Generalitat de Catalunya
Consell Interuniversitari de Catalunya
Oficina d'Accés a la Universitat

2021

Proves d'accés a la universitat

Matemátiques

Sèrie 1

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

1. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real k:

$$\begin{cases} x+ky+z=3+k \\ kx+y+z=4 \\ x+3y+z=5 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre k. [1,25 punts]

b) Resoleu, si és possible, el sistema per al cas $k = 1$, i feu-ne una interpretació geomètrica. [1,25 punts]

2. a) Donada la funció $f(x)=\dfrac{4}{x}$, calculeu l'equació de la recta tangent a $y = f(x)$ en el punt d'abscissa $x=1$. Trobeu també l'equació de la recta normal a $y = f(x)$ en aquest mateix punt. [1,25 punts]

b) Feu un esbós de les gràfiques de la corba $y = f(x)$ i de la recta $4x + y = 8$, i calculeu l'àrea delimitada per aquestes dues gràfiques, l'eix de les abscisses i la recta vertical $x = 3$. [1,25 punts]

3. En $\mathbb{R}^3$ es donen els punts A = (3, 1, 1), B = (0, 0, 1), C = (4, 1, 2) i D = (1, 1, t), en què t és un valor real.

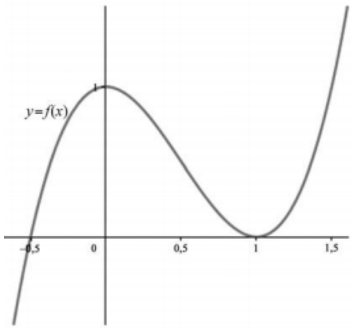
a) Per a quin valor de t els quatre punts són coplanaris? [1 punt]

b) Trobeu el valor de t per tal que el tetraedre (irregular) que formen els quatre punts tingui un volum de $5u^3$. [1,5 punts]

Nota: El volum d'un tetraedre definit pels vectors v_1 , v_2 i v_3 és igual a un sisè del valor absolut del determinant de la matriu formada per tots tres vectors, $V=\dfrac{1}{6}\left|\det(v_1,v_2,v_3)\right|$

4. a) En la figura es mostra la gràfica de la funció *f(x)*. Representeu de manera esquemàtica la gràfica de la funció derivada de *f(x)*. Expliqueu el raonament que heu seguit. [1,25 punts]

b) Calculeu els valors de a i b perquè la funció $g(x)=ax^3+bx^2+1$ tingui un punt d'inflexió en $x=\dfrac{1}{2}$ i la seva derivada en aquest punt sigui $-\dfrac{3}{2}$. [1,25 punts]



5. Sigui la matriu $A=\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{pmatrix}$, en qué a és un paràmetre real.

a) Trobeu per a quins valors de a la matriu A és invertible. [1 punt]

b) Comproveu que, per al cas $a = 3$, la matriu A és invertible i resoleu l'equació matricial $AX = B-3I$, en què B és la matriu $B=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ [1,5 punts]

6. Considereu la funció $f(x)=\dfrac{x^3}{x-2}$.

a) Estudieu si té punts crítics i, en cas que en tingui, justifiqueu de quin tipus són. Determineu també quins són els intervals de creixement i decreixement de la funció. [1,5 punts]

b) Comproveu que l'equació $f(x) = 0$ té una única solució en l'interval (–2, 1). [1 punt]

SOLUCIONES

1. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real *k*:

$$\begin{cases} x+ky+z=3+k \\ kx+y+z=4 \\ x+3y+z=5 \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre *k*. [1,25 punts]
b) Resoleu, si és possible, el sistema per al cas *k = 1*, i feu-ne una interpretació geomètrica. [1,25 punts]

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 3+k \\ k & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

Calculamos el determinante de A y lo igualamos a cero, para estudiar su rango en función del parámetro *k*.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=1+k+3k-1-k^2-3=-k^2+4k-3$$

$$|A|=0 \Rightarrow -k^2+4k-3=0 \Rightarrow k=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4(-1)(-3)}}{-2}=\frac{-4\pm 2}{-2}=\begin{cases} \frac{-4+2}{-2}=1 \\ \frac{-4-2}{-2}=3 \end{cases}$$

Nos planteamos tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $k\neq 1 \; y \; k\neq 3$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado (una única solución)

CASO 2. $k=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Dado lo sencillo del sistema analizamos el sistema resolviéndolo.

