el vértice y los puntos de corte con los ejes coordenados.

c) **(0.8 puntos)** Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de $h(x)=x^2+x+1$, el eje de abscisas y las rectas $x=-\frac{1}{2}$ y $x=0$.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Se desea probar la eficacia de dos tipos de vacunas, A y B, contra un virus determinado. Para ello, se seleccionan 5000 voluntarios sin anticuerpos para este virus, a los que se les administra una de las vacunas o un placebo, resultando que 3000 reciben la vacuna A, 1500 la B y el resto el placebo. Se comprueba que el 90 % de los vacunados con la A y el 95 % de los vacunados con la B, generan anticuerpos, no generando anticuerpos los que han recibido el placebo. Se selecciona uno de esos voluntarios al azar.

a) **(1.5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que haya generado anticuerpos?

b) **(1 punto)** Si dicho voluntario no ha generado anticuerpos, ¿qué probabilidad hay de que se le haya administrado placebo?

EJERCICIO 6

De las compras realizadas en el último período de rebajas del pasado año, el 55 % se dedicaron a productos electrónicos, el 72 % se hicieron a través de Internet y, de las compras que se hicieron por Internet, el 64 % fueron de productos electrónicos. Se elige una compra al azar.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que haya sido de productos electrónicos y se haya realizado por Internet.

b) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que la compra se haya realizado por Internet o que se hayan comprado productos electrónicos.

c) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que sabiendo que no se compraron productos electrónicos, la compra no se hiciera a través de Internet.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

a) **(1.5 puntos)** En una Escuela Politécnica hay matriculados en el último curso 60 estudiantes de Ingeniería Eléctrica, 40 de Ingeniería Informáticas, 30 de Ingeniería Civil, 50 de Ingeniería Mecánica y 20 de Ingeniería Aeronáutica. Se quiere hacer una encuesta al 20 % de estos estudiantes, de manera proporcional al número de matriculados en cada titulación.

1. ¿Qué tipo de muestreo se debe emplear?
2. ¿Cuántos alumnos debe haber en la muestra y cuántos de cada titulación?

b) **(1 punto)** Dada la población {a, 10, 12, 11, 18}, ¿cuánto debe valer *a*, sabiendo que la media de las medias muestrales de tamaño 3, obtenidas mediante muestreo aleatorio simple, es 13.2?

EJERCICIO 8

Se desea estimar la proporción de individuos mayores de edad de una localidad que están en contra de la construcción de una central nuclear en su término municipal. Para ello, se pregunta a 100 individuos mayores de edad de esa localidad, elegidos de forma aleatoria, resultando que 45 de ellos rechazan la construcción de la central.

a) **(1.5 puntos)** Calcule un intervalo de confianza al 92 % para estimar la proporción real de individuos de esa localidad que están en contra de la construcción de la central.

b) **(1 punto)** Suponiendo que se mantiene la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño mínimo de la muestra que hay que tomar, para que al estimar la proporción de individuos de esa localidad que rechazan la construcción de la central, el error cometido sea inferior al 5 %.

SOLUCIONES

BLOQUE A

EJERCICIO 1

(2.5 puntos) Una empresa de recambios industriales produce dos tipos de baterías, A y B. Su producción semanal debe ser de al menos 10 baterías en total y el número de baterías de tipo B no puede superar en más de 10 unidades a las fabricadas de tipo A. Cada batería de tipo A tiene unos gastos de producción de 150 euros y cada batería de tipo B de 100 euros, disponiendo de un máximo de 6000 euros a la semana para el coste total de producción.

Si la empresa vende todo lo que produce y cada batería de tipo A genera un beneficio de 130 euros y la de tipo B de 140 euros, ¿cuántas baterías de cada tipo tendrán que producir a la semana para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

Llamamos x = número de baterías de tipo A, y = número de baterías de tipo B.

La función a maximizar es el beneficio que viene dado como $f(x,y)=130x+140y$

Las restricciones son:

"*Su producción semanal debe ser de al menos 10 baterías en total*" → $x+y\geq 10$

"*El número de baterías de tipo B no puede superar en más de 10 unidades a las fabricadas de tipo A*" → $y\leq x+10$

"*Cada batería de tipo A tiene unos gastos de producción de 150 euros y cada batería de tipo B de 100 euros, disponiendo de un máximo de 6000 euros a la semana para el coste total de producción*" → $150x+100y\leq 6000$

