| COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA | Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade 2021 | **Código: 40** |
|---|---|---|

# MATEMÁTICAS APLICADAS ÁS CIENCIAS SOCIAIS II

El examen consta de 6 ejercicios, **todos con la misma valoración máxima (3,33 puntos)**, de los que puede realizar un **MÁXIMO DE 3** combinados como quiera. Si realiza más ejercicios de los permitidos, **sólo se corregirán los tres primeros realizados**.

**EJERCICIO 1. Álgebra**. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} m & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Determine para que valores de m existe la matriz inversa de A.
b) Despeje la matriz X tal que X·A+B= C y calcúlela para m=1.

**EJERCICIO 2. Álgebra.** Consideramos el siguiente sistema de inecuaciones:

$$y \le x+2 \qquad x+y \le 6 \qquad x \le 5 \qquad y \ge 0$$

a) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.
b) Determine el punto o puntos de esa región en donde la función $f(x,y)=x-y$ alcanza sus valores máximo y mínimo. c) Determine esos valores máximo y mínimo.

**EJERCICIO 3. Análisis.** La cantidad de $CO_2$ (en millones de toneladas) emitidas a la atmósfera por una determinada región a lo largo del año 2020, viene dada por la función:

$$C(t)=\begin{cases} 5-\dfrac{t}{3} & , \quad 0 \le t < 6 \\ \dfrac{1}{4}t^2-4t+18 & , \quad 6 \le t \le 12 \end{cases}$$ siendo t el tiempo transcurrido en meses desde comienzo del año.

**a)** Estudie en qué períodos se ha producido un aumento/disminución de la cantidad de $CO_2$ emitida a la atmósfera.
**b)** ¿Cuáles son las cantidades máxima y mínima de $CO_2$ emitidas a la atmósfera a lo largo del año 2020? ¿En qué momentos se produjeron?
**c)** Represente la gráfica de la función C(t) teniendo en cuenta el estudio realizado en los apartados anteriores.

**EJERCICIO 4. Análisis.** Un fabricante de automóviles hace un estudio sobre los beneficios, en miles de euros, a lo largo de los diez últimos años, y comprueba que éstos se ajustan a la función $B(t)=t^3-18t^2+81t-3 \quad si \quad 0 \le t \le 10$, (t en años)

a) ¿Qué beneficios obtuvo la empresa el último año del estudio?
b) Determine los periodos de crecimiento y decrecimiento de los beneficios
c) ¿En qué años se producen los beneficios máximos y mínimos y a cuánto ascienden?
d) Calcule $\int_1^2 B(t)dt$.

**EJERCICIO 5. Estadística y probabilidad.** En una población el 45 % son hombres. El 27% de esa población resulta ser hombre y lector de prensa deportiva, mientras que un 38.5% es mujer y no lectora de esa prensa. **a)** De las mujeres, ¿qué porcentaje lee prensa deportiva? **b)** ¿Qué porcentaje es mujer o lee prensa deportiva? **c)** De los lectores de prensa deportiva, ¿qué porcentaje son hombres? **d)** ¿Son incompatibles los sucesos ser hombre y no leer prensa deportiva? Justifique la respuesta.

**EJERCICIO 6. Estadística y probabilidad.** Una compañía de seguros quiere determinar qué proporción de sus clientes estaría dispuesta a aceptar una subida de tarifas a cambio de un incremento en sus prestaciones. Una encuesta previa indica que esta proporción está en torno al 15%.
**a)** ¿De qué tamaño mínimo debería ser la muestra si se quiere estimar dicha proporción con un error inferior a 0,08 y un nivel de confianza del 95%?
Finalmente, se realiza el estudio con una muestra de 196 clientes, de los que 37 manifestaron su conformidad con la propuesta. **b)** Calcule un intervalo de confianza, al 92%, para la proporción de clientes de la compañía que aceptaría dicha propuesta. ¿Cuál es el error máximo cometido?

