Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2021

Proves d'accés a la universitat

Matemátiques aplicades a les ciències socials

Sèrie 1

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

1. La taula següent mostra els ingressos, en milers d'euros, d'una botiga que disposa de tres locals, durant els mesos de gener, febrer i març de 2020.

	Gener	Febrer	Març
Local 1	13,5	13,2	4,2
Local 2	11	12,5	3,8
Local 3	15	14	2,7

Hem recollit la informació anterior en la matriu A, en què cada fila indica un local i cada columna el mes corresponent:

$$A = \begin{pmatrix} 13{,}5 & 13{,}2 & 4{,}2 \\ 11 & 12{,}5 & 3{,}8 \\ 15 & 14 & 2{,}7 \end{pmatrix}$$

a) Considereu els vectors v = (1 1 1) i $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Feu les operacions v ·A i A·w. Interpreteu en cada cas el resultat obtingut. [1,25 punts]

b) La matriu B recull els resultats del trimestre següent, és a dir, els ingressos corresponents als mesos d'abril, maig i juny de 2020:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \\ 4 & 11 & x \end{pmatrix}$$

Desconeixem la dada corresponent al mes de juny del local 3, que hem denominat x, però sabem que el rang de la matriu B és 2. Trobeu el valor de x. [1,25 punts]

2. La Filomena fa una festa i convida els amics a menjar un pastís. Ha anat a la botiga i ha comprat una dotzena d'ous, una bossa de farina d'ametlla i un paquet de sucre morè. La festa ha estat un èxit i decideix repetir la trobada i tornar a fer el pastís. Torna a la botiga i compra una altra dotzena d'ous i dues bosses de farina d'ametlla. Però un cop a casa s'adona que no té gens de sucre. Torna a la botiga i compra un paquet de sucre morè i també una altra dotzena d'ous. La primera compra li va costar 6 €, la segona 6,5 € i la darrera 3,5 €.

a) Plantegeu un sistema d'equacions amb les dades del problema. [0,75 punts]

b) Calculeu el preu d'una dotzena d'ous, el d'una bossa de farina d'ametlla i el d'un paquet de sucre morè. [1,75 punts]

3. Un restaurant que acaba d'obrir vol posar anuncis a la ràdio i a la televisió locals durant una setmana per a donar-se a conèixer i augmentar així el nombre de clients. Té un pressupost màxim de 18.000 euros. Cada anunci a la ràdio costa 1.000 euros i el contracte preveu que com a mínim cal fer-ne 3. Cada anunci a la televisió costa 3.000 euros i, per disponibilitat de programació, se'n poden fer com a màxim 4. S'estima que cada anunci a la ràdio suposa un increment de 10 clients per al restaurant i que cada anunci a la televisió suposa un increment de 60 clients.

a) Determineu la funció objectiu i les restriccions. Dibuixeu la regió factible. [1,25 punts]

b) Calculeu quants anuncis haurà de posar a la ràdio i quants a la televisió perquè el nombre de clients nous sigui màxim. Quants clients nous obtindrà? [1,25 punts]

4. La funció $C(t)=3-\dfrac{1}{t^2-4t+5}$, en què *t* són els anys transcorreguts i *C(t)* la quantitat de clients, expressada en milers, modelitza l'evolució d'una empresa que ha entrat en crisi.

a) Calculeu quants clients tenia l'empresa en el moment inicial i quants en tenia al cap d'un any. [0,5 punts]

b) Trobeu l'instant en què l'empresa deixa de perdre clients i calculeu quants clients té en aquell instant. [1 punt]

c) Calculeu quant temps haurà de passar perquè l'empresa aconsegueixi tenir de nou el mateix nombre de clients que en el moment d'iniciar l'estudi. [1 punt]

5. Una empresa posa a la venda un producte que distribueix en caixes. El benefici B obtingut per l'empresa, expressat en milers d'euros, és donat per l'expressió $B(x)=-x^2+16x-55$, en què $x>0$ és el preu de venda de cada caixa, expressat en euros.

a) Quin benefici obtindrà si el preu de venda de cada caixa és de 6 euros? Entre quins valors cal fixar el preu de venda d'una caixa per a obtenir beneficis? [1,25 punts]

b) A quin preu ha de vendre cada caixa perquè el benefici sigui el més gran possible? Quin és aquest benefici màxim? [1,25 punts]

6. Considereu la funció $f(x)=px^3-4x^2+7px-18$.

a) Calculeu quin ha de ser el valor del paràmetre *p* perquè les rectes tangents a la corba en els punts d'abscisses $x = 1$ i $x = 3$ siguin paral·leles. [1,25 punts]

b) Escriviu l'equació de la recta tangent al punt d'abscissa $x = 3$ per al valor de $p = 2$. [1,25 punts]

SOLUCIONES

1. La taula següent mostra els ingressos, en milers d'euros, d'una botiga que disposa de tres locals, durant els mesos de gener, febrer i març de 2020.

