



## Proves d'accés a la universitat

---

# Matemàtiques

## Serie 2

Qualificació		TR
Qüestions	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
Suma de notes parcials		
Qualificació final		

Etiqueta de l'alumne/a

Ubicació del tribunal .....

Número del tribunal .....

---

Etiqueta de qualificació

Etiqueta del corrector/a

---

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

---

1. Considere la parábola  $y = 4 - x^2$  y un valor  $a > 0$ .

a) Compruebe que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la parábola en el punto de abscisa  $x = a$  es  $y = -2ax + a^2 + 4$  y calcule los puntos de corte de esta recta tangente con los ejes de coordenadas.

[1,25 puntos]

**b)** Calcule el valor de  $a > 0$  para que el área del triángulo determinado por esta recta tangente y los ejes de coordenadas sea mínima.

[1,25 puntos]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 1	$a$	
	$b$	
	Total	

2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro real  $p$ :

$$\begin{cases} px + y + z = 2 \\ 2x + py + p^2z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

**a)** Discuta el sistema para los distintos valores del parámetro  $p$ .

[1,5 puntos]

**b)** Resuelva, si es posible, el sistema para el caso  $p = 2$ .

[1 punto]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 2	<i>a</i>	
	<i>b</i>	
	Total	

3. Considere el punto  $P = (-1, 3, 1)$ , el plano  $\pi: x = y$  y la recta  $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = z-2$ .

**a)** Encuentre las coordenadas del punto  $P'$  simétrico a  $P$  respecto del plano  $\pi$ .

[1,25 puntos]

**b)** De todos los planos que contienen la recta  $r$ , encuentre la ecuación cartesiana del que es perpendicular al plano  $\pi$ .

[1,25 puntos]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 3	$a$	
	$b$	
	Total	

4. Sea la función  $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$  definida en el dominio  $x > 0$ , donde  $\ln$  es el logaritmo neperiano.
- a)** Encuentre las coordenadas de un punto de la curva  $y = f(x)$  en el que la recta tangente a la curva sea horizontal y analice si la función tiene un extremo relativo en este punto.  
[1 punto]

- b)** Determine si la función  $f(x)$  tiene alguna asíntota horizontal.  
[0,5 puntos]



- c) Calcule el área de la región delimitada por la curva  $y=f(x)$  y las rectas  $x=1$  y  $x=e$ . Haga un dibujo aproximado de la gráfica de la función en el dominio  $0 < x < 5$ , donde quede representada el área que ha calculado.

[1 punto]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 4	<i>a</i>	
	<i>b</i>	
	<i>c</i>	
	Total	

5. *a)* Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , resuelva la ecuación matricial  $A^2 X = A - 3I$ , donde

$I$  es la matriz identidad.

[1,25 puntos]

**b)** Una matriz cuadrada  $M$  satisface que  $M^3 - 3M^2 + 3M - I = 0$ , donde  $I$  es la matriz identidad. Justifique que  $M$  es invertible y exprese la inversa de  $M$  en función de las matrices  $M$  e  $I$ .

[1,25 puntos]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 5	$a$	
	$b$	
	Total	

6. Considere la función  $f(x) = e^{x-1} - x - 1$ .
- a) Estudie su continuidad, sus extremos relativos y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- [1,25 puntos]

**b)** Demuestre que la ecuación  $f(x) = 0$  tiene exactamente dos soluciones entre  $x = -1$  y  $x = 3$ .

[1,25 puntos]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 6	<i>a</i>	
	<i>b</i>	
	Total	

[Página para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión.]

[Página para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión.]

--	--

--	--

Etiqueta de l'alumne/a



Institut  
d'Estudis  
Catalans





## Proves d'accés a la universitat

---

# Matemàtiques

## Serie 5

Qualificació		TR
Qüestions	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
Suma de notes parcials		
Qualificació final		

Etiqueta de l'alumne/a

Ubicació del tribunal .....

Número del tribunal .....

---

Etiqueta de qualificació

Etiqueta del corrector/a

---

Responda a CUATRO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que pueden almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

---

1. Considere las matrices  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ .

a) Razone que la matriz  $B$  es invertible y después calcule  $B^{-1}$ .