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ y\geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} x+y\geq 10 \\ y\leq x+10 \\ 150x+100y\leq 6000 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y\geq 10 \\ y-x\leq 10 \\ 3x+2y\leq 120 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x+y=10$

x	$y=10-x$
0	10
10	0

$y-x=10$

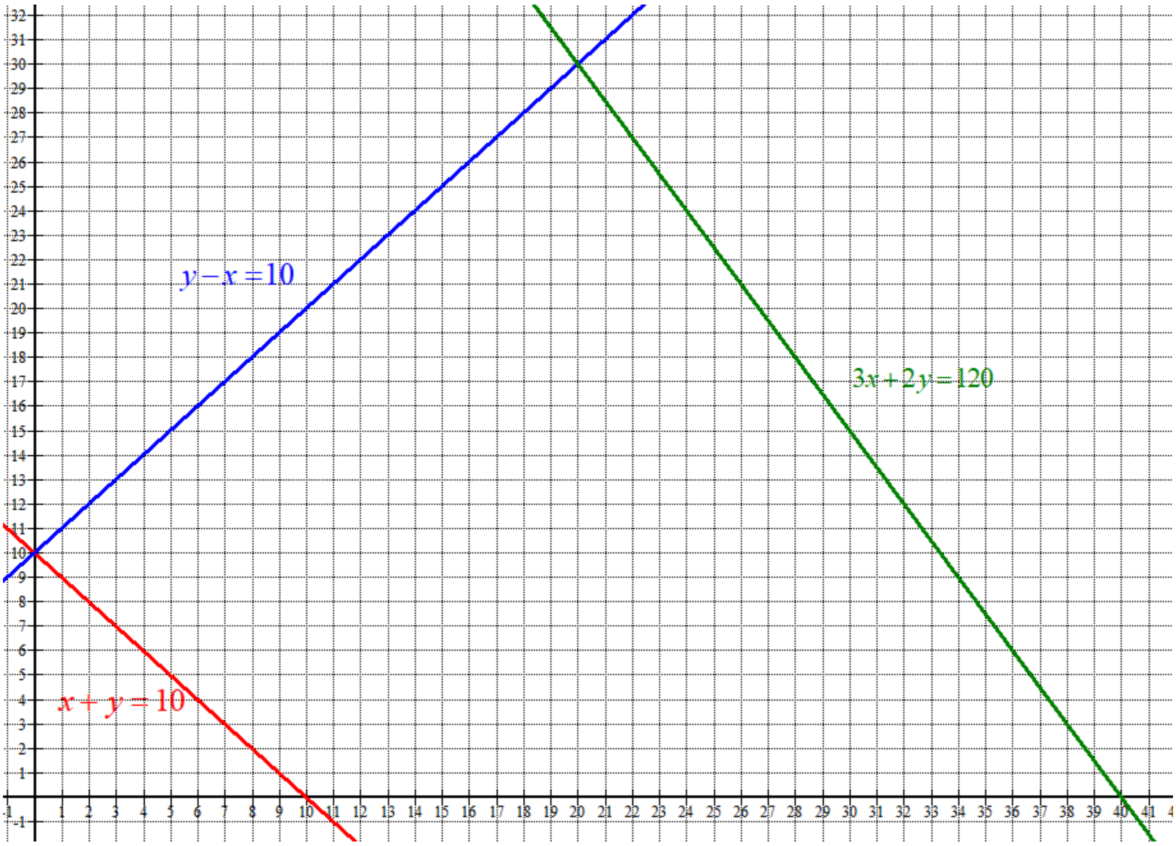
x	$10+x$
0	10
10	20

$3x+2y=120$

x	$y=\frac{120-3x}{2}$
0	60
40	0

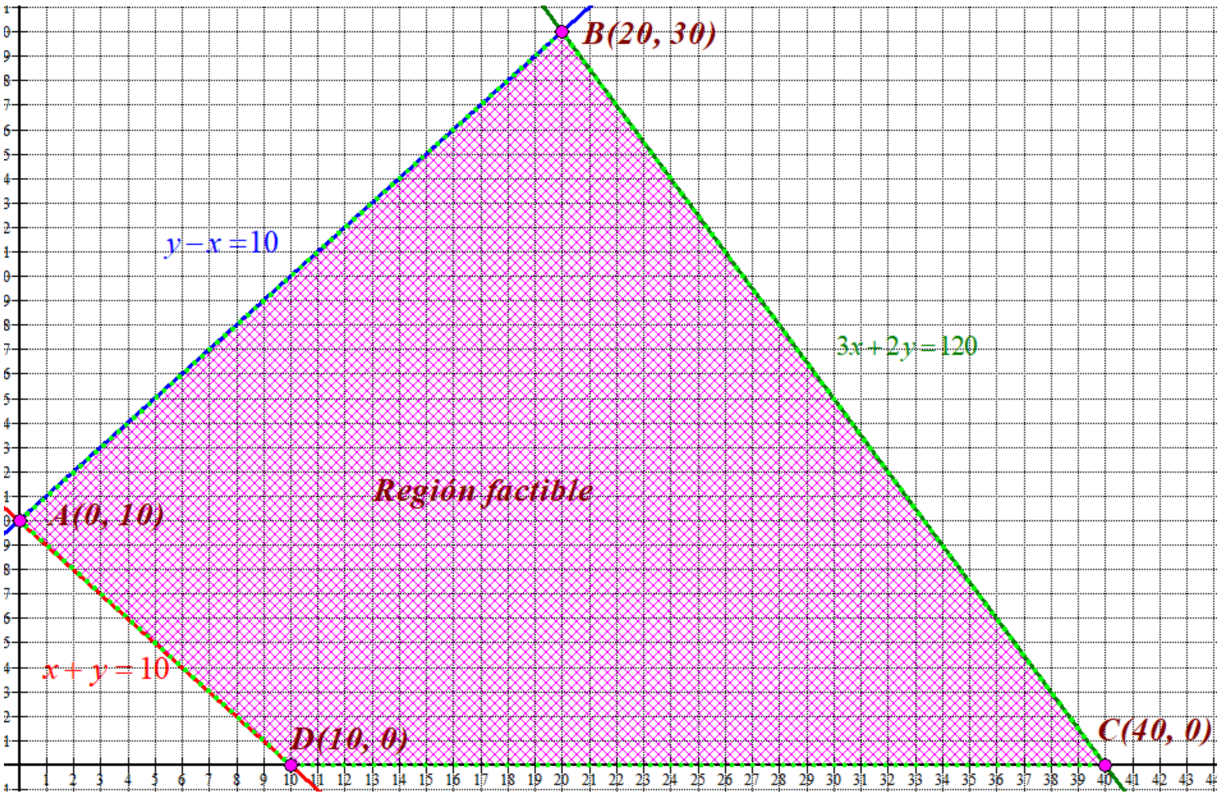
$x\geq 0;\ y\geq 0$

Primer cuadrante



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+y\geq 10 \\ y-x\leq 10 \\ 3x+2y\leq 120 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es una región del primer cuadrante que está por encima de la recta roja y por debajo de la azul y la verde.

La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo.



Para obtener el valor máximo del beneficio valoramos la función objetivo $f(x,y)=130x+140y$ en cada vértice.

A(0, 10) → $f(0,10)=1400$

B(20, 30) → $f(20,30)=2600+4200=6800$

C(40, 0) → $f(40,0)=5200$

D(10, 0) → $f(10,0)=1300$

El beneficio máximo es 6800 € que se consigue en el vértice B(20, 30).
Con la producción de 20 baterías de tipo A y 30 de tipo B se consigue el beneficio máximo de 6800 €.

EJERCICIO 2

Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & m\\ 0 & 2 & -3\\ m & 1 & 1\end{pmatrix}$, con m un parámetro real.

a) **(0.7 puntos)** ¿Para qué valores del parámetro m existe la matriz inversa de A?

b) **(1.8 puntos)** Para $m = 2$, resuelva la ecuación matricial $X \cdot A - A^2 = I_3$

a) Para que la matriz A tenga inversa debe tener determinante no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix}1 & -1 & m\\ 0 & 2 & -3\\ m & 1 & 1\end{vmatrix} = 2+3m-2m^2+3 = -2m^2+3m+5$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -2m^2+3m+5=0 \Rightarrow m = \frac{-3\pm\sqrt{3^2-4(-2)5}}{-4} = \frac{-3\pm 7}{-4} = \begin{cases}\frac{-3-7}{-4} = 2.5 = m\\ \frac{-3+7}{-4} = -1 = m\end{cases}$$

