Universidad del País Vasco   Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA	EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
2021ko EZOHIKOA	EXTRAORDINARIA 2021
GIZARTE ZIENTZIEI APLIKATUTAKOMATEMATIKA II	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Este examen tiene ocho problemas distribuidos en cuatro bloques. De estos ocho problemas tienes que responder a cuatro, de por lo menos tres bloques diferentes.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

Está permitido el uso de calculadoras científicas **<u>que no presenten</u>** ninguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica
- posibilidad de transmitir datos
- programable
- resolución de ecuaciones
- operaciones con matrices
- cálculo de determinantes,
- derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

BLOQUE: ÁLGEBRA

A.1. [hasta 2.5 puntos]

Se quiere obtener el máximo y el mínimo de la función $f(x,y)=5x+4y$ en el recinto definido por las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 2x+3y\geq 6 \\ 2x+y\geq 5 \\ 0\leq x\leq 4 \\ 0\leq y\leq 5 \end{cases}$$

a) [1 punto] Representa el recinto mencionado.
b) [1,5 puntos] Obtén los puntos en que se alcanza el máximo y el mínimo de la función, así como los valores de ésta en dichos puntos.

B.1. [hasta 2.5 puntos]

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) [0,75 puntos] ¿Se verifica la igualdad $(A+B)^2=A^2+2A\cdot B+B^2$?

b) [1,75 puntos] Resolver la ecuación matricial:

$$X\cdot A=2B^t+I_2$$

BLOQUE: ANÁLISIS

A.2. [hasta 2,5 puntos]

Sea *f(x)* la función:

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & si\ \ -2\leq x<0 \\ -x+2 & si\ \ 0\leq x<2 \\ x^2-4x+4 & si\ \ 2\leq x\leq 4 \end{cases}$$

a) [1 punto] Analiza la continuidad de la función en el intervalo [–2, 4].
b) [0,5 puntos] Realiza la representación gráfica de la función.
c) [1 punto] Calcula el área comprendida entre la función y el eje de abscisas OX.

B.2. [hasta 2,5 puntos]

El coste de producción de una empresa, *f(x)*, en miles de euros, depende de la cantidad de producto fabricada, *x*, medida en toneladas:

$$f(x)=30-9x+6x^2-x^3$$

La capacidad de producción máxima es de 2 toneladas.
a) [1,25 puntos] Obtén los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función de coste de producción de la empresa.
b) [0,75 puntos] Determina la cantidad que la empresa debe producir para minimizar el coste de producción. ¿Cuál sería dicho coste mínimo?
c) [0,5 puntos] ¿Con qué cantidad alcanza la empresa su máximo coste de producción? Determinar dicho coste máximo.

BLOQUE: PROBABILIDAD

A.3. [hasta 2,5 puntos]

En una biblioteca hay 60 novelas de acción y 20 de terror. Janire elige una novela al azar y se la lleva. A continuación, Eneko elegirá otra novela al azar.

a) [1 punto] ¿Cuál es la probabilidad de que Janire y Eneko elijan novelas de acción?

b) [0,75 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que la novela elegida por Eneko sea de acción?

c) [0,75 puntos] Si la novela que ha elegido Eneko es de acción, ¿cuál es la probabilidad de que la novela elegida por Janire haya sido de terror?

B.3. [hasta 2,5 puntos]

Lucía tiene dos dioptrías en un ojo y una dioptría en el otro, y Nerea dos dioptrías en cada ojo. Cada chica tiene una bolsa con 10 lentillas de una dioptría y otras 10 lentillas de dos dioptrías. Cada una sacará al azar dos lentillas de su bolsa.

a) [1,25 puntos] ¿Cuál es la probabilidad que tiene cada chica de elegir las lentillas que necesita?

b) [1,25 puntos] En la bolsa de Lucía hay dos lentillas defectuosas. Con el fin de separarlas del resto, sacará una tras otra hasta que las encuentre. ¿Cuál es la probabilidad de que consiga encontrar las dos defectuosas en el tercer intento?

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA

A.4. [hasta 2,5 puntos]

Según un estudio de la Dirección General de Tráfico el número de horas de prácticas necesarias para la obtención del carnet de conducir sigue una distribución normal $\mathcal{N}(24, 9)$.

a) [1,25 puntos] Calcula la probabilidad de obtener el permiso de conducir con menos de 20 horas de prácticas.

b) [1,25 puntos] ¿Cuántas horas ha necesitado Andrea para conseguir el carnet de conducir, si se sabe que el 89 % de los conductores y conductoras ha necesitado más horas que ella?