# SOLUCIONES

**EJERCICIO 1. Álgebra**. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} m & 4 & 4\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}.$$

a) Determine para que valores de m existe la matriz inversa de A.
b) Despeje la matriz X tal que X·A+B= C y calcúlela para m=1.

a) Para que exista la inversa de A su determinante debe ser no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix} m & 4 & 4\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=2m$$

$$|A|=0\Rightarrow 2m=0\Rightarrow m=0$$

Para que exista la inversa de A el valor de m debe ser distinto de 0.

b) Para m = 1 existe la inversa de A y puedo despejar de la ecuación matricial la matriz X.

$$X\cdot A+B=C\Rightarrow X\cdot A=C-B\Rightarrow X=(C-B)A^{-1}$$

Determinamos la inversa de A.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=2$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 4 & 2 & 0\\ 4 & 4 & 1\end{pmatrix}}{2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 0\\ 4 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 0\\ 4 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & 2\\ 4 & 4\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix} 0 & 0\\ 4 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0\\ 4 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0\\ 4 & 4\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix} 0 & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0\\ 4 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0\\ 4 & 2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 8\\ 0 & 1 & -4\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4\\ 0 & 1/2 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Sustituimos y determinamos X.

$$X=(C-B)A^{-1}=\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4\\ 0 & 1/2 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4\\ 0 & 1/2 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 2+1 & -4-4-1\\ 0 & 1 & -4-2\end{pmatrix}$$

$$2\times\boxed{3\quad\cdot\quad 3}\times 3\longrightarrow 2\times 3$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix} -1 & 3 & -9\\ 0 & 1 & -6\end{pmatrix}}$$

**EJERCICIO 2. Álgebra.** Consideramos el siguiente sistema de inecuaciones:

$$y \le x+2 \qquad x+y \le 6 \qquad x \le 5 \qquad y \ge 0$$

a) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.

b) Determine el punto o puntos de esa región en donde la función $f(x,y) = x - y$ alcanza sus valores máximo y mínimo. c) Determine esos valores máximo y mínimo.

a) Representamos las rectas que delimitan la región.

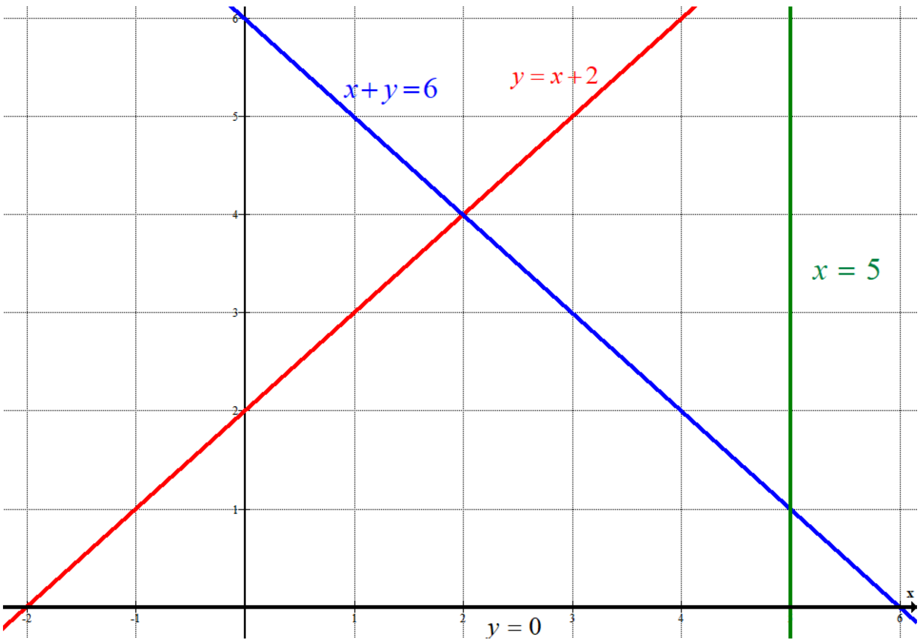
$y = x+2$ $\qquad x+y=6$ $\qquad x=5$ $\qquad y=0$

