Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA — EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2021ko EZOHIKOA — EXTRAORDINARIA 2021

MATEMATIKA II — **MATEMÁTICAS II**

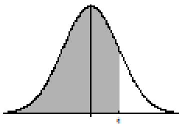
Este examen tiene cinco partes, de 2,5 puntos cada una. Debes responder a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder a una única pregunta.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1
Discutir el sistema de ecuaciones lineales que sigue, en función del parámetro α:

$$\begin{cases} \alpha x + 2y - z = \alpha \\ 2x + \alpha y + z = 2 + \alpha \\ x - \alpha y + 2z = 2\alpha \end{cases}$$

Resolver el sistema para $\alpha = 1$, si es posible.

Ejercicio B1
Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcular la matriz X de orden 2×2 que verifica

$$A^2 \cdot X + B = C$$

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2
Sea *r* la recta de ecuaciones paramétricas

$$\{x = t,\ \ y = 2 + 2t,\ \ z = 1 + 3t\}$$

y sean $A = (1,2,3)$ y $B = (3,2,1)$. Encontrar la ecuación del plano paralelo a la recta *r* y que pasa por los puntos *A* y *B*. Calcular la distancia de la recta *r* a ese plano.

Ejercicio B2
Sean los puntos *A = (0, 2, 1), B = (1, b, 0), C = (–1, 0, 2)* y *D = (1, 1, 1).*

a) Calcular el valor de *b* para que *A, B, C* y *D* estén en el mismo plano.
b) El plano que contiene a los puntos *A, B, C* y *D* es perpendicular al segmento *PQ* y lo divide en dos partes iguales. Si *P = (1, 2, –3),* calcular las coordenadas de *Q*.

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3
Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2-4}$ y calcular sus máximos y sus mínimos.

Ejercicio B3
Sea $f(x) = x^4 + Ax^2 + Bx + C$. Obtener los valores de *A*, *B* y *C* para que en el punto de abscisa $x = 0$ la recta tangente a la gráfica de *f* sea *y = 2x – 1* y en el punto de abscisa *x = 1* la recta tangente a la gráfica de *f* sea horizontal. El extremo situado en el punto de abscisa *x = 1*, ¿es máximo o mínimo?

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

Dibujar el recinto limitado por las gráficas de las parábolas $y = 4x - x^2$ e $y = x^2 - 6$ y calcular su área.

Ejercicio B4

Calcular $\int x \ln(x+1)dx$, explicando el método utilizado.

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5

De los 700 estudiantes que tiene un centro escolar se sabe que 500 proceden del barrio donde está ubicado el centro, 575 utilizan el servicio de comedor y 400 son del barrio y utilizan el servicio de comedor. Se escoge un estudiante al azar:

a) Si es del barrio, ¿cuál es la probabilidad de que use el comedor?
b) Si usa el servicio de comedor, ¿cuál es la probabilidad de que no proceda del barrio?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea del barrio o use el servicio de comedor?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea del barrio ni utilice el servicio de comedor?

Ejercicio B5

La estatura de los individuos de una población sigue una distribución normal de media 1,74 cm y desviación típica 0,05 cm. Se elige un individuo al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga una estatura igual o inferior a la media?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que su estatura esté comprendida entre 1,64 y 1,84 cm?
c) Si la población está compuesta por 1500 individuos. ¿Cuántos tienen una estatura inferior a 1,54 cm?

Soluciones

Ejercicio A1

Discutir el sistema de ecuaciones lineales que sigue, en función del parámetro α:

$$\begin{cases} \alpha x + 2y - z = \alpha \\ 2x + \alpha y + z = 2 + \alpha \\ x - \alpha y + 2z = 2\alpha \end{cases}$$

Resolver el sistema para $\alpha = 1$, si es posible.