B.4. [hasta 2,5 puntos]

Para conocer el gasto medio anual que las familias de una determinada población realizan en servicios de hostelería, se ha tomado una muestra aleatoria de familias a partir de la cual se ha obtenido que el intervalo de confianza para la media es (820, 830) con un nivel de confianza del 95%.

Se sabe que el gasto anual tiene una distribución normal con desviación típica 80 euros.

a) [1 punto] Calcula la media obtenida a partir de la muestra.

b) [1,5 puntos] Calcula el número de familias que han formado parte de la muestra.

Soluciones

BLOQUE: ÁLGEBRA

A.1. [hasta 2.5 puntos]
Se quiere obtener el máximo y el mínimo de la función $f(x,y)=5x+4y$ en el recinto definido por las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} 2x+3y\geq 6 \\ 2x+y\geq 5 \\ 0\leq x\leq 4 \\ 0\leq y\leq 5 \end{cases}$$

a) ⟦ 1 punto⟧ Represente el recinto mencionado.
b) ⟦ 1,5 puntos⟧ Obtén los puntos en que se alcanza el máximo y el mínimo de la función, así como los valores de ésta en dichos puntos.

a) Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones.

$2x+3y=6$

x	$y=\frac{6-2x}{3}$
0	2
3	0

$2x+y=5$

x	$y=5-2x$
2	1
0	5

$x=4$

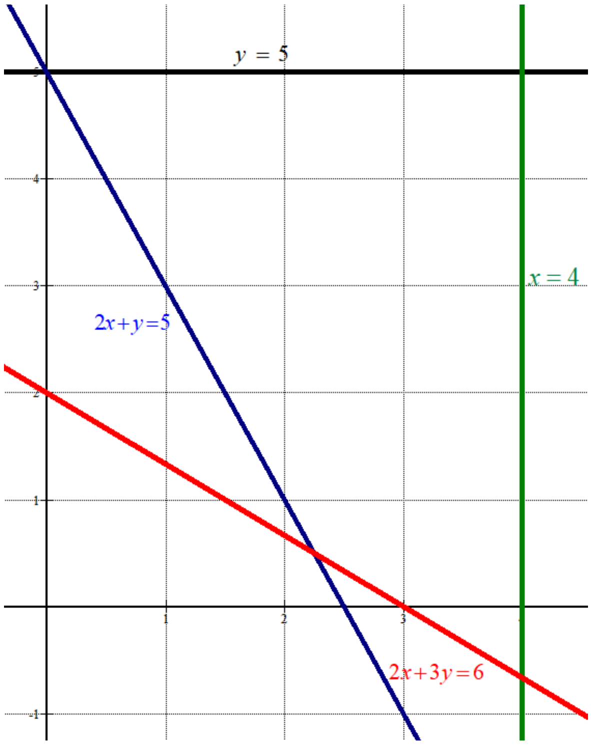
$x=4$	y
4	0
4	5

$y=5$

x	$y=5$
0	5
4	5

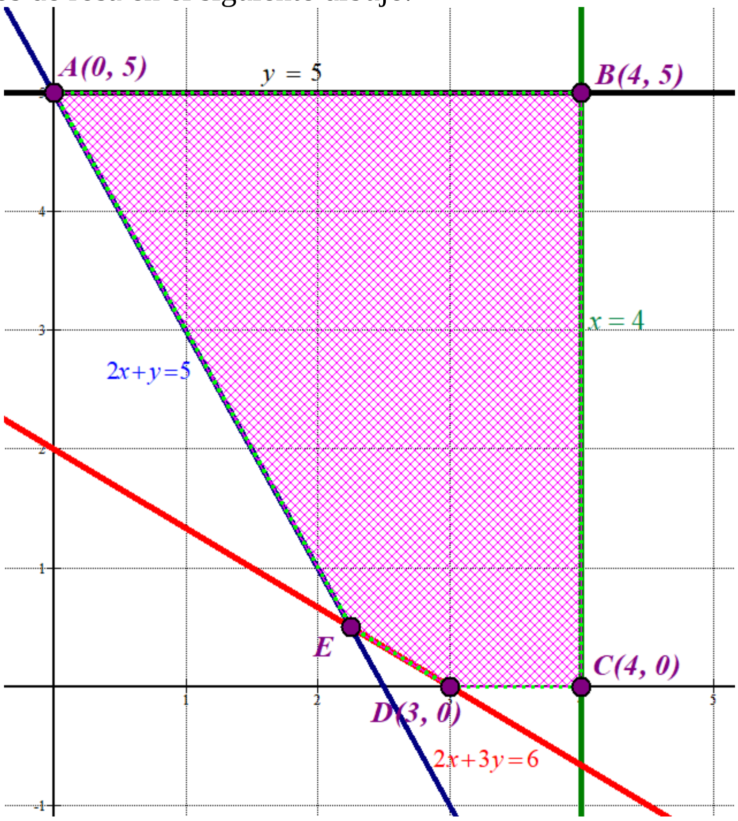
$x\geq 0;\ y\geq 0$

Primer cuadrante



Como las restricciones son $\begin{cases} 2x+3y\geq 6 \\ 2x+y\geq 5 \\ 0\leq x\leq 4 \\ 0\leq y\leq 5 \end{cases}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de la recta horizontal negra, a la izquierda de la recta vertical

verde y por encima de las rectas roja y azul.
La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo.



b) Para obtener el máximo y el mínimo de $f(x,y)=5x+4y$ en el recinto determinamos los vértices de la región. Por el dibujo tenemos las coordenadas de los vértices A, B, C y D, pero determinamos las coordenadas de E resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de sus rectas.

$$\left.\begin{array}{l} 2x+3y=6 \\ 2x+y=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+3y=6 \\ y=5-2x \end{array}\right\} \Rightarrow 2x+3(5-2x)=6 \Rightarrow 2x+15-6x=6 \Rightarrow 9=4x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{9}{4}=2.25 \Rightarrow y=5-4.5=0.5 \Rightarrow E(2.25,\ 0.5)$$

Valoramos la función en cada uno de los vértices.

A(0, 5) → $f(0,5)=20$

B(4, 5) → $f(4,5)=40$ ¡*Máximo*!

C(4, 0) → $f(4,0)=20$

D(3, 0) → $f(3,0)=15$

E(2.25, 0.5) → $f(2.25,0.5)=13.25$ ¡*Mínimo*!

El valor máximo de la función es 40 y se alcanza en el punto B(4,5) y el mínimo valor de la función es 13.25 y se alcanza en el punto E(2,25, 0.5)

B.1. [hasta 2.5 puntos]

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & -7\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

a) ⟦ 0,75 puntos⟧ ¿Se verifica la igualdad $(A+B)^2 = A^2+2A\cdot B+B^2$?