| $x$ | $y=x+2$ |
|---|---|
| 0 | 2 |
| 2 | 4 |
| 4 | 6 |

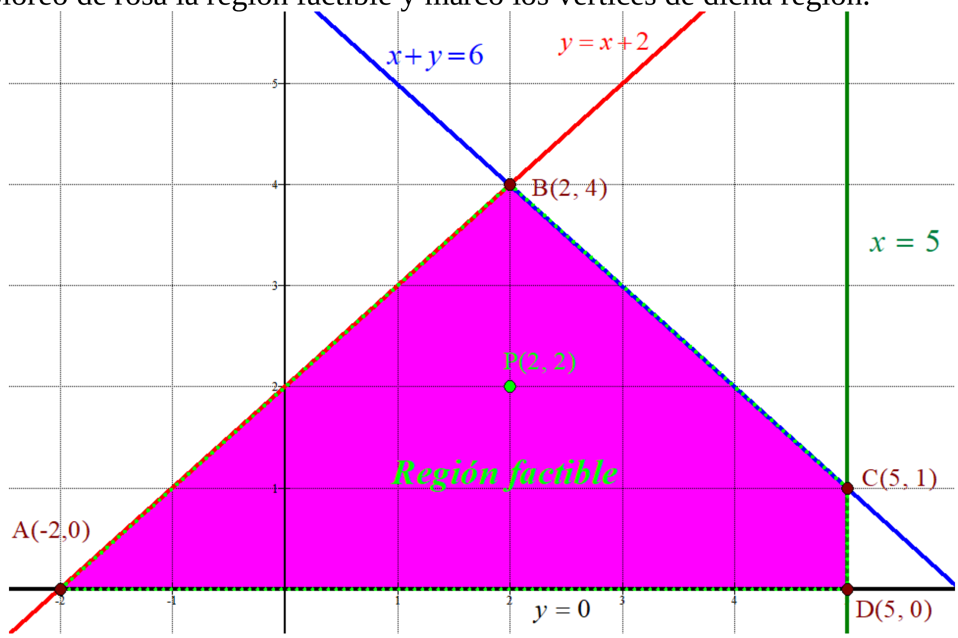
| $x$ | $y=6-x$ |
|---|---|
| 0 | 6 |
| 2 | 4 |
| 6 | 0 |

$x=5$: Recta *vertical*

$y=0$: Eje OX




Como las restricciones son $y \le x+2 \qquad x+y \le 6 \qquad x \le 5 \qquad y \ge 0$ entonces la región está por debajo de las rectas azul y roja, por encima de la recta negra y a la izquierda de la recta verde. Coloreo de rosa la región factible y marco los vértices de dicha región.



Compruebo que el punto P(2,2) cumple las restricciones.

$2 \leq 2+2$ $\quad 2+2 \leq 6$ $\quad 2 \leq 5$ $\quad 2 \geq 0$ ¡Se cumplen todas! La región factible es correcta.

Los vértices son A(–2, 0), B(2, 4), C(5, 1) y D(5, 0).

b) Valoramos la función $f(x, y) = x - y$ en cada uno de los vértices y averiguamos el valor mínimo y máximo de la función.

A(–2,0) → $f(-2,0) = -2-0 = -2$

B(2, 4) → $f(2,4) = 2-4 = -2$

C(5, 1) → $f(5,1) = 5-1 = 4$

D(5, 0) → $f(5,0) = 5-0 = 5$

El valor máximo es 5 y se alcanza en el punto D(5, 0) y el mínimo es –2 y se alcanza en toda el segmento AB, en los puntos A(–2,0), (–1, 1), (0,2),…, B(2,4).

c) El valor máximo es 5 y el mínimo es –2.

**EJERCICIO 3. Análisis.** La cantidad de $CO_2$ (en millones de toneladas) emitidas a la atmósfera por una determinada región a lo largo del año 2020, viene dada por la función:

$$C(t)=\begin{cases} 5-\dfrac{t}{3} & , \quad 0\le t<6 \\ \dfrac{1}{4}t^2-4t+18 & , \quad 6\le t\le 12 \end{cases}$$ siendo t el tiempo transcurrido en meses desde comienzo del año.