El determinante se anula para $m = 2.5$ y para $m = -1$.

La matriz inversa de A existe cuando $m \neq -1 \ y \ m \neq 2.5$

b) Para $m = 2$ existe la inversa de $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & -3\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$. La calculo.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & -3\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 2 & 1\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix} \quad y \quad |A| = 2+6-8+3 = 3$$

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 2 & 1\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}}{3} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix}2 & 1\\ -3 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & -3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & 2\\ -3 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -3\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}0 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}5 & 3 & -1\\ -6 & -3 & 3\\ -4 & -3 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5/3 & 1 & -1/3\\ -2 & -1 & 1\\ -4/3 & -1 & 2/3\end{pmatrix}$$

La utilizo para despejar en la ecuación matricial $X \cdot A - A^2 = I_3$.

$$X \cdot A - A^2 = I_3 \Rightarrow X \cdot A = A^2 + I_3 \Rightarrow X = \left(A^2 + I_3\right)A^{-1} = A^2 \cdot A^{-1} + I_3 \cdot A^{-1}$$

$$X = A \cdot A \cdot A^{-1} + A^{-1} = A \cdot I_3 + A^{-1}$$

$$X = A + A^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5/3 & 1 & -1/3 \\ -2 & -1 & 1 \\ -4/3 & -1 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 8/3 & 0 & 5/3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2/3 & 0 & 5/3 \end{pmatrix}}$$