b) ⟦ 1,75 puntos⟧ Resolver la ecuación matricial:

$$X\cdot A = 2B^t + I_2$$

a) $(A+B)^2 = A^2+2A\cdot B+B^2$

$$A+B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & -7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -8\end{pmatrix}\Rightarrow (A+B)^2=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -21\\ 0 & 64\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} A^2=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & -7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -16\\ 0 & 49\end{pmatrix}\\ B^2=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ AB=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 0 & 7\end{pmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow A^2+2AB+B^2=\begin{pmatrix}1 & -16\\ 0 & 49\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 0 & 7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2+2AB+B^2=\begin{pmatrix}1 & -21\\ 0 & 64\end{pmatrix}$$

$$\boxed{(A+B)^2=\begin{pmatrix}1 & -21\\ 0 & 64\end{pmatrix}=A^2+2AB+B^2}$$

Se cumple la igualdad.

b) $X\cdot A = 2B^t + I_2 \to X = A^{-1}\left(2B^t+I_2\right)$

$$|A|=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & -7\end{vmatrix}=7\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & -7\end{pmatrix}}{7}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-7 & -2\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\frac{-1}{7}\begin{pmatrix}7 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow B^t=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$X=\left(2\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\frac{-1}{7}\begin{pmatrix}7 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\frac{-1}{7}\begin{pmatrix}5 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\frac{-1}{7}\begin{pmatrix}35 & 10\\ 14 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & -10/7\\ -2 & -3/7\end{pmatrix}$$

BLOQUE: ANÁLISIS

A.2. [hasta 2,5 puntos]
Sea *f(x)* la función:

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & si\ \ -2\le x<0 \\ -x+2 & si\ \ 0\le x<2 \\ x^2-4x+4 & si\ \ 2\le x\le 4 \end{cases}$$

a) [1 punto] Analiza la continuidad de la función en el intervalo [–2, 4].
b) [0,5 puntos] Realiza la representación gráfica de la función.
c) [1 punto] Calcula el área comprendida entre la función y el eje de abscisas OX.

a) La función es continua en cada intervalo [–2, 0), (0, 2) y (2, 4] por estar definida como polinomios. Falta comprobar la continuidad en los cambios de definición.

¿Es continua en $x = 0$?

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=-0+2=2 \\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x+2=2 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} -x+2=2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=2$$

La función es continua en $x = 0$.

¿Es continua en $x = 2$?