	Gener	Febrer	Març
Local 1	13,5	13,2	4,2
Local 2	11	12,5	3,8
Local 3	15	14	2,7

Hem recollit la informació anterior en la matriu A, en què cada fila indica un local i cada columna el mes corresponent:

$$A=\begin{pmatrix}13,5 & 13,2 & 4,2\\ 11 & 12,5 & 3,8\\ 15 & 14 & 2,7\end{pmatrix}$$

a) Considereu els vectors v = (1 1 1) i $w=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Feu les operacions v ·A i A·w. Interpreteu en cada cas el resultat obtingut. [1,25 punts]

b) La matriu B recull els resultats del trimestre següent, és a dir, els ingressos corresponents als mesos d'abril, maig i juny de 2020:

$$B=\begin{pmatrix}2 & 6 & 4\\ 2 & 7 & 5\\ 4 & 11 & x\end{pmatrix}$$

Desconeixem la dada corresponent al mes de juny del local 3, que hem denominat *x*, però sabem que el rang de la matriu B és 2. Trobeu el valor de *x*. [1,25 punts]

a)

$$v\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}13,5 & 13,2 & 4,2\\ 11 & 12,5 & 3,8\\ 15 & 14 & 2,7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13,5+11+15 & 13,2+12,5+14 & 4,2+3,8+2,7\end{pmatrix}$$

$$v\cdot A=\begin{pmatrix}39,5 & 39,7 & 10,7\end{pmatrix}$$

El vector tiene unos elementos que se corresponden con los ingresos totales en miles de euros del conjunto de los tres locales en los meses de enero (39,5), febrero (39,7) y marzo (10,7) de 2020.

$$A\cdot w=\begin{pmatrix}13,5 & 13,2 & 4,2\\ 11 & 12,5 & 3,8\\ 15 & 14 & 2,7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13,5+13,2+4,2\\ 11+12,5+3,8\\ 15+14+2,7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30,9\\27,3\\31,7\end{pmatrix}$$

En esta matriz aparecen los ingresos totales durante los tres meses en cada uno de los locales.

b) Calculamos el determinante de B y vemos cuando se anula.

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \\ 4 & 11 & x \end{vmatrix} = 14x + 120 + 88 - 112 - 12x - 110 = 2x - 14$$

$$|B| = 0 \Rightarrow 2x - 14 = 0 \Rightarrow x = 7$$

Para $x = 7$ el determinante de B es nulo y por tanto su rango no es 3.

¿El rango de B es 2 para $x = 7$?

La matriz B queda $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \\ 4 & 11 & 7 \end{pmatrix}$ y de ella podemos extraer un menor de orden 2 con determinante no nulo, por ejemplo quitando la fila y columna 3ª → $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 12 = 2 \neq 0$

Queda demostrado que el rango de la matriz B para $x = 7$ no es 3 (detB = 0) y si es 2.

2. La Filomena fa una festa i convida els amics a menjar un pastís. Ha anat a la botiga i ha comprat una dotzena d'ous, una bossa de farina d'ametlla i un paquet de sucre morè. La festa ha estat un èxit i decideix repetir la trobada i tornar a fer el pastís. Torna a la botiga i compra una altra dotzena d'ous i dues bosses de farina d'ametlla. Però un cop a casa s'adona que no té gens de sucre. Torna a la botiga i compra un paquet de sucre morè i també una altra dotzena d'ous. La primera compra li va costar 6 €, la segona 6,5 € i la darrera 3,5 €.
a) Plantegeu un sistema d'equacions amb les dades del problema. [0,75 punts]
b) Calculeu el preu d'una dotzena d'ous, el d'una bossa de farina d'ametlla i el d'un paquet de sucre morè. [1,75 punts]

a) Llamamos *x, y, z* al precio de una docena de huevos, una bolsa de harina y un paquete de azúcar moreno, respectivamente.