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Se considera la función $f(x)=x^3-4x^2+4x$

a) **(1 punto)** Estudie su monotonía y calcule sus extremos.

b) **(0.5 puntos)** Represente gráficamente la función.

c) **(0.5 puntos)** Calcule $\int f(x)dx$.

d) **(0.5 puntos)** Calcule el área del recinto acotado limitado por la gráfica de *f* y el eje de abscisas.

a) Buscamos sus puntos críticos utilizando la derivada.

$$f(x)=x^3-4x^2+4x \Rightarrow f'(x)=3x^2-8x+4$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-8x+4=0 \Rightarrow x=\frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4(3)(4)}}{6}=\frac{8\pm 4}{6}=\begin{cases}\frac{8-4}{6}=\frac{2}{3}\\ \frac{8+4}{6}=2\end{cases}$$

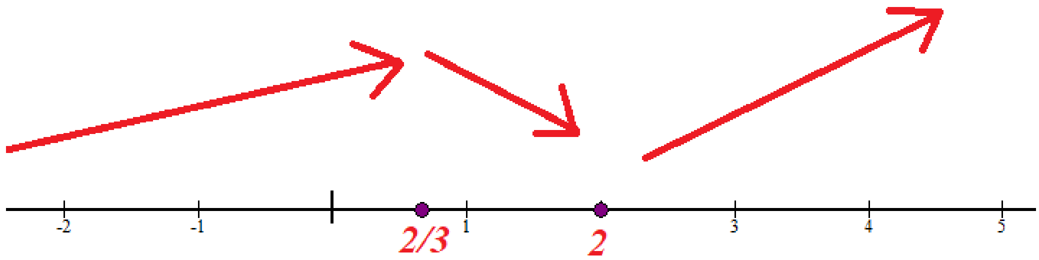
Vemos como es la función antes, entre y después de estos dos valores.

En $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0)=4>0$. La función crece en $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)$

En $\left(\frac{2}{3},2\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1)=3-8+4=-1<0$. La función decrece en $\left(\frac{2}{3},2\right)$

En $(2,+\infty)$ tomamos $x = 10$ y la derivada vale $f'(10)=300-80+4=224>0$. La función crece en $(2,+\infty)$

La función sigue el esquema:



La función crece en $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)\cup(2,+\infty)$ y decrece en $\left(\frac{2}{3},2\right)$.

La función tiene un máximo relativo en $x = 2/3$.

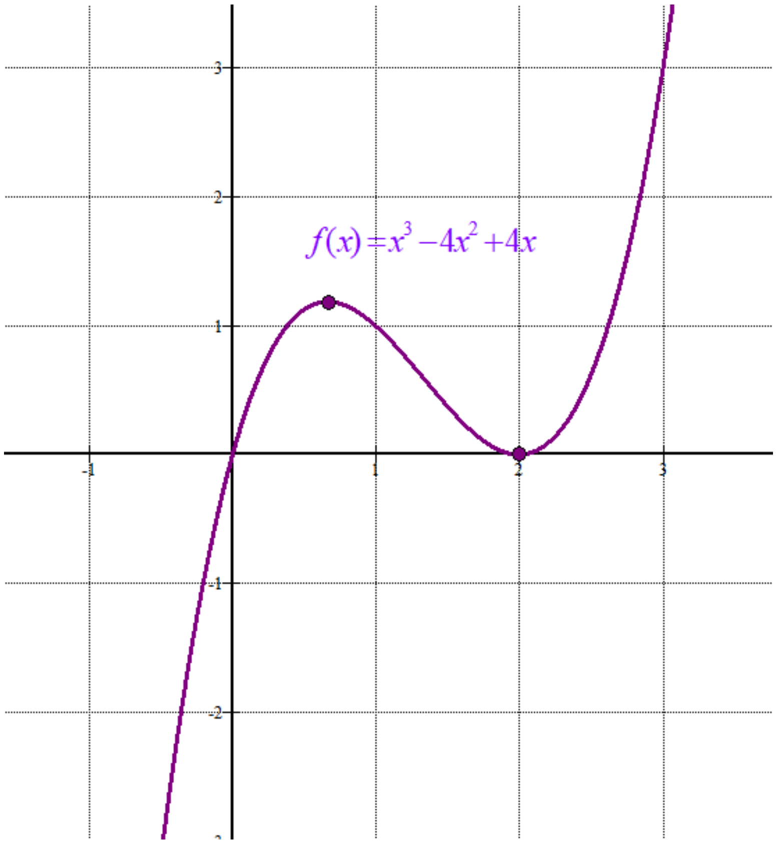
Como $f\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^3-4\left(\frac{2}{3}\right)^2+4\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{32}{27}$ el punto máximo relativo tiene coordenadas $\left(\frac{2}{3},\frac{32}{27}\right)$

La función tiene un mínimo relativo en $x = 2$.