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=2^2-4\cdot 2+4=0 \\ \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} -x+2=0 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} x^2-4x+4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(2)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=0$$

La función es continua en $x = 2$.

Resumiendo: La función *f(x)* es continua en el intervalo [–2, 4]

b) Hacemos una tabla de valores. La gráfica son dos trozos de recta y un trozo de parábola.

$si\ \ -2\le x<0$

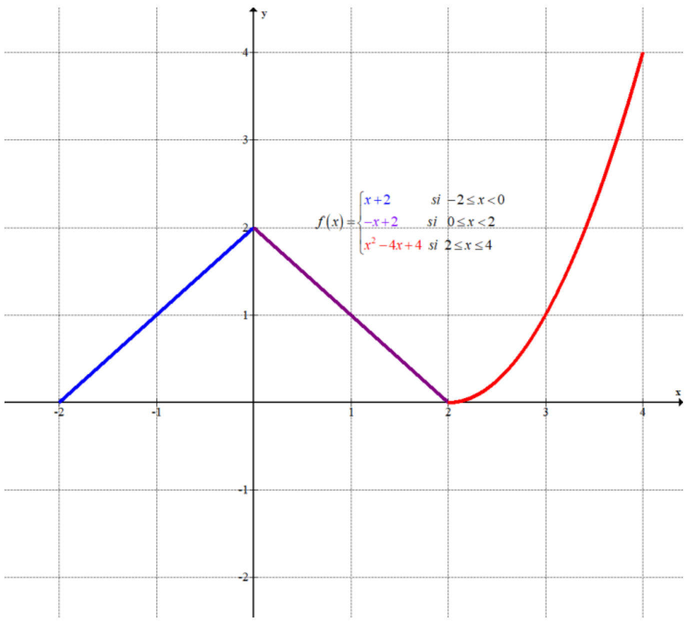
x	$y=x+2$
–2	0
–1	1

$si\ \ 0\le x<2$

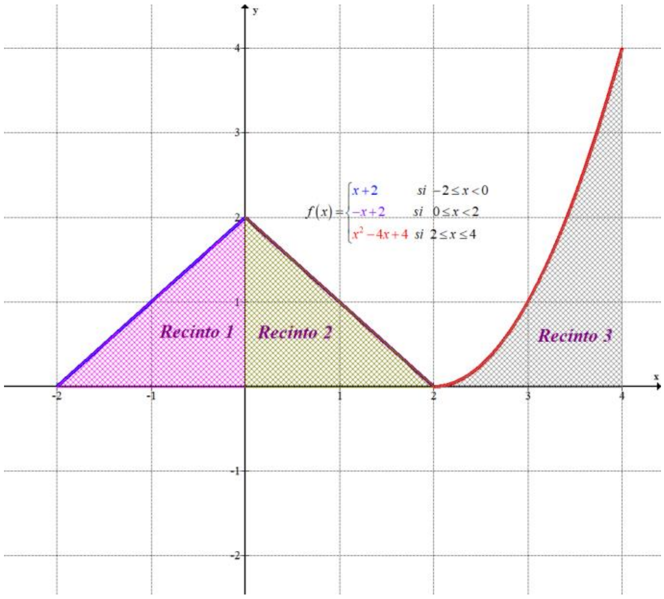
x	$y=-x+2$
0	2
1	1

$si\ \ 2\le x\le 4$

x	$y=x^2-4x+4$
2	0
3	1
4	4



c) El recinto es la zona dividida en tres recintos de color distinto en el dibujo inferior.



El área del recinto 1 es la de un triángulo de base 2 y altura 2, por lo que $Área\,1 = \frac{2\cdot 2}{2} = 2\,u^2$.

El área del recinto 2 es igual que la del recinto 1. *Área 2 = 2* u^2.

El área del recinto 3 hay que determinarla usando el cálculo integral.

$$Área\,3 = \int_2^4 x^2 - 4x + 4dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right]_2^4 = \left[\frac{4^3}{3} - 2\cdot 4^2 + 16\right] - \left[\frac{2^3}{3} - 2\cdot 2^2 + 8\right] = \frac{8}{3}\,u^2$$

El área total es la suma del valor de las áreas de los tres recintos.