Vemos como queda el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ x+y+z=4 \\ x+3y+z=5 \end{cases}$$

Intentamos resolverlo utilizando el método de Gauss.

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ x+y+z=4 \\ x+3y+z=5 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{Ecuación 1}^{\text{a}} = \text{Ecuación 2}^{\text{a}} \\ \text{Quito ecuación 1}^{\text{a}} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=4 \\ x+3y+z=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=4-z \\ x+3y=5-z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=4-z-y \\ x+3y=5-z \end{cases} \Rightarrow 4-z-y+3y=5-z \Rightarrow 2y=1 \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{2}} \Rightarrow x=4-z-\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=-z+\frac{7}{2}}$$

Las soluciones del sistema son $x=-t+\frac{7}{2};\ y=\frac{1}{2};\ \ z=t,$ siendo $t \in \mathbb{R}$

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

CASO 3. $k=3$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Dado lo sencillo del sistema analizamos el sistema resolviéndolo.

Vemos como queda el sistema:

$$\begin{cases} x+3y+z=6 \\ 3x+y+z=4 \\ x+3y+z=5 \end{cases}$$

Intentamos resolverlo con el método de Gauss.

$$\begin{cases} \boxed{x+3y+z=6} \\ 3x+y+z=4 \quad \to \text{¡Imposible!} \\ \boxed{x+3y+z=5} \end{cases}$$

Es imposible resolver el sistema pues tiene dos ecuaciones con el primer miembro igual y el segundo miembro distinto.

El sistema es incompatible (Sin solución)

Resumiendo: El sistema es compatible determinado para $k \neq 1$ y $k \neq 3$. Es compatible indeterminado para $k = 1$. Es incompatible para $k = 3$.

b) Las soluciones del sistema para $k = 1$ se han obtenido en el apartado anterior y son $x=-t+\frac{7}{2};\ y=\frac{1}{2};\ \ z=t,$ siendo $t \in \mathbb{R}$

2. a) Donada la funció $f(x)=\frac{4}{x}$, calculeu l'equació de la recta tangent a $y = f(x)$ en el punt d'abscissa $x=1$. Trobeu també l'equació de la recta normal a $y = f(x)$ en aquest mateix punt. [1,25 punts]
b) Feu un esbós de les gràfiques de la corba $y = f(x)$ i de la recta $4x + y = 8$, i calculeu l'àrea delimitada per aquestes dues gràfiques, l'eix de les abscisses i la recta vertical $x = 3$. [1,25 punts]

a) La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 1$ tiene ecuación $y-f(1)=f'(1)(x-1)$.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=\frac{4}{x} \to f'(x)=-\frac{4}{x^2} \to f'(1)=-\frac{4}{1^2}=-4 \\ f(1)=\frac{4}{1}=4 \\ y-f(1)=f'(1)(x-1) \end{array}\right\} \Rightarrow y-4=-4(x-1) \Rightarrow \boxed{y=-4x+8}$$

La ecuación de la recta normal a $f(x)$ en $x = 1$ tiene ecuación $y-f(1)=\frac{-1}{f'(1)}(x-1)$.