Como $f(2)=2^3-4\cdot 2^2+8=0$ el punto mínimo relativo tiene coordenadas $(2,0)$

b) Obtenemos una tabla de valores para completar la gráfica de *f(x)*.

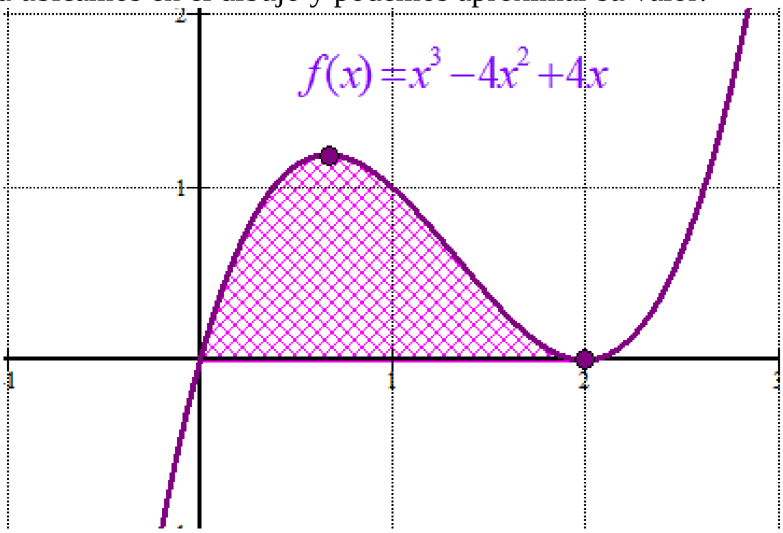
x	$y = x^3 - 4x^2 + 4x$
-1	-9
0	0
$2/3$	$32/27$
1	1
2	0
3	3
4	16



c)

$$\int f(x)dx = \int x^3 - 4x^2 + 4xdx = \boxed{\frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + K}$$

d) El área pedida la ubicamos en el dibujo y podemos aproximar su valor.



Su área es un poco más de una unidad cuadrada. La calculamos con más precisión haciendo uso de la integral definida de la función entre 0 y 2.

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 x^3 - 4x^2 + 4xdx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^2 =$$

$$= \left[\frac{2^4}{4} - \frac{4}{3}2^3 + 2\cdot 2^2\right] - \left[\frac{0^4}{4} - \frac{4}{3}0^3 + 2\cdot 0^2\right] = 4 - \frac{32}{3} + 8 = \boxed{\frac{4}{3}u^2}$$

EJERCICIO 4

a) **(1 punto)** Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \qquad g(x)=x^3\cdot e^{2x^2}$$

b) **(0.7 puntos)** Represente gráficamente la parábola $h(x)=x^2+x+1$, indicando el vértice y los puntos de corte con los ejes coordenados.

c) **(0.8 puntos)** Calcule el área del recinto limitado por la gráfica de $h(x)=x^2+x+1$, el eje de abscisas y las rectas $x=-\frac{1}{2}$ y $x=0$.

a)

$$f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\ln(x-1)-\ln(x+1)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=\frac{x+1-(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\boxed{\frac{2}{x^2-1}}$$

$$g(x)=x^3\cdot e^{2x^2}\Rightarrow g'(x)=3x^2\cdot e^{2x^2}+x^3\cdot e^{2x^2}\cdot 4x=\boxed{e^{2x^2}\left(3x^2+4x^4\right)}$$

b) La función es una parábola. Derivamos en busca de su vértice.

$$h(x)=x^2+x+1\Rightarrow h'(x)=2x+1$$

$$h'(x)=0\Rightarrow 2x+1=0\Rightarrow \boxed{x=-\frac{1}{2}}$$

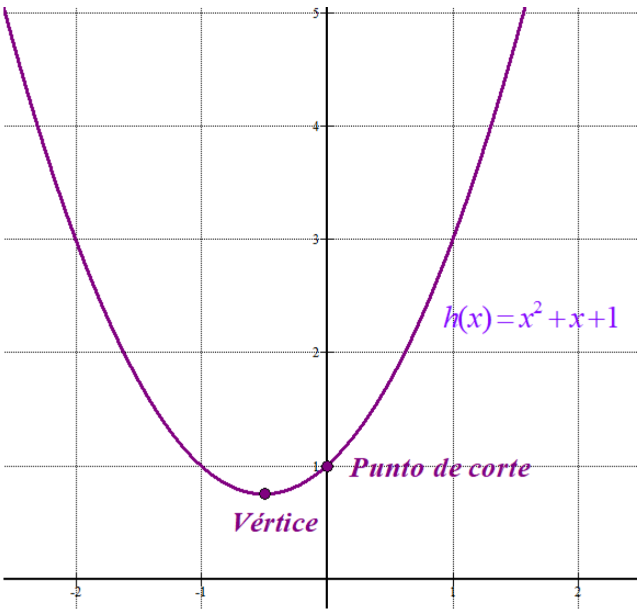
Para $x=-\frac{1}{2}$ la función vale $h\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+1=\frac{3}{4}$

El vértice tiene coordenadas $\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$

Los puntos de corte con los ejes.

x = 0 → $h(0)=0^2+0+1=1$ → El punto de corte con el eje OY es (0,1).