Área total = 2 + 2 + $\frac{8}{3} = \boxed{\frac{20}{3} \approx 6.66\,u^2}$

B.2. [hasta 2,5 puntos]
El coste de producción de una empresa, *f(x)*, en miles de euros, depende de la cantidad de producto fabricada, *x*, medida en toneladas:

$$f(x) = 30 - 9x + 6x^2 - x^3$$

La capacidad de producción máxima es de 2 toneladas.
a) [1,25 puntos] Obtén los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función de coste de producción de la empresa.
b) [0,75 puntos] Determina la cantidad que la empresa debe producir para minimizar el coste de producción. ¿Cuál sería dicho coste mínimo?
c) [0,5 puntos] ¿Con qué cantidad alcanza la empresa su máximo coste de producción? Determinar dicho coste máximo.

a) Utilizamos la derivada de la función.

$$f(x) = 30 - 9x + 6x^2 - x^3 \Rightarrow f'(x) = -9 + 12x - 3x^2$$

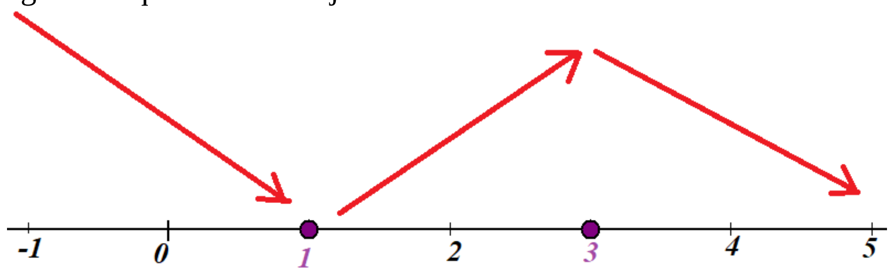
$$f'(x) = 0 \Rightarrow -9 + 12x - 3x^2 = 0 \Rightarrow 3 - 4x + x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(3)}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = 3 \\ \frac{4-2}{2} = 1 \end{cases}$$

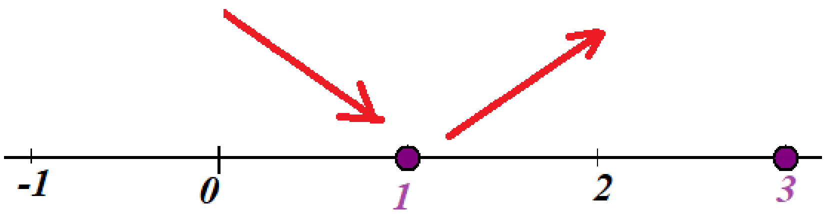
La función tiene dos puntos críticos: $x = 1$, $x = 3$.
Veamos que ocurre antes, entre y después de estos valores.

- En $(-\infty, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = -9 < 0$. La función decrece en $(-\infty, 1)$.
- En $(1, 3)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = -9 + 24 - 12 = 3 > 0$. La función crece en $(1, 3)$.
- En $(3, +\infty)$ tomamos $x = 10$ y la derivada vale $f'(10) = -9 + 120 - 300 = -189 < 0$. La función decrece en $(3, +\infty)$.

La función sigue el esquema del dibujo.



Como la producción mínima es 0 y la máxima es de 2 toneladas el dominio de definición de la función es el intervalo [0, 2]. La situación planteada nos lleva a reducir el dibujo anterior.



La función decrece en [0,1) y crece en (1,2]

b) El coste mínimo se consigue en x = 1. Dicho coste mínimo es $f(1)=30-9+6-1=26$.

El coste mínimo de la producción se obtiene con una producción de 1 tonelada y este coste mínimo es de 26000 €.

c) Observando la imagen superior el coste máximo de producción se obtiene en uno de los extremos del intervalo [0, 2], calculamos el coste en ambos valores de producción y decidimos.