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 2 & \alpha & 1 \\ 1 & -\alpha & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 2 & -1 & \alpha \\ 2 & \alpha & 1 & 2+\alpha \\ 1 & -\alpha & 2 & 2\alpha \end{array}\right).$$

Veamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 2 & \alpha & 1 \\ 1 & -\alpha & 2 \end{vmatrix} = 2\alpha^2 + 2 + 2\alpha + \alpha - 8 + \alpha^2 = 3\alpha^2 + 3\alpha - 6$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 3\alpha^2 + 3\alpha - 6 = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \alpha - 2 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 \\ \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

Hay tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $\alpha \neq 1 \ y \ \alpha \neq -2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $\alpha = 1$

Para este valor el sistema queda:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + y + z = 3 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases}$$

Aplicamos el método de Gauss.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + y + z = 3 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a - 2 \cdot \text{Ecuación } 1^a \\ \begin{array}{rrrr} 2x & +y & +z & = 3 \\ -2x & -4y & +2z & = -2 \\ \hline & -3y & +3z & = 1 \end{array} \to \text{Nueva ecuación } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a - \text{Ecuación } 1^a \\ \begin{array}{cccc} x & -y & +2z & =2 \\ -x & -2y & +z & =-1 \\ \hline & -3y & +3z & =1 \end{array} \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2y-z=1 \\ -3y+3z=1 \\ -3y+3z=1 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a - \text{Ecuación } 2^a \\ \begin{array}{cccc} -3y & +3z & = & 1 \\ 3y & -3z & = & -1 \\ \hline 0 & 0 & = & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2y-z=1 \\ -3y+3z=1 \\ 0=0 \end{array}\right.$$

El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones)

CASO 3. $\alpha=-2$

Para este valor el sistema queda:

$$\left\{\begin{array}{l} -2x+2y-z=-2 \\ 2x-2y+z=0 \\ x+2y+2z=-4 \end{array}\right.$$

Aplicamos el método de Gauss.

$$\left\{\begin{array}{l} -2x+2y-z=-2 \\ 2x-2y+z=0 \\ x+2y+2z=-4 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a + \text{Ecuación } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 2x & -2y & +z & =0 \\ -2x & +2y & -z & =-2 \\ \hline & & 0 & =-2 \end{array} \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^a \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -2x+2y-z=-2 \\ 0=-2 \\ x+2y+2z=-4 \end{array}\right.$$

La segunda ecuación es una igualdad imposible.
El sistema es **incompatible** (sin solución)

Resumiendo: Para $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq -2$ el sistema es compatible determinado, para α = 1 el sistema es compatible indeterminado y para α = –2 el sistema es incompatible.

Para α = 1 es compatible indeterminado. Hallamos sus infinitas soluciones. Nos quedamos con el sistema triangular equivalente obtenido con el método de Gauss en el apartado anterior.

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y-z=1 \\ 2x+y+z=3 \\ x-y+2z=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2y-z=1 \\ -3y+3z=1 \\ 0=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2y-z=1 \\ -3y+3z=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2y=1+z \\ -3y=1-3z \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2y=1+z \\ \boxed{y=\frac{1-3z}{-3}=\frac{-1+3z}{3}} \end{cases} \Rightarrow x+2\frac{-1+3z}{3}=1+z \Rightarrow 3x-2+6z=3+3z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x=5-3z \Rightarrow \boxed{x=\frac{5-3z}{3}}$$

Las soluciones del sistema son $x=\frac{5-3t}{3},\ y=\frac{-1+3t}{3},\ z=t$ siendo $t\in\mathbb{R}$

Ejercicio B1

Sean

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&0\\2&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2&2\\0&1\end{pmatrix}.$$

Calcular la matriz X de orden 2×2 que verifica

$$A^2\cdot X+B=C$$

Despejamos X en la ecuación.

$$A^2\cdot X+B=C\Rightarrow A^2\cdot X=C-B\Rightarrow X=\left(A^2\right)^{-1}(C-B)$$

Veamos si la matriz A^2 es invertible, en cuyo caso calculamos su inversa.