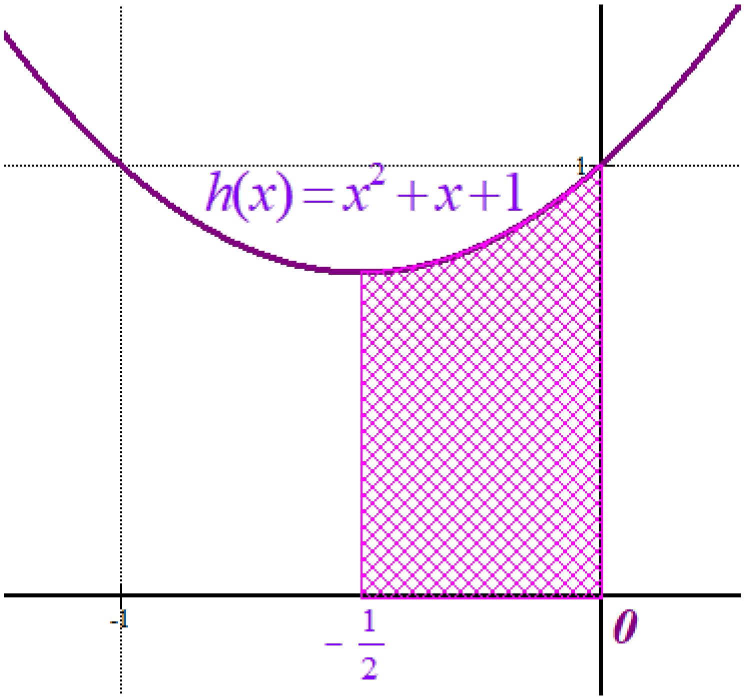
y = 0 → $0=x^2+x+1\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=$ No existe. No hay punto de corte con eje OX.



c) El área es la integral definida entre $x=-\frac{1}{2}$ y $x=0$ de $h(x)=x^2+x+1$.

$$Área=\int_{-1/2}^{0} x^2+x+1dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1/2}^{0}=\left[\frac{0^3}{3}+\frac{0^2}{2}+0\right]-\left[\frac{(-0.5)^3}{3}+\frac{(-0.5)^2}{2}-0.5\right]=$$

$$=\frac{1}{24}-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}=\frac{1-3+12}{24}=\boxed{\frac{5}{12}u^2}$$