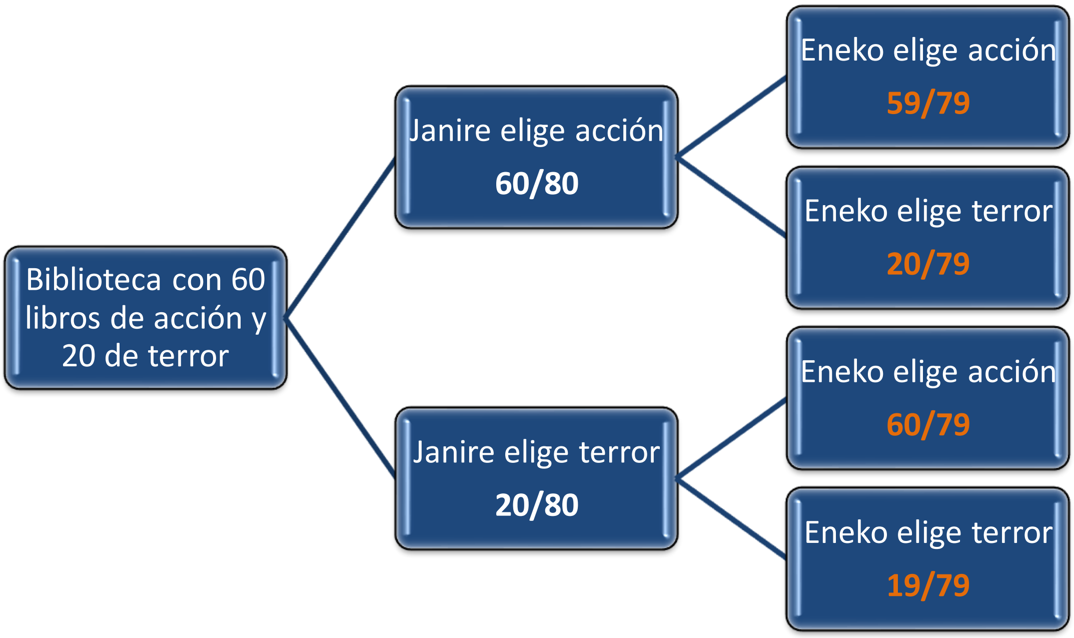
$$\left.\begin{array}{l} f(0)=30 \\ f(2)=30-18+24-8=28 \end{array}\right\}$$

El coste máximo de producción se obtiene en $x = 0$ y este coste máximo es de 30000 €.

BLOQUE: PROBABILIDAD

A.3. [hasta 2,5 puntos]
En una biblioteca hay 60 novelas de acción y 20 de terror. Janire elige una novela al azar y se la lleva. A continuación, Eneko elegirá otra novela al azar.
a) [1 punto] ¿Cuál es la probabilidad de que Janire y Eneko elijan novelas de acción?
b) [0,75 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que la novela elegida por Eneko sea de acción?
c) [0,75 puntos] Si la novela que ha elegido Eneko es de acción, ¿cuál es la probabilidad de que la novela elegida por Janire haya sido de terror?

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Elegir ambas novelas de acción solo pasa en la rama superior del árbol, por lo que la probabilidad pedida es el producto de las probabilidades de esa rama.

$$P(\text{Janire y Eneko eligen acción}) = \frac{60}{80}\cdot\frac{59}{79} = \boxed{\frac{177}{316} \approx 0.56}$$

b) La forma de elegir Eneko una novela de acción puede pasar en dos de las ramas del árbol. Sumamos las probabilidades de cada rama.

$$P(\text{Eneko elige acción}) = \frac{60}{80}\cdot\frac{59}{79} + \frac{20}{80}\cdot\frac{60}{79} = \boxed{\frac{3}{4} = 0.75}$$

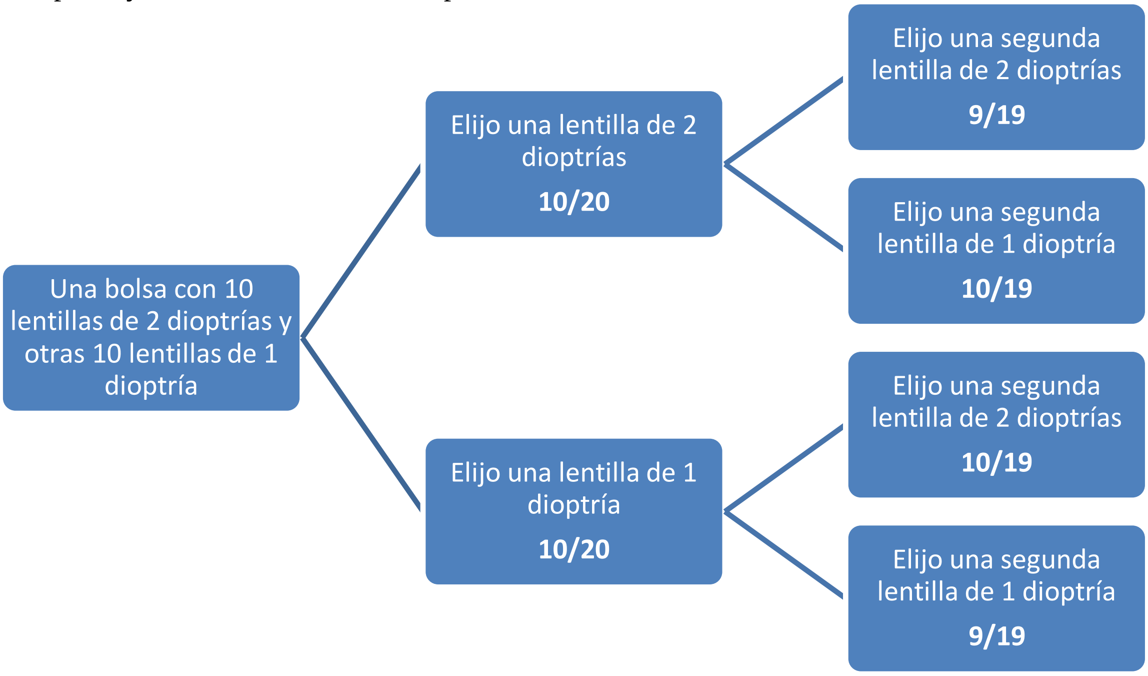
c) Esta es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Janire elige terror / Eneko elige acción}) = \frac{P(\text{Janire elige terror} \cap \text{Eneko elige acción})}{P(\text{Eneko elige acción})} =$$