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-4&1\end{pmatrix}$$

$$\left|A^2\right|=\begin{vmatrix}1&0\\-4&1\end{vmatrix}=1\neq 0 \text{ La matriz es invertible.}$$

$$\left(A^2\right)^{-1}=\frac{Adj\left(\left(A^2\right)^t\right)}{\left|A^2\right|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1&-4\\0&1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}1&0\\4&1\end{pmatrix}$$

Lo sustituimos en la expresión $X=\left(A^2\right)^{-1}(C-B)$

$$X=\left(A^2\right)^{-1}(C-B)$$

$$X=\begin{pmatrix}1&0\\4&1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}2&2\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0\\2&1\end{pmatrix}\right]$$

$$X=\begin{pmatrix}1&0\\4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2\\-2&0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}0&2\\-2&8\end{pmatrix}}$$

Ejercicio A2
Sea *r* la recta de ecuaciones paramétricas

$$\{x=t,\ \ y=2+2t,\ \ z=1+3t\}$$

y sean $A=(1,2,3)$ y $B=(3,2,1)$. Encontrar la ecuación del plano paralelo a la recta *r* y que pasa por los puntos *A* y *B*. Calcular la distancia de la recta *r* a ese plano.

Hallamos el vector director de la recta *r*

$$r:\left.\begin{array}{r} x=t \\ y=2+2t \\ z=1+3t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P_r(0,2,1)\in r \\ \overrightarrow{v_r}=(1,2,3) \end{array}\right\}$$

Hallamos el vector que une los puntos A y B.

$$\left.\begin{array}{l} A=(1,2,3) \\ B=(3,2,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(3,2,1)-(1,2,3)=(2,0,-2)$$

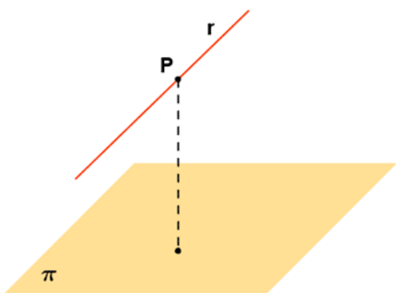
El plano π paralelo a *r* y que pasa por los puntos A y B tiene como vectores directores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{AB}$, y pasa por el punto $A=(1,2,3)$.

$$\left.\begin{array}{l} A=(1,2,3)\in\pi \\ \vec{u}=\overrightarrow{v_r}=(1,2,3) \\ \vec{v}=\overrightarrow{AB}=(2,0,-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \pi:\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4(x-1)+6(y-2)+0-4(z-3)+2(y-2)+0=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow -4x+4+6y-12-4z+12+2y-4=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow -4x+8y-4z=0\Rightarrow \boxed{\pi: x-2y+z=0}$$

Como recta y plano son paralelos la distancia entre ellos es la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano.

$$\left.\begin{array}{l} \pi: x-2y+z=0 \\ P_r(0,2,1)\in r \end{array}\right\} \Rightarrow D(r,\pi)=D(P_r,\pi)=\frac{|0-2\cdot 2+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{6}}{6}=\boxed{\frac{\sqrt{6}}{2}\approx 1.22\,u}$$



$d(r,\pi)=d(P,\pi)$

Ejercicio B2

Sean los puntos $A = (0, 2, 1)$, $B = (1, b, 0)$, $C = (-1, 0, 2)$ y $D = (1, 1, 1)$.

a) Calcular el valor de b para que A, B, C y D estén en el mismo plano.

b) El plano que contiene a los puntos A, B, C y D es perpendicular al segmento PQ y lo divide en dos partes iguales. Si $P = (1, 2, -3)$, calcular las coordenadas de Q.

a) Hallamos el plano π que contiene a los puntos A, C y D. Luego hacemos que el punto B pertenezca al plano π.

$$\left.\begin{array}{l} D(1,1,1)\in\pi \\ \vec{u}=\overrightarrow{AC}=(-1,0,2)-(0,2,1)=(-1,-2,1) \\ \vec{v}=\overrightarrow{AD}=(1,1,1)-(0,2,1)=(1,-1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