BLOQUE C

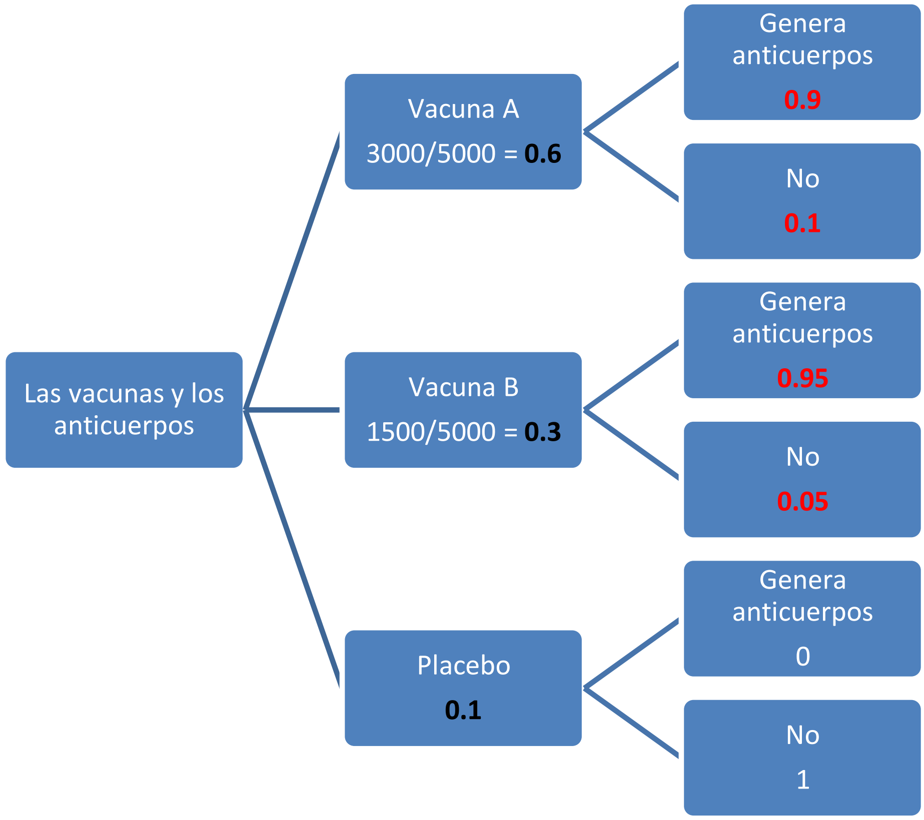
EJERCICIO 5

Se desea probar la eficacia de dos tipos de vacunas, A y B, contra un virus determinado. Para ello, se seleccionan 5000 voluntarios sin anticuerpos para este virus, a los que se les administra una de las vacunas o un placebo, resultando que 3000 reciben la vacuna A, 1500 la B y el resto el placebo. Se comprueba que el 90 % de los vacunados con la A y el 95 % de los vacunados con la B, generan anticuerpos, no generando anticuerpos los que han recibido el placebo. Se selecciona uno de esos voluntarios al azar.

a) **(1.5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que haya generado anticuerpos?

b) **(1 punto)** Si dicho voluntario no ha generado anticuerpos, ¿qué probabilidad hay de que se le haya administrado placebo?

Realizamos un diagrama de árbol.



Demos nombre abreviado a los sucesos que vamos a utilizar.

Llamemos G = "Generar anticuerpos", por lo que $\overline{G}$ = "No generar anticuerpos"

A = "Ponerse la vacuna A", B = "Ponerse la vacuna B", C = "Ponerse el placebo"

a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(G) = P(A \cap G) + P(B \cap G) + P(C \cap G) =$$
$$= P(A)P(G/A) + P(B)P(G/B) + P(C)P(G/C) =$$
$$= 0.6 \cdot 0.9 + 0.3 \cdot 0.95 + 0.1 \cdot 0 = \boxed{\frac{33}{40} = 0.825}$$

b) Es una probabilidad a posteriori, aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/\overline{G}) = \frac{P(C \cap \overline{G})}{P(\overline{G})} = \frac{P(C)P(\overline{G}/C)}{1 - P(G)} = \frac{0.1 \cdot 1}{1 - 0.825} = \boxed{\frac{4}{7} \simeq 0.57}$$

EJERCICIO 6
De las compras realizadas en el último período de rebajas del pasado año, el 55 % se dedicaron a productos electrónicos, el 72 % se hicieron a través de Internet y, de las compras que se hicieron por Internet, el 64 % fueron de productos electrónicos. Se elige una compra al azar.
a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que haya sido de productos electrónicos y se haya realizado por Internet.
b) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que la compra se haya realizado por Internet o que se hayan comprado productos electrónicos.
c) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que sabiendo que no se compraron productos electrónicos, la compra no se hiciera a través de Internet.

Si el 64 % de las compras que se hicieron por Internet fueron de productos electrónicos (72 % del total) entonces 0.64 · 0.72 = 0.4608, es decir, estas compras representan el 46.08 % del total. Hacemos una tabla de contingencia para obtener el resto de porcentajes y poder calcular la probabilidad que nos pidan.

	Productos electrónicos	Otros productos	
Por Internet	**46.08**		**72**
En tienda			
	55		**100**

Terminamos de completar la tabla.

	Productos electrónicos	Otros productos	
Por Internet	**46.08**	**25.92**	**72**
En tienda	**8.92**	**19.08**	**28**
	55	**45**	**100**

a) Aplicamos la regla de Laplace.

$$P\left(\text{Producto electrónico comprado por Internet}\right)=\frac{46.08}{100}=\boxed{0.4608}$$

b)

$$P\left(\text{Se haga la compra por Internet o se hayan comprado productos electrónicos}\right)=$$

$$=\frac{46.08+25.92+8.92}{100}=\frac{80.92}{100}=\boxed{0.8092}$$

c) Aplicamos la regla de Laplace.

$$P\left(\text{No se hiciera la compra por Internet, sabiendo que no se compraron productos electrónicos}\right)=$$

$$=\frac{19.08}{45}=\boxed{=\frac{53}{125}=0.424}$$

BLOQUE D

EJERCICIO 7

a) **(1.5 puntos)** En una Escuela Politécnica hay matriculados en el último curso 60 estudiantes de Ingeniería Eléctrica, 40 de Ingeniería Informáticas, 30 de Ingeniería Civil, 50 de Ingeniería Mecánica y 20 de Ingeniería Aeronáutica. Se quiere hacer una encuesta al 20 % de estos estudiantes, de manera proporcional al número de matriculados en cada titulación.