**a)** Estudie en qué períodos se ha producido un aumento/disminución de la cantidad de $CO_2$ emitida a la atmósfera.

**b)** ¿Cuáles son las cantidades máxima y mínima de $CO_2$ emitidas a la atmósfera a lo largo del año 2020? ¿En qué momentos se produjeron?

**c)** Represente la gráfica de la función C(t) teniendo en cuenta el estudio realizado en los apartados anteriores.

a) Estudiamos la continuidad de la función en t = 6.

$$\left.\begin{array}{l} C(6)=\dfrac{1}{4}6^2-24+18=3 \\ \lim\limits_{t\to 6^-} C(t)=\lim\limits_{t\to 6^-} 5-\dfrac{t}{3}=5-2=3 \\ \lim\limits_{t\to 6^+} C(t)=\lim\limits_{t\to 6^+} \dfrac{1}{4}t^2-4t+18=3 \end{array}\right\} \Rightarrow C(6)=\lim_{t\to 6^-} C(t)=\lim_{t\to 6^+} C(t)=3.$$

La función es continua en t = 6.

Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento usamos la derivada.

$$C(t)=\begin{cases} 5-\dfrac{t}{3} & , \quad 0\le t<6 \\ \dfrac{1}{4}t^2-4t+18 & , \quad 6\le t\le 12 \end{cases} \Rightarrow C'(t)=\begin{cases} -\dfrac{1}{3} & , \quad 0<t<6 \\ \dfrac{2}{4}t-4 & , \quad 6<t<12 \end{cases}$$

En el tramo de 0 a 6 meses la derivada es negativa y la función decrece.

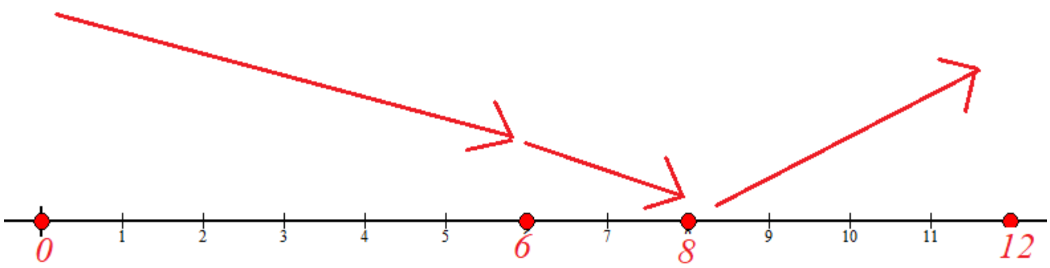
En el tramo de 6 a 12 igualamos a cero la derivada y vemos cuando cambia la función.

$$C'(t)=0\Rightarrow \frac{2}{4}t-4=0\Rightarrow \frac{t}{2}=4\Rightarrow t=8$$

En el mes 8 se produce un cambio de signo.

Del 6 al 8 tomamos t = 7 y la derivada es $C'(7)=\frac{2}{4}7-4=-0.5<0$. La función decrece del mes 6 al 8.

Del 8 al 12 tomamos t = 10 y la derivada es $C'(10)=\frac{2}{4}10-4=1>0$. La función crece del mes 8 al 12.




Como la función es continua el cambio de definición no afecta al decrecimiento en t = 6.

*Resumiendo*: La cantidad de $CO_2$ emitida a la atmósfera decrece durante los 8 primeros meses y crece del mes 8 al 12.

b) La cantidad mínima se produce en el mes 8 y es de $C(8)=\frac{1}{4}8^2-32+18=2$.