"*Compra una docena de huevos, una bolsa de harina y un paquete de azúcar por 6 €*" → $x+y+z=6$

"*Compra una docena de huevos y dos bolsas de harina por 6,5 €*" → $x+2y=6.5$

"*Compra una docena de huevos y un paquete de azúcar por 3,5 €*" → $x+z=3.5$

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=6 \\ x+2y=6.5 \\ x+z=3.5 \end{array}\right\}$$

b) Resolvemos el sistema planteado.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=6 \\ x+2y=6.5 \\ x+z=3.5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=6 \\ x+2y=6.5 \\ x=3.5-z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3.5-z+y+z=6 \\ 3.5-z+2y=6.5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=6-3.5 \\ -z+2y=6.5-3.5 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \boxed{y=2.5} \\ -z+2y=3 \end{array}\right\} \Rightarrow -z+5=3 \Rightarrow \boxed{z=2} \Rightarrow \boxed{x=3.5-2=1.5}$$

El precio de una docena de huevos es de 1.5 €, el de una bolsa de harina de almendra es 2.5 € y el de un paquete de azúcar moreno es de 2 €.

3. Un restaurant que acaba d'obrir vol posar anuncis a la ràdio i a la televisió locals durant una setmana per a donar-se a conèixer i augmentar així el nombre de clients. Té un pressupost màxim de 18.000 euros. Cada anunci a la ràdio costa 1.000 euros i el contracte preveu que com a mínim cal fer-ne 3. Cada anunci a la televisió costa 3.000 euros i, per disponibilitat de programació, se'n poden fer com a màxim 4. S'estima que cada anunci a la ràdio suposa un increment de 10 clients per al restaurant i que cada anunci a la televisió suposa un increment de 60 clients.
a) Determineu la funció objectiu i les restriccions. Dibuixeu la regió factible. [1,25 punts]
b) Calculeu quants anuncis haurà de posar a la ràdio i quants a la televisió perquè el nombre de clients nous sigui màxim. Quants clients nous obtindrà? [1,25 punts]

a) Llamamos "x" al número de anuncios en la radio e "y" al número de anuncios en la televisión.

Realizamos una tabla con los datos.

	Nº clientes nuevos	Coste
Nº anuncios radio (x)	*10x*	*1000x*
Nº anuncios TV (y)	*60y*	*3000y*
TOTALES	$10x+60y$	$1000x+3000y$

La función objetivo es el número de clientes nuevos $f(x,y)=10x+60y$. Deseamos maximizar esta función.

Las restricciones son:

"*Disponemos de un presupuesto de 18000 €*" → $1000x+3000y\le 18000$
"*Debemos de hacer, al menos, 3 anuncios en la radio*" → $x\ge 3$
"*Podemos hacer como máximo 4 anuncios en la TV*" → $y\le 4$
Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l}1000x+3000y\le 18000\\ x\ge 3\\ y\le 4\\ x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}x+3y\le 18\\ x\ge 3\\ y\le 4\\ x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas al sistema de inecuaciones.