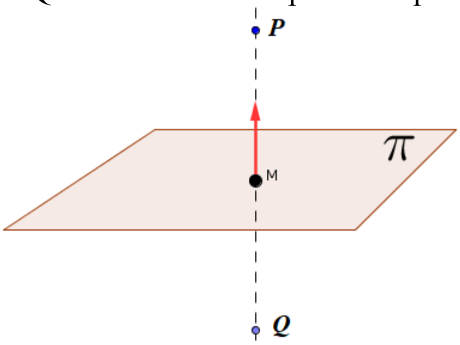
$$\Rightarrow y-1+z-1+2z-2+x-1=0 \Rightarrow \pi : x+y+3z-5=0$$

El punto B pertenece al plano π.

$$\left.\begin{array}{l} \pi : x+y+3z-5=0 \\ B(1,b,0)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow 1+b+0-5=0 \Rightarrow \boxed{b=4}$$

El valor buscado es $b = 4$.

b) El plano que contiene a los puntos A, B, C y D es $\pi : x+y+3z-5=0$.
Nos piden hallar el punto Q simétrico de P respecto del plano π.



Hallamos la recta perpendicular al plano que pasa por el punto P.

$$\pi : x+y+3z-5=0 \Rightarrow \vec{n}=(1,1,3) \Rightarrow r : \begin{cases} P(1,2,-3)\in r \\ \vec{v_r}=\vec{n}=(1,1,3) \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=-3+3t \end{cases}$$

Hallamos el punto M de corte de recta y plano.

$$\left.\begin{array}{l} \pi : x+y+3z-5=0 \\ r : \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=-3+3t \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 1+t+2+t+3(-3+3t)-5=0 \Rightarrow 1+t+2+t-9+9t-5=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11t-11=0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1+1=2 \\ y=2+1=3 \\ z=-3+3=0 \end{cases} \Rightarrow M(2,3,0)$$

El punto Q se obtiene sumando al punto M el vector $\overrightarrow{PM}$.

$$\overrightarrow{PM}=(2,3,0)-(1,2,-3)=(1,1,3)$$

$$Q=(2,3,0)+(1,1,3)=(3,4,3)$$

El punto Q tiene coordenadas (3, 4, 3).

Ejercicio A3

Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=\dfrac{x-4}{x^2-4}$ y calcular sus máximos y sus mínimos.

La función $f(x)=\dfrac{x-4}{x^2-4}$ tiene como dominio todos los reales menos los que anulan su denominador.

$$x^2-4=0 \Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2.$$

El dominio es $\mathbb{R}-\{-2,2\}$

Utilizamos el signo de la derivada de la función para estudiar su evolución.

$$f(x)=\frac{x-4}{x^2-4} \Rightarrow f'(x)=\frac{x^2-4-2x(x-4)}{(x^2-4)^2}=\frac{x^2-4-2x^2+8x}{(x^2-4)^2}=\frac{-x^2+8x-4}{(x^2-4)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-x^2+8x-4}{(x^2-4)^2}=0 \Rightarrow -x^2+8x-4=0 \Rightarrow$$

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4(-1)(-4)}}{-2}=\frac{-8\pm\sqrt{48}}{-2}=\frac{-8\pm 2\sqrt{12}}{-2}=\begin{cases}\dfrac{-8+2\sqrt{12}}{-2}=4-\sqrt{12}\approx 0.53\\[2ex]\dfrac{-8-2\sqrt{12}}{-2}=4+\sqrt{12}\approx 7.46\end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores obtenidos. Añadimos los valores –2 y 2 en los que la función es discontinua.

- En $(-\infty,-2)$ tomamos *x = –3* y la derivada vale $f'(-3)=\dfrac{-(-3)^2+8(-3)-4}{\left((-3)^2-4\right)^2}=\dfrac{-}{+}<0$.

  La función decrece en $(-\infty,-2)$.

- En $\left(-2,4-\sqrt{12}\right)$ tomamos *x = 0* y la derivada vale $f'(0)=\dfrac{-0^2+0-4}{(0^2-4)^2}=-\dfrac{1}{4}<0$. La función decrece en $\left(-2,4-\sqrt{12}\right)$.