1. ¿Qué tipo de muestreo se debe emplear?
2. ¿Cuántos alumnos debe haber en la muestra y cuántos de cada titulación?

b) **(1 punto)** Dada la población {a, 10, 12, 11, 18}, ¿cuánto debe valer *a*, sabiendo que la media de las medias muestrales de tamaño 3, obtenidas mediante muestreo aleatorio simple, es 13.2?

a) 1. Se debe emplear muestreo aleatorio estratificado. Consiste en elegir por igual en cada grupo de la población a muestrear, un 20 % de cada grupo de estudiantes que hemos considerado.

2. El número total de estudiantes es 60 + 40 + 30 + 50 + 20 = 200. Debemos tomar una muestra del 20 % de los 200 estudiantes, es decir $\frac{20 \cdot 200}{100} = 40$ estudiantes, siendo 0.2 · 60 = 12 estudiantes de Ingeniería Eléctrica, 0.2 · 40 = 8 de Ingeniería Informáticas, 0.2 · 30 = 6 de Ingeniería Civil, 0.2 ·50 = 10 de Ingeniería Mecánica y 0.2 · 20 = 4 de Ingeniería Aeronáutica.

b) La media de los elementos de la población tiene el mismo valor que la media de las medias muestrales de tamaño 3.

$$\frac{a+10+12+11+18}{5} = 13.2 \Rightarrow a+51 = 66 \Rightarrow \boxed{a=15}$$

EJERCICIO 8

Se desea estimar la proporción de individuos mayores de edad de una localidad que están en contra de la construcción de una central nuclear en su término municipal. Para ello, se pregunta a 100 individuos mayores de edad de esa localidad, elegidos de forma aleatoria, resultando que 45 de ellos rechazan la construcción de la central.

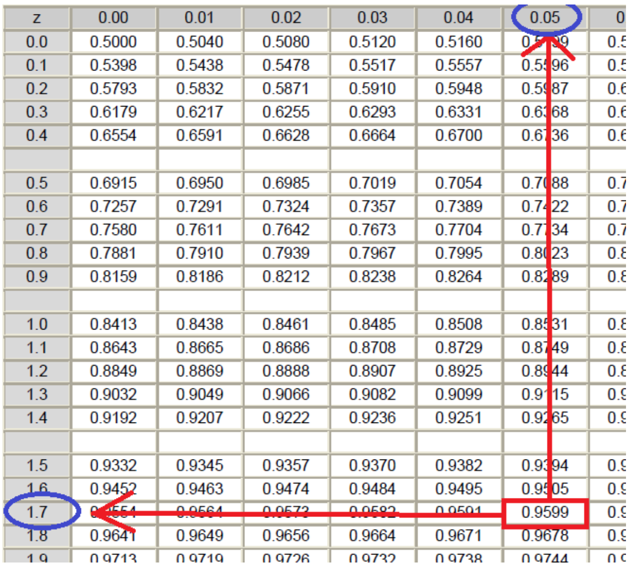
a) **(1.5 puntos)** Calcule un intervalo de confianza al 92 % para estimar la proporción real de individuos de esa localidad que están en contra de la construcción de la central.

b) **(1 punto)** Suponiendo que se mantiene la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño mínimo de la muestra que hay que tomar, para que al estimar la proporción de individuos de esa localidad que rechazan la construcción de la central, el error cometido sea inferior al 5 %.

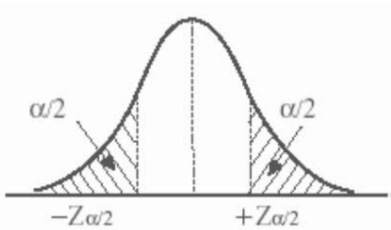
n = 100. $pr = \frac{45}{100} = 0.45$; $qr = 1 - pr = 1 - 0.45 = 0.55$

a) Con un nivel de confianza del 92 % tenemos

$1 - \propto = 0,92 \rightarrow \propto = 0,08 \rightarrow \propto/2 = 0'04 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0,96 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.75}$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	$\boxed{0.9599}$	0.9
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 1.75 \cdot \sqrt{\frac{0.45 \cdot 0.55}{100}} = 0.087$$

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$\left(pr - Error,\ pr + Error\right) = \left(0.45 - 0.087,\quad 0.45 + 0.087\right) = \left(0.363,\ 0.537\right)$$

b) ¿n?

Con un nivel de confianza del 92% tenemos $z_{\alpha/2}$ = **1,75**

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.75 \cdot \sqrt{\frac{0.45 \cdot 0.55}{n}} = 0.05 \Rightarrow \frac{0.05}{1.75} = \sqrt{\frac{0.45 \cdot 0.55}{n}} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{0.05}{1.75}\right)^2 = \frac{0.2475}{n} \Rightarrow n = \frac{0.2475}{\left(\frac{0.05}{1.75}\right)^2} = 303.1875$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser entero y superior al hallado, es decir, de 304 individuos.