$$\left.\begin{array}{r} f'(1)=-4 \\ f(1)=4 \\ y-f(1)=\frac{-1}{f'(1)}(x-1) \end{array}\right\} \Rightarrow y-4=\frac{-1}{-4}(x-1) \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{4}x+\frac{15}{4}}$$

b) El dominio de la función $f(x)=\frac{4}{x}$ es $\mathbb{R}-\{0\}$. Su derivada es $f'(x)=-\frac{4}{x^2}$, que es siempre negativa y por tanto la función siempre es decreciente.
Obtenemos los puntos de corte de curva y recta.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\frac{4}{x} \\ 4x+y=8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(x)=\frac{4}{x} \\ y=8-4x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{4}{x}=8-4x \Rightarrow 4=8x-4x^2 \Rightarrow 4x^2-8x+4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-2x+1=0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4}}{2}=\frac{2}{2}=1$$

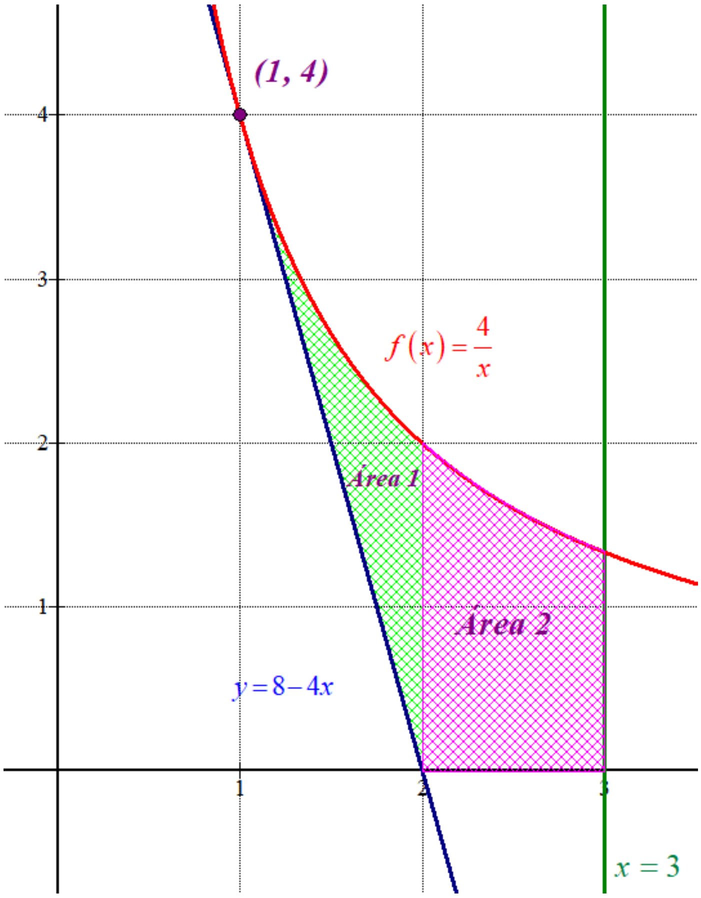
Curva y recta coinciden solo en el punto (1, 4)

Hacemos una tabla de valores y dibujamos las gráficas de curva $f(x)=\frac{4}{x}$, la recta $4x + y = 8$, así como la recta vertical $x = 3$.

x	$f(x)=\frac{4}{x}$
1	4
2	2
3	$4/3$

x	$y=8-4x$
1	4
2	0
3	-4

$x=3$	y
3	0
3	1
3	2



El área de la zona pedida la hemos dividido en dos recintos, la parte coloreada de rosa es de algo más de 1.5 cuadraditos y el área de la zona verde es algo menos de 1 cuadradito. En total los dos recintos suman algo menos de 3 cuadraditos.