$$= \frac{\frac{20}{80}\cdot\frac{60}{79}}{\frac{3}{4}} = \boxed{\frac{20}{79} \approx 0.2532}$$

B.3. [hasta 2,5 puntos]
Lucía tiene dos dioptrías en un ojo y una dioptría en el otro, y Nerea dos dioptrías en cada ojo. Cada chica tiene una bolsa con 10 lentillas de una dioptría y otras 10 lentillas de dos dioptrías. Cada una sacará al azar dos lentillas de su bolsa.
a) [1,25 puntos] ¿Cuál es la probabilidad que tiene cada chica de elegir las lentillas que necesita?
b) [1,25 puntos] En la bolsa de Lucía hay dos lentillas defectuosas. Con el fin de separarlas del resto, sacará una tras otra hasta que las encuentre. ¿Cuál es la probabilidad de que consiga encontrar las dos defectuosas en el tercer intento?

a) Realizamos un diagrama de árbol de la operación "Sacar dos lentillas de una bolsa con 10 lentillas de 2 dioptrías y otras 10 lentillas de 1 dioptría.



Para que Lucía acierte con lo que necesita debe elegir una lentilla de 2 dioptrías y otra de 1 dioptría. Esto ocurre en dos de las ramas del árbol.

$$P(\text{Lucía acierte}) = \frac{10}{20}\cdot\frac{10}{19}+\frac{10}{20}\cdot\frac{10}{19} = \boxed{\frac{10}{19}\approx 0.526}$$

Para que Nerea acierte con lo que necesita debe elegir una lentilla de 2 dioptrías y otra de 2 dioptrías. Esto solo ocurre en una de las ramas del árbol (la superior).

$$P(\text{Nerea acierte}) = \frac{10}{20}\cdot\frac{9}{19} = \boxed{\frac{9}{38}\approx 0.2368}$$

b) Encontrar las dos lentillas defectuosas en el tercer intento de ir sacando una a una cada lentilla, puede ocurrir de una de las dos formas siguientes: Sacamos lentilla buena en 1ª, defectuosa en 2ª y defectuosa en 3ª o bien sacamos lentilla defectuosa en 1ª, buena en 2ª y defectuosa en 3ª.
Hay 18 lentillas buenas y 2 defectuosas.
Llamamos D_1 = Sacar lentilla defectuosa en 1ª, D_2 = Sacar lentilla defectuosa en 2ª, D_3 = Sacar lentilla defectuosa en 3ª.

$$P(\text{Sacar las 2 defectuosas en 3 intentos}) == P\left(\overline{D_1}\cap D_2\cap D_3\right)+P\left(D_1\cap \overline{D_2}\cap D_3\right)=$$

$$=\frac{18}{20}\cdot\frac{2}{19}\cdot\frac{1}{18}+\frac{2}{20}\cdot\frac{18}{19}\cdot\frac{1}{18} = \boxed{\frac{1}{95}\approx 0.0105}$$

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA

A.4. [hasta 2,5 puntos]
Según un estudio de la Dirección General de Tráfico el número de horas de prácticas necesarias para la obtención del carnet de conducir sigue una distribución normal $\mathcal{N}(24, 9)$.
a) [1,25 puntos] Calcula la probabilidad de obtener el permiso de conducir con menos de 20 horas de prácticas.
b) [1,25 puntos] ¿Cuántas horas ha necesitado Andrea para conseguir el carnet de conducir, si se sabe que el 89 % de los conductores y conductoras ha necesitado más horas que ella?