$x+3y=18$

x	$y=\frac{18-x}{3}$
6	4
3	5

$x=3$

$x=3$	y
3	5
3	4

$y=4$

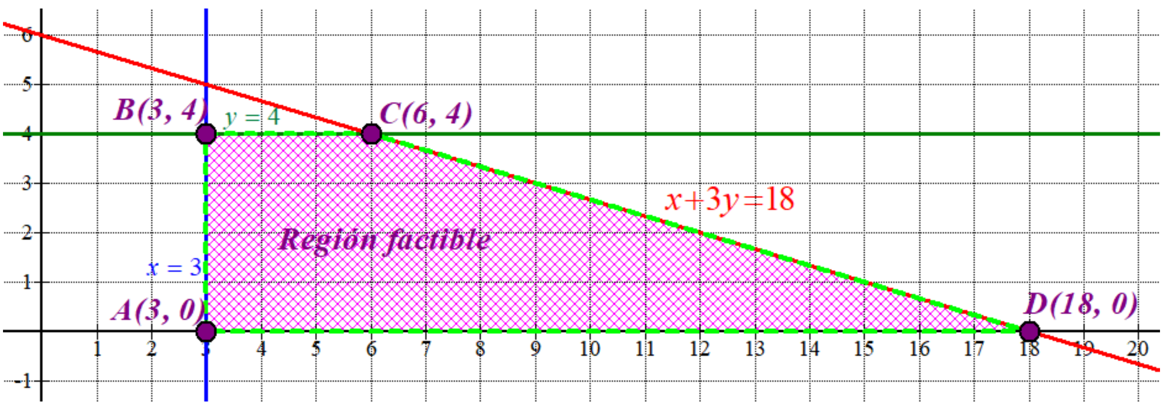
x	$y=4$
3	4
6	4

$x\ge 0;\ y\ge 0$

Primer cuadrante

Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+3y\leq 18 \\ x\geq 3 \\ y\leq 4 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región del plano que cumple estas restricciones es la región del primer cuadrante situada por debajo de la recta roja y la recta horizontal verde y a la derecha de la recta vertical azul.

La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo y marcamos los vértices.



b) La función objetivo es el número de clientes nuevos que viene reflejada en la expresión dependiente del número de anuncios en radio y TV como $f(x,y)=10x+60y$.

Valoramos la función en cada vértice.

A(3, 0) → $f(3,0)=30$

B(3, 4) → $f(3,4)=30+240=270$

A(6, 4) → $f(6,4)=60+240=300$ ¡¡MÁXIMO!!

A(18, 0) → $f(18,0)=180$

El número máximo de clientes nuevos es 300 y se consigue con 6 anuncios de radio y 4 de TV.

4. La funció $C(t)=3-\dfrac{1}{t^2-4t+5}$, en què t són els anys transcorreguts i *C(t)* la quantitat de clients, expressada en milers, modelitza l'evolució d'una empresa que ha entrat en crisi.
a) Calculeu quants clients tenia l'empresa en el moment inicial i quants en tenia al cap d'un any. [0,5 punts]
b) Trobeu l'instant en què l'empresa deixa de perdre clients i calculeu quants clients té en aquell instant. [1 punt]
c) Calculeu quant temps haurà de passar perquè l'empresa aconsegueixi tenir de nou el mateix nombre de clients que en el moment d'iniciar l'estudi. [1 punt]

a) En el momento $t = 0$ el número de clientes es $C(0)=3-\dfrac{1}{0^2-0+5}=3-\dfrac{1}{5}=2.8$, lo que significa 2800 clientes. En el momento $t = 1$ el número de clientes es $C(1)=3-\dfrac{1}{1^2-4+5}=3-\dfrac{1}{2}=2.5$, lo que significa 2500 clientes al cabo de 1 año.

b) Averiguamos cuando la función deja de decrecer utilizando la derivada.

$$C(t)=3-\frac{1}{t^2-4t+5}\Rightarrow C'(t)=0-\frac{0-(2t-4)}{(t^2-4t+5)^2}=\frac{-4+2t}{(t^2-4t+5)^2}$$

$$C'(t)=0\Rightarrow\frac{-4+2t}{(t^2-4t+5)^2}=0\Rightarrow -4+2t=0\Rightarrow t=2$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $t = 2$.

- En $(0,2)$ tomamos $t = 1$ y la derivada vale $C'(1)=\dfrac{-4+2}{(1^2-4+5)^2}=\dfrac{-2}{4}<0$. La función decrece en $(0,2)$.
- En $(2,+\infty)$ tomamos $t = 3$ y la derivada vale $C'(3)=\dfrac{-4+6}{(3^2-12+5)^2}=\dfrac{2}{4}>0$. La función crece en $(2,+\infty)$.

El número de clientes decrece los dos primeros años y a partir del segundo año empiezan a crecer, siendo en este momento $C(2)=3-\dfrac{1}{2^2-8+5}=3-\dfrac{1}{1}=2$, es decir, 2000 clientes.

c) Igualamos la función a 2.8 para ver cuando vuelve a tener 2800 clientes como en el momento inicial.

$$C(t)=3-\frac{1}{t^2-4t+5}=2.8\Rightarrow\frac{1}{t^2-4t+5}=0.2\Rightarrow\frac{1}{t^2-4t+5}=\frac{1}{5}\Rightarrow t^2-4t+5=5\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2-4t=0\Rightarrow t(t-4)=0\Rightarrow\begin{cases}t=0\\ t-4=0\Rightarrow\boxed{t=4}\end{cases}$$

En el cuarto año se vuelve a tener los 2800 clientes del momento inicial.