Calculamos su valor exacto usando el cálculo integral.

$$\text{Área } 1=\int_1^2 \frac{4}{x}-(8-4x)\,dx=\int_1^2 \frac{4}{x}-8+4x\,dx=\left[4\ln x-8x+2x^2\right]_1^2=$$
$$=\left[4\ln 2-16+8\right]-\left[4\ln 1-8+2\right]=4\ln 2-2$$

$$\text{Área } 2=\int_2^3 \frac{4}{x}dx=\left[4\ln x\right]_2^3=4\ln 3-4\ln 2$$

$$\text{Área total}=\text{Área } 1+\text{Área } 2=4\ln 2-2+4\ln 3-4\ln 2=\boxed{4\ln 3-2\approx 2.394\,u^2}$$

3. En $\mathbb{R}^3$ es donen els punts A = (3, 1, 1), B = (0, 0, 1), C = (4, 1, 2) i D = (1, 1, t), en què *t* és un valor real.
a) Per a quin valor de *t* els quatre punts són coplanaris? [1 punt]
b) Trobeu el valor de *t* per tal que el tetraedre (irregular) que formen els quatre punts tingui un volum de $5u^3$. [1,5 punts]
Nota: El volum d'un tetraedre definit pels vectors v_1 , v_2 i v_3 és igual a un sisè del valor absolut del determinant de la matriu formada per tots tres vectors, $V=\frac{1}{6}\left|\det\left(v_1,v_2,v_3\right)\right|$

a) Hallamos la ecuación del plano π que contiene a los puntos A, B y C. Luego hacemos que el punto D pertenezca al plano π.

$$\left.\begin{matrix} A(3,\ 1,\ 1) \\ B(0,\ 0,\ 1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(0,\ 0,\ 1)-(3,\ 1,\ 1)=(-3,-1,0)$$

$$\left.\begin{matrix} A(3,\ 1,\ 1) \\ C(4,\ 1,\ 2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AC}=(4,\ 1,\ 2)-(3,\ 1,\ 1)=(1,0,1)$$

$$\left.\begin{matrix} B(0,0,1)\in\pi \\ \vec{u}=\overrightarrow{AB}=(-3,-1,0) \\ \vec{v}=\overrightarrow{AC}=(1,0,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \pi:\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow -x+z-1+3y=0\Rightarrow \boxed{\pi: x-3y-z+1=0}$$

Para que los cuatro puntos sean coplanarios el punto *D(1,1, t)* debe pertenecer al plano π.

$$\left.\begin{matrix} \pi: x-3y-z+1=0 \\ D(1,1,\ t)\in\pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow 1-3-t+1=0\Rightarrow \boxed{t=-1}$$

b) Consideramos los vectores $\overrightarrow{AB}=(-3,-1,0)$, $\overrightarrow{AC}=(1,0,1)$ y $\overrightarrow{AD}$.
Hacemos que el volumen que obtenemos con la fórmula proporcionada por el ejercicio sea 5.

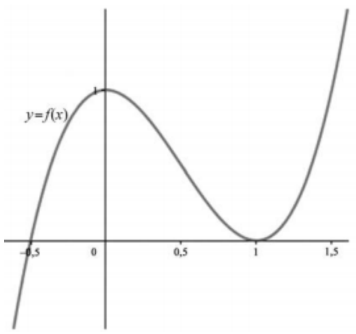
$$\left.\begin{matrix} A(3,\ 1,\ 1) \\ D(1,\ 1,\ t) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AD}=(1,\ 1,\ t)-(3,\ 1,\ 1)=(-2,0,t-1)$$

$$\left.\begin{matrix} V=\frac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right|=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & t-1 \end{vmatrix}=\frac{1}{6}\left|2+t-1\right|=\frac{|t+1|}{6} \\ Volumen=5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{|t+1|}{6}=5\Rightarrow$$