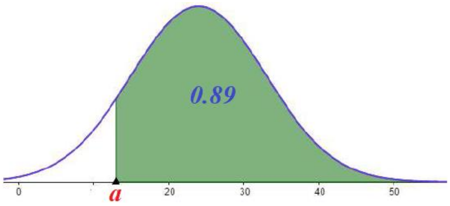
X = Número de horas de prácticas necesarias para la obtención del carnet de conducir.
X= N(24, 9)

a)

$$P(X<20)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{20-24}{9}\right)=P(Z<-0.444)=$$

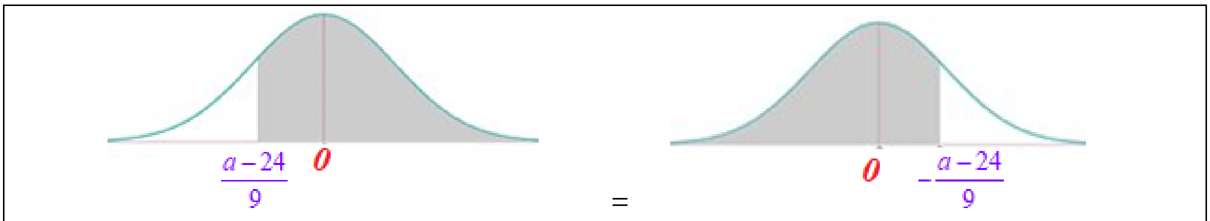
$$=P(Z\geq 0.444)=1-P(Z\leq 0.444)=\{\text{Miramos en la tabla N(0, 1)}\}=1-0.67=\boxed{0.33}$$

b) Llamamos "a" al número de horas pedidas. Debe cumplirse $P(X>a)=0.89$.



$$P(X>a)=0.89\Rightarrow\{Tipificamos\}\Rightarrow P\left(Z>\frac{a-24}{9}\right)=0.89$$

No podemos buscarla en la tabla de la N(0, 1) pues es " > ". $\frac{a-24}{9}$ es negativo por el valor de la probabilidad (mayor de 0.5)
La transformamos como indica el dibujo inferior.



$$P\left(Z>\frac{a-24}{9}\right)=P\left(Z\leq -\frac{a-24}{9}\right)=0.89$$

Ahora si que buscamos en la tabla de la N(0, 1) la probabilidad 0.89 y nos queda

$$1.23=-\frac{a-24}{9}\Rightarrow\boxed{a=12.93}$$

Andrea ha dado 13 horas de clase.

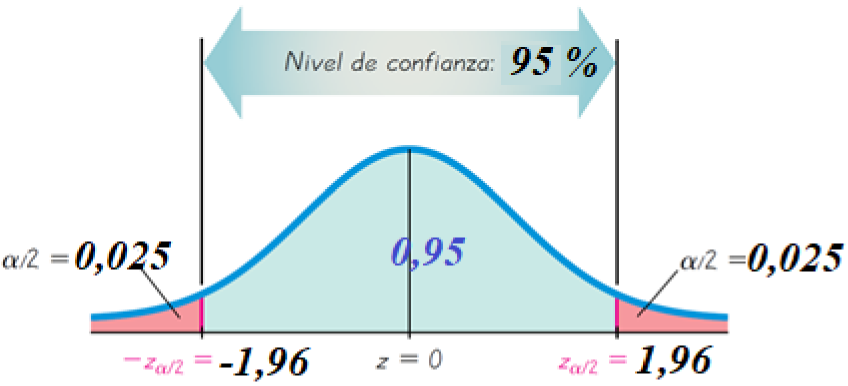
B.4. [hasta 2,5 puntos]
Para conocer el gasto medio anual que las familias de una determinada población realizan en servicios de hostelería, se ha tomado una muestra aleatoria de familias a partir de la cual se ha obtenido que el intervalo de confianza para la media es (820, 830) con un nivel de confianza del 95 %.
Se sabe que el gasto anual tiene una distribución normal con desviación típica 80 euros.
a) [1 punto] Calcula la media obtenida a partir de la muestra.
b) [1,5 puntos] Calcula el número de familias que han formado parte de la muestra.

X = El gasto medio anual de una familia en servicios de hostelería.
X = N(μ, 80)

a) La media muestral es el valor central del intervalo de confianza.

$$\text{Media muestral} = \bar{x} = \frac{820+830}{2} = 825\, euros$$

b) Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 95% el $z_{\alpha/2}$.



$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2}$ **= 1,96**

El error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza $Error = \frac{830-820}{2} = 5$.

Utilizando la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow Error = 1{,}96 \cdot \frac{80}{\sqrt{n}} = 5 \Rightarrow 1{,}96 \cdot 80 = 5 \cdot \sqrt{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1{,}96 \cdot 80}{5} = 31.36 \Rightarrow \boxed{n = 983.45}$$

El tamaño de la muestra es de 984 familias