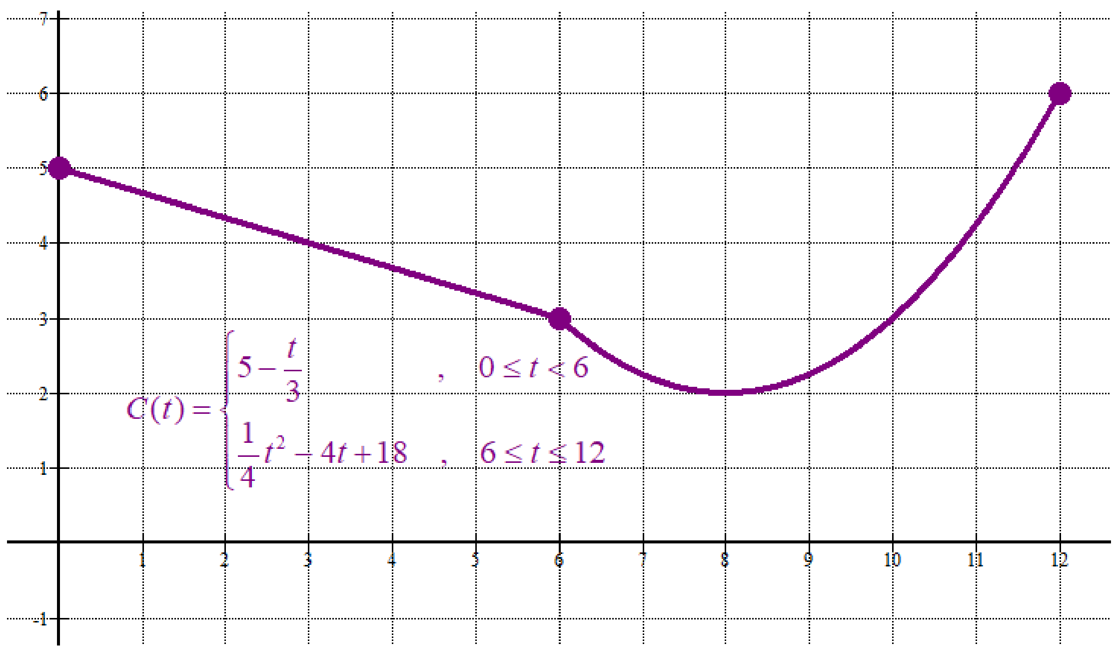
La cantidad máxima se produce en el mes 0 o en el mes 12. Calculamos ambos valores y decidimos.

$$\left.\begin{array}{l} C(0)=5-\frac{0}{3}=5 \\ C(12)=\frac{1}{4}12^2-48+18=6 \end{array}\right\}\text{La cantidad máxima se produce en el mes 12 y su valor es de 6.}$$

c) Para representar la gráfica hacemos una tabla de valores.

| $t$ | $C(t)=5-\frac{t}{3}$ |
|---|---|
| 0 | 5 |
| 3 | 4 |
| 6 | 2 No se incluye |

| $t$ | $C(t)=\frac{1}{4}t^2-4t+18$ |
|---|---|
| 6 | 3 |
| 8 | 2 |
| 10 | $25-40+18=3$ |
| 12 | 6 |



**EJERCICIO 4. Análisis.** Un fabricante de automóviles hace un estudio sobre los beneficios, en miles de euros, a lo largo de los diez últimos años, y comprueba que éstos se ajustan a la función $B(t)=t^3-18t^2+81t-3 \quad si \quad 0\le t\le 10$, (t en años)

a) ¿Qué beneficios obtuvo la empresa el último año del estudio?
b) Determine los periodos de crecimiento y decrecimiento de los beneficios
c) ¿En qué años se producen los beneficios máximos y mínimos y a cuánto ascienden?
d) Calcule $\int_1^2 B(t)dt$.

a) $B(10)=10^3-18\cdot 10^2+810-3=1000-1800+810-3=7$

Los beneficios en el año 10 es de 7000 €

b) Igualamos la derivada a cero.