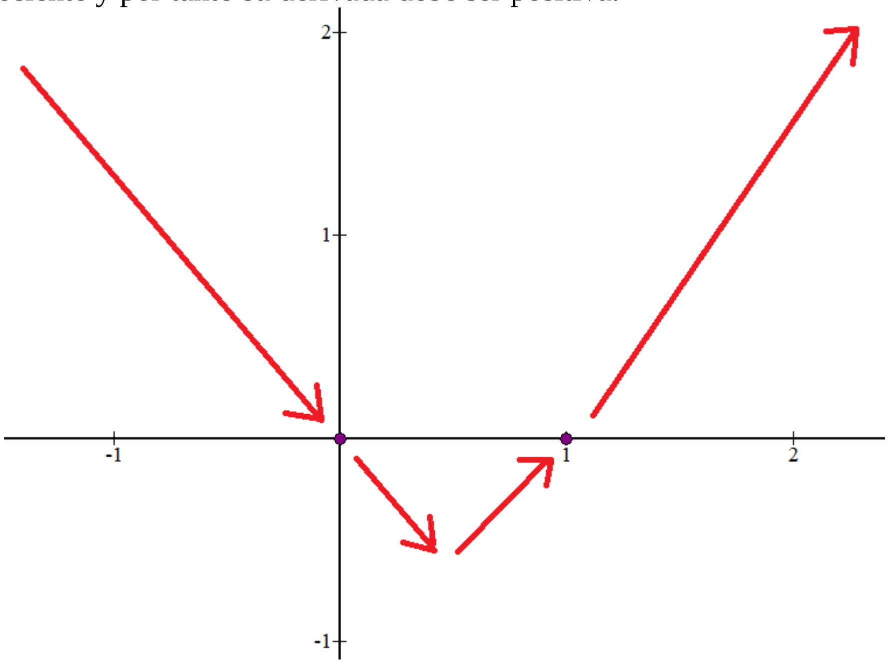
$$\Rightarrow |t+1|=30\Rightarrow\begin{cases} t+1=30\rightarrow \boxed{t=29} \\ t+1=-30\rightarrow \boxed{t=-31} \end{cases}$$

Hay dos soluciones posibles: *t = 29* o *t = –31*.

4. a) En la figura es mostra la gràfica de la funció *f(x)*. Representeu de manera esquemàtica la gràfica de la funció derivada de *f(x)*. Expliqueu el raonament que heu seguit. [1,25 punts]
b) Calculeu els valors de *a* i *b* perquè la funció $g(x)=ax^3+bx^2+1$ tingui un punt d'inflexió en $x=\frac{1}{2}$ i la seva derivada en aquest punt sigui $-\frac{3}{2}$. [1,25 punts]



a) La función derivada se anula en el máximo y el mínimo de la función, es decir, *f ´(0) = 0* y *f ´(1) = 0* .
Antes de *x = 0* la función crece, por lo que su derivada es positiva, pero acercándose al valor 0. Entre *x = 0* y *x = 1* la función decrece, por lo que su derivada es negativa. Después de *x = 1* la función es creciente y por tanto su derivada debe ser positiva.



b) Si la función $g(x)=ax^3+bx^2+1$ tiene un punto de inflexión en $x=\frac{1}{2}$ entonces su derivada segunda se anula para dicho valor, *g´´ (1/2) = 0.*

$$\left.\begin{array}{r} g(x)=ax^3+bx^2+1 \Rightarrow g'(x)=3ax^2+2bx \Rightarrow g''(x)=6ax+2b \\ g''(1/2)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 6a\frac{1}{2}+2b=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3a+2b=0 \Rightarrow \boxed{a=-\frac{2}{3}b}$$

Como además la derivada en $x=\frac{1}{2}$ vale $-\frac{3}{2}$ tenemos que *g´(1/2) = –3/2.*

$$\left.\begin{array}{l} g'(x)=3ax^2+2bx \\ g'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow 3a\left(\frac{1}{2}\right)^2+2b\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3a}{4}+b=-\frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{3a+4b=-6}$$

Unimos las dos condiciones en un sistema y determinamos el valor de *a* y *b*.

$$\left.\begin{array}{l} a=-\dfrac{2}{3}b \\ 3a+4b=-6 \end{array}\right\} \Rightarrow 3\left(-\dfrac{2}{3}b\right)+4b=-6 \Rightarrow -2b+4b=-6 \Rightarrow 2b=-6 \Rightarrow \boxed{b=-3} \Rightarrow \boxed{a=2}$$

Los valores buscados son $a = 2$ y $b = -3$.