[1,25 puntos]

**b)** Calcule la matriz  $X$  que satisface la igualdad  $A + B \cdot X = C \cdot A$ .

[1,25 puntos]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 1	<i>a</i>	
	<i>b</i>	
	Total	

2. Sean las funciones  $f(x) = x^3 - 9x$  y  $g(x) = 7x$ .
- a)** Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de  $f(x)$ .
- [1,25 puntos]

- b)** Calcule el área de la región del semiplano  $x \geq 0$  comprendida entre las gráficas de  $f(x)$  y  $g(x)$ .  
[1,25 puntos]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 2	<i>a</i>	
	<i>b</i>	
	Total	

3. Considere los puntos del espacio tridimensional  $A = (1, a, 1)$ ,  $B = (a, 1, 2)$ ,  $C = (1, 1, 1)$  y  $D = (0, 0, 0)$ , donde  $a$  es un parámetro real.
- a)** Determine el valor del parámetro  $a$  para el cual los puntos son diferentes y coplanarios (es decir, que existe un plano que los contiene).
- [1,25 puntos]

**b)** Para el valor  $a = 2$ , calcule el área del triángulo de vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$ .

[1,25 puntos]

NOTA: Para calcular el área del triángulo definido por los vectores  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$ , puede usar

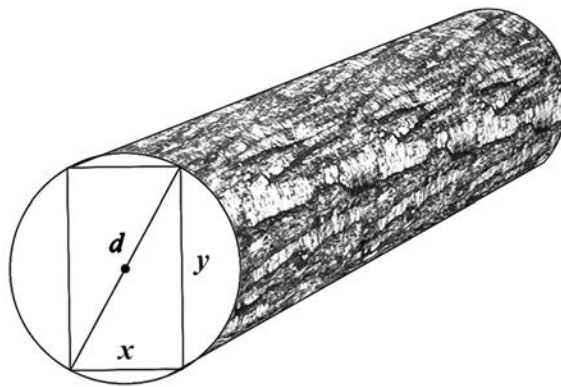
la expresión  $S = \frac{1}{2} \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|$ , donde  $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$  es el producto vectorial de los vectores  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{w}$ .

Espai per al corrector/a		
Qüestió 3	$a$	
	$b$	
	Total	

4. La resistencia a la rotura  $R$  de una viga de sección rectangular de base  $x$  y altura  $y$  es directamente proporcional al producto  $xy^2$ ; por lo tanto,  $R = kxy^2$ , donde  $k$  es una constante positiva. Se dispone de un tronco de madera en forma de cilindro de diámetro  $d$  como el de la figura.

a) Compruebe que la resistencia  $R$  de la viga rectangular de base  $x$  que puede construirse con este tronco viene dada por la expresión  $R = kx(d^2 - x^2)$ .

[1,25 puntos]





- b)** Calcule las dimensiones de la viga rectangular de resistencia máxima que puede construirse a partir de este tronco y calcule esa resistencia máxima.  
[1,25 puntos]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 4	<i>a</i>	
	<i>b</i>	
	Total	

5. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales, que depende del parámetro real  $a$ :

$$\begin{cases} x + 2y + az = 8 \\ 2x + y - az = 1 \\ 3x - 3az = 1 \end{cases}$$

**a)** Compruebe que, para cualquier valor del parámetro  $a$ , el sistema de ecuaciones lineales no tiene solución.

[1,25 puntos]

**b)** Interprete geoméricamente el sistema de ecuaciones lineales. Haga un dibujo esquemático que represente la posición relativa de los tres planos.

[1,25 puntos]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 5	<i>a</i>	
	<i>b</i>	
	Total	

6. Resuelva las dos cuestiones siguientes:

**a)** Sea  $f(x) = 2x^3 + mx^2 + nx + p$  una función que tiene dos extremos relativos en  $x = -3$  y en  $x = 1$  y que pasa por el punto  $(3, 4)$ . Calcule los valores de  $m$ ,  $n$  y  $p$ .

[1,25 puntos]

- b)** Calcule la ecuación de la recta tangente a la función  $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$  en  $x = -3$ .  
[1,25 puntos]

Espai per al corrector/a		
Qüestió 6	<i>a</i>	
	<i>b</i>	
	Total	

[Página para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión.]

[Página para hacer esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder a alguna cuestión.]

--	--

--	--

Etiqueta de l'alumne/a



Institut  
d'Estudis  
Catalans