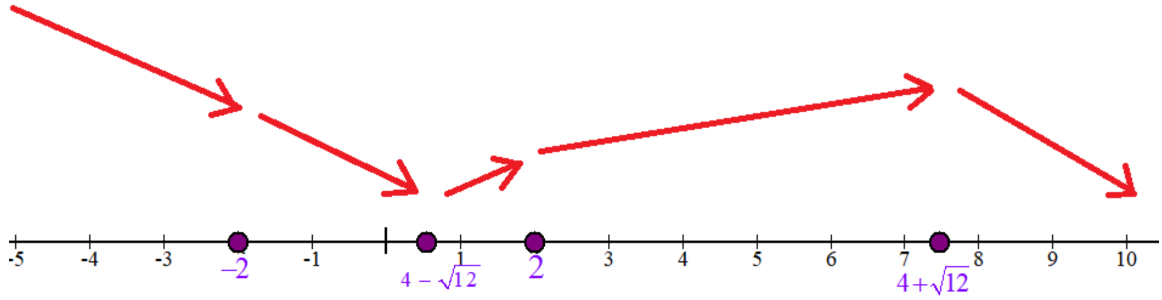
- En $\left(4-\sqrt{12},2\right)$ tomamos *x = 1* y la derivada vale $f'(1)=\dfrac{-1^2+8-4}{(1^2-4)^2}=\dfrac{3}{9}>0$. La función crece en $\left(4-\sqrt{12},2\right)$.

- En $\left(2,4+\sqrt{12}\right)$ tomamos *x = 3* y la derivada vale $f'(3)=\dfrac{-3^2+8(3)-4}{(3^2-4)^2}=\dfrac{12}{25}>0$. La función crece en $\left(2,4+\sqrt{12}\right)$.

- En $\left(4+\sqrt{12},+\infty\right)$ tomamos *x = 10* y la derivada vale $f'(9)=\dfrac{-9^2+72-4}{(10^2-4)^2}=-\dfrac{13}{+}<0$.

  La función decrece en $\left(4+\sqrt{12},+\infty\right)$.

La función sigue el esquema del dibujo.



La función decrece en $(-\infty,-2)\cup\left(-2,4-\sqrt{12}\right)\cup\left(4+\sqrt{12},+\infty\right)$ y crece en $\left(4-\sqrt{12},2\right)\cup\left(2,4+\sqrt{12}\right)$.

La función presenta un mínimo relativo en $x=4-\sqrt{12}$ y un máximo relativo en $x=4+\sqrt{12}$

Ejercicio B3

Sea $f(x)=x^4+Ax^2+Bx+C$. Obtener los valores de *A*, *B* y *C* para que en el punto de abscisa $x=0$ la recta tangente a la gráfica de *f* sea $y = 2x - 1$ y en el punto de abscisa $x = 1$ la recta tangente a la gráfica de *f* sea horizontal. El extremo situado en el punto de abscisa $x = 1$, ¿es máximo o mínimo?

Si la función en el punto de abscisa $x=0$ tiene como recta tangente a la gráfica de *f* la recta $y = 2x - 1$, significa que $f(0) = 0 - 1 = -1$ y que $f\,'(0) = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^4+Ax^2+Bx+C \\ f(0)=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow -1=0^4+A\cdot 0^2+0+C \Rightarrow \boxed{C=-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} f\,'(x)=4x^3+2Ax+B \\ f\,'(0)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2=4\cdot 0^3+0+B \Rightarrow \boxed{B=2}$$

La función queda como $f(x)=x^4+Ax^2+2x-1$

Como en el punto de abscisa $x = 1$ la recta tangente a la gráfica de *f* es horizontal significa que $f\,'(1) = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^4+Ax^2+2x-1 \Rightarrow f\,'(x)=4x^3+2Ax+2 \\ f\,'(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=4+2A+2 \Rightarrow \boxed{A=-3}$$

Los valores buscados son $A = -3$, $B = 2$, $C = -1$.

La función queda $f(x)=x^4-3x^2+2x-1$

La función presenta un punto crítico en $x = 1$ pues la derivada primera se anula.