5. Sigui la matriu $A=\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{pmatrix}$, en qué *a* és un paràmetre real.

a) Trobeu per a quins valors de *a* la matriu A és invertible. [1 punt]
b) Comproveu que, per al cas *a = 3*, la matriu A és invertible i resoleu l'equació matricial

$AX = B-3I$, en què B és la matriu $B=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ [1,5 punts]

a) La matriz es invertible si su determinante es no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{vmatrix}=a(a+1)(-a-3)+a(a-1)(2a+1)-2a(-a-3)=$$
$$=a\left[(a+1)(-a-3)+(a-1)(2a+1)-2(-a-3)\right]=$$
$$=a\left[-a^2-3a-\cancel{a}-3+2a^2+\cancel{a}-\cancel{2a}-1+\cancel{2a}+6\right]=$$
$$=a\left[a^2-3a+2\right]$$

$$|A|=0 \Rightarrow a\left[a^2-3a+2\right]=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{a=0} \\ a^2-3a+2=0 \rightarrow a=\dfrac{3\pm\sqrt{(-3)^2-8}}{2}=\dfrac{3\pm1}{2}=\begin{cases} \dfrac{3+1}{2}=\boxed{2=a} \\ \dfrac{3-1}{2}=\boxed{1=a} \end{cases} \end{cases}$$

El determinante de A se anula para *a = 0, a = 1* y *a = 2.*
La matriz A tiene inversa cuando el valor de *a* es distinto de 0, 1 y 2.

b) Por lo visto en el apartado a) para *a = 3* la matriz A es invertible al ser un valor distinto de 0, 1 y 2.

Para *a = 3* la matriz A queda $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

Su determinante vale $|A|=\begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{vmatrix}=-72+42+36=6\neq 0$

Determinamos su inversa.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}3 & 2 & 7\\ 3 & 4 & 0\\ 0 & 2 & -6\end{pmatrix}}{6}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}4 & 0\\ 2 & -6\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 0\\ 0 & -6\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3 & 4\\ 0 & 2\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & 7\\ 2 & -6\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3 & 7\\ 0 & -6\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 2\\ 0 & 2\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}2 & 7\\ 4 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 7\\ 3 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-24 & 18 & 6\\ 26 & -18 & -6\\ -28 & 21 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 3 & 1\\ 13/3 & -3 & -1\\ -14/3 & 7/2 & 1\end{pmatrix}$$

Despejamos X de la ecuación matricial.

$$AX=B-3I\Rightarrow X=A^{-1}\left(B-3I\right)$$

Sustituimos el valor de la inversa de A, la matriz B y la matriz identidad.

$$X=A^{-1}\left(B-3I\right)$$

$$X=\begin{pmatrix}-4 & 3 & 1\\ 13/3 & -3 & -1\\ -14/3 & 7/2 & 1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}6 & 3 & 3\\ 2 & 5 & 2\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right]$$

$$X=\begin{pmatrix}-4 & 3 & 1\\ 13/3 & -3 & -1\\ -14/3 & 7/2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 3 & 3\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}-12+6+1 & -12+6+1 & -12+6+1\\ 13-6-1 & 13-6-1 & 13-6-1\\ -14+7+1 & -14+7+1 & -14+7+1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}-5 & -5 & -5\\ 6 & 6 & 6\\ -6 & -6 & -6\end{pmatrix}}$$

6. Considereu la funció $f(x)=\dfrac{x^3}{x-2}$.

a) Estudieu si té punts crítics i, en cas que en tingui, justifiqueu de quin tipus són. Determineu també quins són els intervals de creixement i decreixement de la funció. [1,5 punts]

b) Comproveu que l'equació *f(x) = 0* té una única solució en l'interval (–2, 1). [1 punt]

a) Igualamos a cero su derivada.