$$B(t)=t^3-18t^2+81t-3 \Rightarrow B'(t)=3t^2-36t+81$$

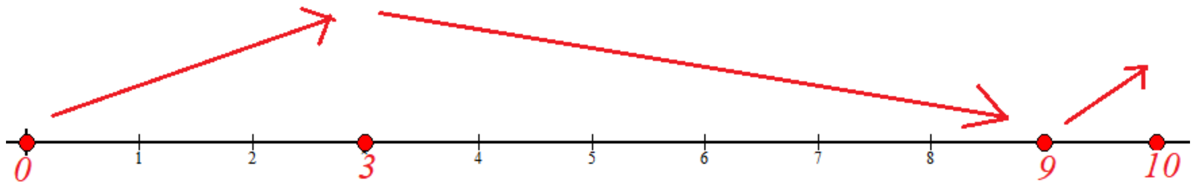
$$B'(t)=0 \Rightarrow 3t^2-36t+81=0 \Rightarrow t^2-12t+27=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=\frac{12\pm\sqrt{(-12)^2-4\cdot 27}}{2}=\frac{12\pm 6}{2}=\begin{cases}\frac{12+6}{2}=9\\ \frac{12-6}{2}=3\end{cases}$$

Vemos como evoluciona la función antes, entre y después de t = 3 y t = 9

- En (0, 3) tomamos t = 2 y la derivada es $B'(2)=12-72+81=21>0$. La función crece en (0, 3).
- En (3, 9) tomamos t = 5 y la derivada es $B'(5)=75-180+81=-24<0$. La función decrece en (3, 9).
- En (9, 10) tomamos t = 10 y la derivada es $B'(10)=300-360+81=21>0$. La función crece en (9, 10).

Los beneficios crecen durante los tres primeros años y del año 9 al 10. Decrecen del año 3 al 9.




c) Valoramos los beneficios en t = 0, t = 3, t = 9 y t = 10.

$$B(0)=-3$$
$$B(3)=3^3-18\cdot 3^2+81\cdot 3-3=105$$
$$B(9)=9^3-18\cdot 9^2+81\cdot 9-3=-3$$
$$B(10)=10^3-18\cdot 10^2+81\cdot 10-3=7$$

El beneficio máximo se alcanza en el año 3 y es de 105000 €.
El beneficio mínimo se alcanza en el año 0 y 9 y es de –3000 €.

d)

$$\int_1^2 B(t)dt = \int_1^2 t^3 - 18t^2 + 81t - 3dt = \left[ \frac{t^4}{4} - 18\frac{t^3}{3} + 81\frac{t^2}{2} - 3t \right]_1^2 =$$

$$= \left[ \frac{2^4}{4} - 18\frac{2^3}{3} + 81\frac{2^2}{2} - 6 \right] - \left[ \frac{1^4}{4} - 18\frac{1^3}{3} + 81\frac{1^2}{2} - 3 \right] = 4 - 48 + 162 - 6 - \frac{1}{4} + 6 - \frac{81}{2} + 3 = \frac{321}{4}$$

**EJERCICIO 5. Estadística y probabilidad.** En una población el 45 % son hombres. El 27% de esa población resulta ser hombre y lector de prensa deportiva, mientras que un 38.5% es mujer y no lectora de esa prensa. **a)** De las mujeres, ¿qué porcentaje lee prensa deportiva? **b)** ¿Qué porcentaje es mujer o lee prensa deportiva? **c)** De los lectores de prensa deportiva, ¿qué porcentaje son hombres? **d)** ¿Son incompatibles los sucesos ser hombre y no leer prensa deportiva? Justifique la respuesta.

Llamemos H = "Ser hombre", así $\overline{H}$ ="Ser mujer"
D = "Ser lector/a de prensa deportiva" y $\overline{D}$ ="No ser lector de prensa deportiva"

Los datos del ejercicio son $P(H)=0.45$; $P(H\cap D)=0.27$; $P(\overline{H}\cap\overline{D})=0.385$.
Construimos una tabla de contingencia para obtener fácilmente el resto de probabilidades.

| | Ser lector de prensa deportiva (D) | No ser lector de prensa deportiva ($\overline{D}$) | |
|---|---|---|---|
| Ser hombre (H) | **27** | | **45** |
| Ser mujer ($\overline{H}$) | | **38.5** | |
| | | | **100** |