Calculamos su segunda derivada

$$f(x)=x^4-3x^2+2x-1 \Rightarrow f\,'(x)=4x^3-6x+2 \Rightarrow f\,''(x)=12x^2-6$$

Sustituimos el valor $x = 1$ para averiguar el signo de la derivada segunda.

$$f\,''(1)=12-6=6>0$$

Como es positivo la función presenta un mínimo relativo en $x = 1$.

Ejercicio A4

Dibujar el recinto limitado por las gráficas de las parábolas $y=4x-x^2$ e $y=x^2-6$ y calcular su área.

Hallamos los vértices de las parábolas.

$$y=4x-x^2 \Rightarrow y'=4-2x \qquad y=x^2-6 \Rightarrow y'=2x$$

$$y'=0 \Rightarrow 4-2x=0 \Rightarrow x=2 \qquad y'=0 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0$$

Hacemos una tabla de valores de cada una.

x	$y=4x-x^2$
0	0
1	3
2	4 Vértice
3	3
4	0

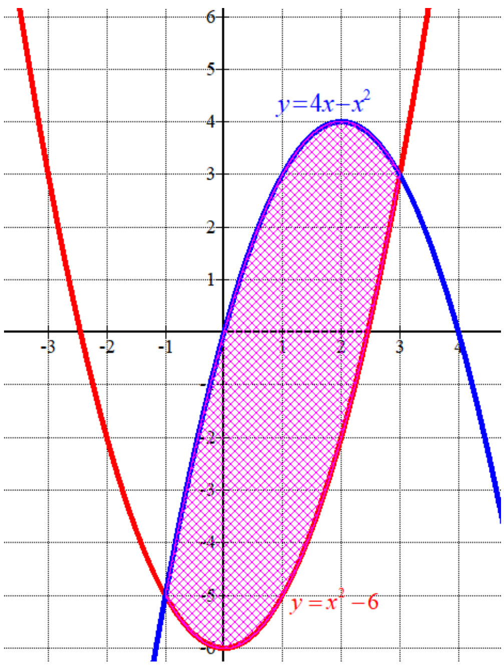
x	$y=x^2-6$
–2	–2
–1	–5
0	–6 Vértice
1	–5
2	–2

Averiguamos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$\left.\begin{array}{l} y=4x-x^2 \\ y=x^2-6 \end{array}\right\} \Rightarrow 4x-x^2=x^2-6 \Rightarrow -2x^2+4x+6=0 \Rightarrow x^2-2x-3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(-3)}}{2}=\frac{2\pm 4}{2}=\begin{cases} \dfrac{2+4}{2}=3 \\ \dfrac{2-4}{2}=-1 \end{cases}$$

Las parábolas se cortan en $x=-1$ y en $x=3$



El área del recinto lo calculamos como la integral definida entre –1 y 3 de la diferencia de las dos funciones.

$$\int_{-1}^{3}\left(4x-x^2\right)-\left(x^2-6\right)dx=\int_{-1}^{3}4x-x^2-x^2+6dx=\int_{-1}^{3}-2x^2+4x+6dx=$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2+6x\right]_{-1}^{3}=\left[-\frac{2}{3}(3)^3+2(3)^2+6(3)\right]-\left[-\frac{2}{3}(-1)^3+2(-1)^2+6(-1)\right]=$$

$$=-18+18+18-\frac{2}{3}-2+6=22-\frac{2}{3}=\frac{64}{3}\approx 21.3\,u^2$$

El área del recinto es 64/3 u^2.

Ejercicio B4

Calcular $\int x\ln(x+1)dx$, explicando el método utilizado.