$$f(x)=\frac{x^3}{x-2}\Rightarrow f\,'(x)=\frac{3x^2(x-2)-x^3}{(x-2)^2}=\frac{3x^3-6x^2-x^3}{(x-2)^2}=\frac{2x^3-6x^2}{(x-2)^2}=\frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2}$$

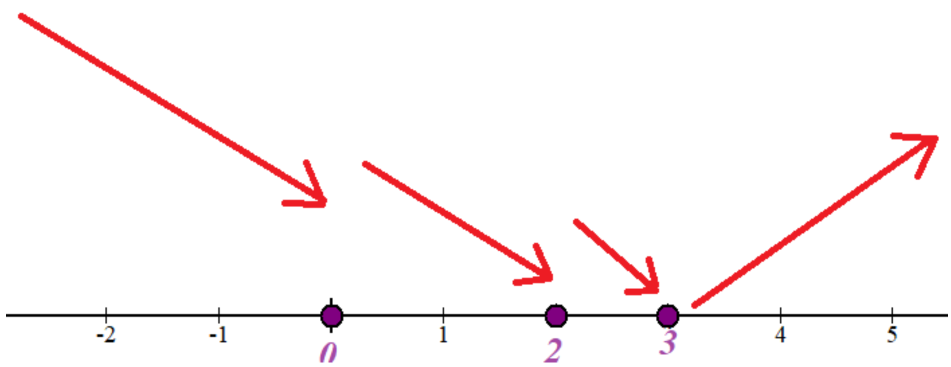
$$f\,'(x)=0\Rightarrow\frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2}=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{x=0}\\ x-3=0\Rightarrow\boxed{x=3}\end{cases}$$

La función presenta dos puntos críticos: *x = 0, x = 3.*

Estudiamos la evolución del signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores. Añadimos el valor *x = 2* en el que la función no existe y por tanto es discontinua.

- En $(-\infty,0)$ tomamos *x = –1* y la derivada vale $f\,'(-1)=\dfrac{2(-1)^2(-1-3)}{(-1-2)^2}=\dfrac{-8}{9}<0$. La función es decreciente en $(-\infty,0)$.
- En $(0,2)$ tomamos *x = 1* y la derivada vale $f\,'(1)=\dfrac{2(1)^2(1-3)}{(1-2)^2}=\dfrac{-4}{1}<0$. La función es decreciente en $(0,2)$.
- En $(2,3)$ tomamos *x = 2.5* y la derivada vale $f\,'(1)=\dfrac{2(2.5)^2(2.5-3)}{(2.5-2)^2}=\dfrac{-12.5}{0.25}<0$. La función es decreciente en $(2,3)$.
- En $(3,+\infty)$ tomamos *x = 5* y la derivada vale $f\,'(x)=\dfrac{2(5)^2(5-3)}{(5-2)^2}=\dfrac{100}{9}>0$. La función es creciente en $(3,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función es decreciente en $(-\infty,2)\cup(2,3)$ y creciente en $(3,+\infty)$.
La función presenta un mínimo relativo en $x = 3$.
Como $x = 0$ es punto crítico (derivada vale 0) y la función decrece en un entorno del punto, la función no puede presentar ni un máximo ni un mínimo luego la función presenta un punto de inflexión en $x = 0$.

b) La función $f(x)=\dfrac{x^3}{x-2}$ es continua en el intervalo (–2, 1) ya que es cociente de polinomios y no se anula el denominador en dicho intervalo. Como $f(-2)=\dfrac{(-2)^3}{-2-2}=2>0$ y $f(1)=\dfrac{1^3}{1-2}=-1<0$ la función toma valores de distinto signo a ambos extremos del intervalo, podemos aplicar el teorema de Bolzano y afirmar que existe un valor "c" del intervalo (–2, 1) donde se anula la función, es decir, $f(c) = 0$.