Completamos los datos que nos faltan de la tabla.

| | Ser lector de prensa deportiva (D) | No ser lector de prensa deportiva ($\overline{D}$) | |
|---|---|---|---|
| Ser hombre (H) | **27** | **18** | **45** |
| Ser mujer ($\overline{H}$) | **16.5** | **38.5** | **55** |
| | **43.5** | **56.5** | **100** |

a) De 55 mujeres 16.5 leen la prensa. El porcentaje es $\frac{16.5}{55}=\frac{3}{10}=0.3=30\%$

b) Mujeres son 55 % y hombres que leen la prensa deportiva son 27 %. Los sumamos y hacen un 82%.

c) De 43,5 personas que leen la prensa deportiva son hombres 27. El porcentaje es $\frac{27}{43.5}=\frac{18}{29}\simeq 0.62=62\%$

d) Comprobamos si H y $\overline{D}$ son incompatibles. Para ello debe ser su intersección vacia.
Pero los hombres que no leen prensa deportiva son 18% de la población, luego no es vacio y los sucesos no son incompatibles.

**EJERCICIO 6. Estadística y probabilidad.** Una compañía de seguros quiere determinar qué proporción de sus clientes estaría dispuesta a aceptar una subida de tarifas a cambio de un incremento en sus prestaciones. Una encuesta previa indica que esta proporción está en torno al 15%.
**a)** ¿De qué tamaño mínimo debería ser la muestra si se quiere estimar dicha proporción con un error inferior a 0,08 y un nivel de confianza del 95%?
Finalmente, se realiza el estudio con una muestra de 196 clientes, de los que 37 manifestaron su conformidad con la propuesta. **b)** Calcule un intervalo de confianza, al 92%, para la proporción de clientes de la compañía que aceptaría dicha propuesta. ¿Cuál es el error máximo cometido?

a) La proporción de personas que están dispuestos a aceptar la subida es $pr = 0.15$

Con un nivel de confianza del 95% hallamos $z_{\alpha/2}$

$$1-\alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

Utilizamos la fórmula del error

$$Error = z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{pr\cdot qr}{n}} = 1.96\cdot\sqrt{\frac{0.15\cdot 0.85}{n}} = 0.08 \Rightarrow \sqrt{\frac{0.15\cdot 0.85}{n}} = \frac{0.08}{1.96} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{0.15\cdot 0.85}{n} = \left(\frac{0.08}{1.96}\right)^2 \Rightarrow n = \frac{0.15\cdot 0.85}{\left(\frac{0.08}{1.96}\right)^2} \simeq 76.53$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 77 clientes para que el error sea inferior a 0.08 con un nivel de confianza del 95%.

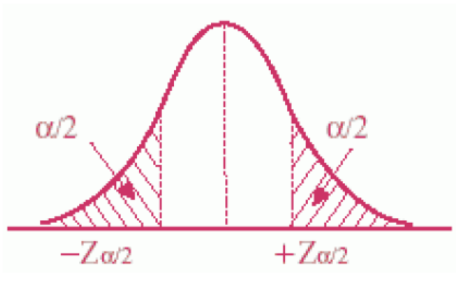
b) El tamaño de la muestra es n = 196.

La proporción de clientes que aceptan la subida es $pr = \frac{37}{196} = 0.19$

y por tanto $qr = \frac{196-37}{196} = \frac{159}{196}$.

Con un nivel de confianza del 92% hallamos $z_{\alpha/2}$

$$1-\alpha = 0.92 \rightarrow \alpha = 0.08 \rightarrow \alpha/2 = 0.04 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0.96 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.75$$




Utilizamos la fórmula del error

$$Error = z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{pr\cdot qr}{n}} = 1.75\cdot\sqrt{\frac{\frac{37}{196}\cdot\frac{159}{196}}{196}} \simeq 0.049$$

El error máximo cometido es 0.049

El intervalo de confianza es $(0.19-0.049,\quad 0.19+0.049) = (0{,}141,\quad 0.239)$