5. Una empresa posa a la venda un producte que distribueix en caixes. El benefici B obtingut per l'empresa, expressat en milers d'euros, és donat per l'expressió $B(x)=-x^2+16x-55$, en què $x>0$ és el preu de venda de cada caixa, expressat en euros.
a) Quin benefici obtindrà si el preu de venda de cada caixa és de 6 euros? Entre quins valors cal fixar el preu de venda d'una caixa per a obtenir beneficis? [1,25 punts]
b) A quin preu ha de vendre cada caixa perquè el benefici sigui el més gran possible? Quin és aquest benefici màxim? [1,25 punts]

a) Nos piden calcular *B(6)*.

$$B(6)=-6^2+16\cdot 6-55=5$$

El beneficio con un precio de 6 euros por cada caja es de 5000 euros.

Nos piden que precio hay que fijar para obtener beneficios. Es decir, a partir de que *x* se tiene que *B(x) > 0*.

Vemos cuando se anula la función beneficio.

$$B(x)=0 \Rightarrow -x^2+16x-55=0 \Rightarrow x=\frac{-16\pm\sqrt{16^2-4(-1)(-55)}}{-2}$$

$$x=\frac{-16\pm\sqrt{16^2-4(-1)(-55)}}{-2}=\frac{-16\pm 6}{-2}=\begin{cases}\frac{-16+6}{-2}=5\\ \frac{-16-6}{-2}=11\end{cases}$$

El beneficio es nulo para un precio de 5 euros y de 11 euros.
Veamos como evoluciona el beneficio antes, entre y después de estos dos valores.

- En $(0,5)$ tomamos *x = 1* y el beneficio es $B(1)=-1^2+16-55=-40<0$
- En $(5,11)$ tomamos *x = 6* y el beneficio es $B(6)=5>0$
- En $(11,+\infty)$ tomamos *x = 20* y el beneficio es $B(20)=-20^2+320-55=-135<0$

El beneficio es positivo en el intervalo de precio de la caja de 5 a 11 euros.

b) Nos piden determinar el máximo de la función beneficio.
Derivamos la función e igualamos a cero la derivada en busca de los puntos críticos.

$$B(x)=-x^2+16x-55 \Rightarrow B'(x)=-2x+16$$

$$B'(x)=0 \Rightarrow -2x+16=0 \Rightarrow -2x=-16 \Rightarrow \boxed{x=8}$$

Vemos si el punto crítico es máximo o mínimo sustituyendo el valor en la segunda derivada.

$$B'(x)=-2x+16 \Rightarrow B''(x)=-2$$
$$B''(8)=-2<0$$

El beneficio tiene un máximo relativo en *x = 8*.
El beneficio máximo es de $B(8)=-8^2+16\cdot 8-55=9$, es decir, de 9000 euros.

6. Considereu la funció $f(x) = px^3 - 4x^2 + 7px - 18$.

a) Calculeu quin ha de ser el valor del paràmetre *p* perquè les rectes tangents a la corba en els punts d'abscisses *x = 1* i *x = 3* siguin paral·leles. [1,25 punts]

b) Escriviu l'equació de la recta tangent al punt d'abscissa *x = 3* per al valor de *p = 2*. [1,25 punts]

a) Para que las rectas tangentes a la curva sean paralelas deben de tener la misma pendiente y para ello la derivada de la función en ambos valores debe ser igual, es decir, *f ´(3) = f ´(1)*.

$$\left.\begin{array}{r} f(x) = px^3 - 4x^2 + 7px - 18 \Rightarrow f'(x) = 3px^2 - 8x + 7p \\ f'(3) = f'(1) \end{array}\right\} \Rightarrow 3p(3)^2 - 24 + 7p = 3p(1)^2 - 8 + 7p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 27p - 24 + 7p = 3p - 8 + 7p \Rightarrow 24p = 16 \Rightarrow \boxed{p = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}}$$

El valor buscado es *p = 2/3*.

b) Para *p = 2* la función es $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 14x - 18$.

La ecuación de la recta tangente a la curva en *x = 3* tiene ecuación $y - f(3) = f'(3)(x-3)$.

$$\left.\begin{array}{r} f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 14x - 18 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 8x + 14 \\ f(3) = 2 \cdot 3^3 - 4 \cdot 3^2 + 14 \cdot 3 - 18 = 42 \\ f'(3) = 6 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 + 14 = 44 \\ y - f(3) = f'(3)(x-3) \end{array}\right\} \Rightarrow y - 42 = 44(x-3) \Rightarrow \boxed{y = 44x - 90}$$