Utilizamos el método de integración por partes.

$$\int x\ln(x+1)dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln(x+1) \to du = \dfrac{1}{x+1}dx \\ dv = xdx \to v = \int xdx = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x+1}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x+1}dx = \ldots$$

Descomponemos la fracción para facilitar el cálculo de la integral $\int \frac{x^2}{x+1}dx$.

$$\boxed{\frac{x^2}{x+1} = \frac{x^2-1+1}{x+1} = \frac{x^2-1}{x+1} + \frac{1}{x+1} = \frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}} + \frac{1}{x+1} = x-1+\frac{1}{x+1}}$$

$$\int \frac{x^2}{x+1}dx = \int x-1+\frac{1}{x+1}dx = \frac{x^2}{2} - x + \int \frac{1}{x+1}dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1|$$

Sustituimos en la integral de partida.

$$\int x\ln(x+1)dx = \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x+1}dx = \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1|\right] =$$

$$= \boxed{\frac{x^2}{2}\ln|x+1| - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{\ln|x+1|}{2} + K}$$

Ejercicio A5

De los 700 estudiantes que tiene un centro escolar se sabe que 500 proceden del barrio donde está ubicado el centro, 575 utilizan el servicio de comedor y 400 son del barrio y utilizan el servicio de comedor. Se escoge un estudiante al azar:

a) Si es del barrio, ¿cuál es la probabilidad de que use el comedor?
b) Si usa el servicio de comedor, ¿cuál es la probabilidad de que no proceda del barrio?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea del barrio o use el servicio de comedor?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea del barrio ni utilice el servicio de comedor?

Utilizamos una tabla de contingencia para obtener el resto de datos que van implícitos con los proporcionados en el problema.

	Utiliza el servicio de comedor	No utiliza el servicio de comedor	
Es del barrio	**400**		**500**
No es del barrio			
	575		**700**

Completamos los datos.

	Utiliza el servicio de comedor	No utiliza el servicio de comedor	
Es del barrio	**400**	**100**	**500**
No es del barrio	**175**	**25**	**200**
	575	**125**	**700**

Con estos datos podemos calcular las probabilidades pedidas utilizando la regla de Laplace.

$$P(A)=\frac{\text{Nº casos favorables al suceso A}}{\text{Nº casos posibles}}$$

Para simplificar las expresiones llamamos B = Ser del barrio, $\overline{B}$ = No ser del barrio

También llamamos C = Utilizar el servicio de comedor, $\overline{C}$ = No utilizar el servicio de comedor.

a) $P(C/B)=\frac{400}{500}=\boxed{0.8}$

b) $P(\overline{B}/C)=\frac{175}{575}=\boxed{\frac{7}{23}\approx 0.3043}$

c) $P(B\cup C)=\frac{400+100+175}{700}=\boxed{\frac{675}{700}\approx 0.96}$

d) $P(\overline{B}\cap\overline{C})=\boxed{\frac{25}{700}\approx 0.04}$

Ejercicio B5
La estatura de los individuos de una población sigue una distribución normal de media 1,74 cm y desviación típica 0,05 cm. Se elige un individuo al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga una estatura igual o inferior a la media?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que su estatura esté comprendida entre 1,64 y 1,84 cm?
c) Si la población está compuesta por 1500 individuos. ¿Cuántos tienen una estatura inferior a 1,54 cm?

X = Estatura de un individuo X = N(1,74, 0.05)

a) En una distribución normal la media deja la mitad de la distribución a cada lado, por lo que $P(X \le \mu) = 0.5$.

b)

$$P(1.64 \le X \le 1.84) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{1.64-1.74}{0.05} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{1.84-1.74}{0.05}\right) =$$

$$= P(-2 \le Z \le 2) = P(Z \le 2) - P(Z \le -2) = P(Z \le 2) - P(Z \ge 2) =$$

$$= P(Z \le 2) - \left[1 - P(Z \le 2)\right] = \{\text{Buscamos en la tabla N(0, 1)}\} =$$

$$= 0.9772 - (1 - 0.9772) = \boxed{0.9544}$$

c) Calculamos la probabilidad de que un individuo tenga una estatura inferior a 1,54.

$$P(X < 1.54) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{1.54-1.74}{0.05}\right) = P(Z < -4) =$$

$$= P(Z > 4) = 1 - P(Z \le 4) = \{\text{Miramos en la tabla N(0, 1)}\} = 1 - 1 = 0$$

Prácticamente ningún individuo de la población tiene esa estatura.