Universidad Zaragoza 1542

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA DE JUNIO DE 2017
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS. II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3,25 puntos)* Una empresa de transporte va a realizar el transporte de animales de compañía entre dos ciudades. Para ello, va a alquilar furgonetas especializadas en este tipo de transporte, que pueden ser de dos tipos, A y B. Cada furgoneta de tipo A tiene 4 jaulas individuales para perros y 3 jaulas individuales para gatos, mientras que cada furgoneta de tipo B tiene 2 jaulas individuales para perros y 6 jaulas individuales para gatos. El coste de alquiler de cada furgoneta de tipo A es de 240 euros y el coste de alquiler de cada furgoneta de tipo B es de 400 euros. Además, por razones comerciales, el número de furgonetas de tipo B debe ser mayor o igual que el número de furgonetas de tipo A. La empresa tiene que garantizar espacio para, al menos, 24 perros y 54 gatos. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántas furgonetas de cada tipo debe alquilar para que el coste sea mínimo. ¿Cuál es el valor de ese coste mínimo?

2. (*3,25 puntos*)

a) *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + 2x + 2$, con $x \in \mathbb{R}$, encontrar, si existen, a y b tal que f tenga un máximo relativo en $x = -1$ con valor $f(-1) = 2$.

b) *(1,25 puntos)* Calcular:

$$\int_1^2 \left(7e^{3x} + \frac{4}{3}x^2 - 3\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)dx$$

3. *(3,5 puntos)* En una urna hay 2 bolas blancas, 4 bolas negras y 5 bolas rojas. Se extraen dos bolas de la urna, una tras otra sin reemplazamiento. Calcular:

a) *(0,75 puntos)* La probabilidad de que las dos sean rojas.

b) *(1 punto)* La probabilidad de que sean de distinto color.

c) *(0,75 puntos)* La probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja.

d) *(1 punto)* Sea A el suceso "la primera bola extraída es roja" y B el suceso "las dos bolas son del mismo color", ¿son los dos sucesos A y B independientes?

OPCIÓN B

1. (*3,25 puntos*) Una empresa invirtió un total de 10000 euros entre tres fondos A, B y C. El beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo A fue de 0,05 euros, el beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo B fue de 0,1 euros y el beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo C fue de 0,02 euros. Con las inversiones realizadas en los fondos, la empresa obtuvo un beneficio total de 497 euros. Además, la inversión en el fondo A fue igual al triple de la suma de las inversiones en los fondos B y C. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales para determinar cuánto dinero invirtió en cada fondo.

2. *(3,25 puntos)* Dada la función

$$f(x)=\frac{x^2-4}{2x-5}$$

calcular:

a) *(0,25 puntos)* Dominio de f.

b) *(0,75 puntos)* ¿Para qué valores de x es la función positiva?

c) *(1 punto)* Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

d) *(1,25 puntos)* Sus máximos y mínimos relativos, si existen.

3. (*3,5 puntos*)

a) *(2 puntos)* Se sabe que la cantidad de hidratos de carbono de las barritas energéticas de una marca es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 1,5 gramos. Elegimos una muestra aleatoria simple de 75 barritas, les medimos la cantidad de hidratos de carbono y calculamos su promedio, que resulta ser igual a 23,8 gramos. Calcular el intervalo de confianza al 98% para la media de la cantidad de hidratos de carbono en las barritas de esa marca.

b) *(1,5 puntos)* Un opositor se sabe 28 de los 40 temas de un examen. En el examen se eligen al azar 2 de los 40 temas. ¿Cuál es la probabilidad de que el opositor se sepa los dos temas? ¿Cuál es la probabilidad de que se sepa al menos uno de los dos temas?

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. *(3,25 puntos)* Una empresa de transporte va a realizar el transporte de animales de compañía entre dos ciudades. Para ello, va a alquilar furgonetas especializadas en este tipo de transporte, que pueden ser de dos tipos, A y B. Cada furgoneta de tipo A tiene 4 jaulas individuales para perros y 3 jaulas individuales para gatos, mientras que cada furgoneta de tipo B tiene 2 jaulas individuales para perros y 6 jaulas individuales para gatos. El coste de alquiler de cada furgoneta de tipo A es de 240 euros y el coste de alquiler de cada furgoneta de tipo B es de 400 euros. Además, por razones comerciales, el número de furgonetas de tipo B debe ser mayor o igual que el número de furgonetas de tipo A. La empresa tiene que garantizar espacio para, al menos, 24 perros y 54 gatos. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántas furgonetas de cada tipo debe alquilar para que el coste sea mínimo. ¿Cuál es el valor de ese coste mínimo?

Se trata de un problema de programación lineal. Organizamos los datos en una tabla:

	Perros	Gatos	Coste
Nº furgonetas A (x)	**4x**	**3x**	**240x**
Nº furgonetas B (y)	**2y**	**6y**	**400y**
TOTAL	$4x+2y$	$3x+6y$	$240x+400y$

La función objetivo es el coste que deseamos minimizar y tiene la expresión $C(x,y)=240x+400y$.

Las restricciones son:

"Las cantidades deben ser positivas" → $x\geq 0;\ \ y\geq 0$

"*El número de furgonetas de tipo B debe ser mayor o igual que el número de furgonetas de tipo A*" → $y\geq x$

"*La empresa tiene que garantizar espacio para, al menos, 24 perros y 54 gatos*" → $4x+2y\geq 24$; $3x+6y\geq 54$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l}3x+6y\geq 54\\4x+2y\geq 24\\y\geq x\\x\geq 0;\ \ y\geq 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+2y\geq 18\\2x+y\geq 12\\y\geq x\\x\geq 0;\ \ y\geq 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2y\geq 18-x\\y\geq 12-2x\\y\geq x\\x\geq 0;\ \ y\geq 0\end{array}\right\}$$

Representamos las rectas que delimitan la región factible.

$x\geq 0;\ \ y\geq 0$ — Primer cuadrante

$y=x$

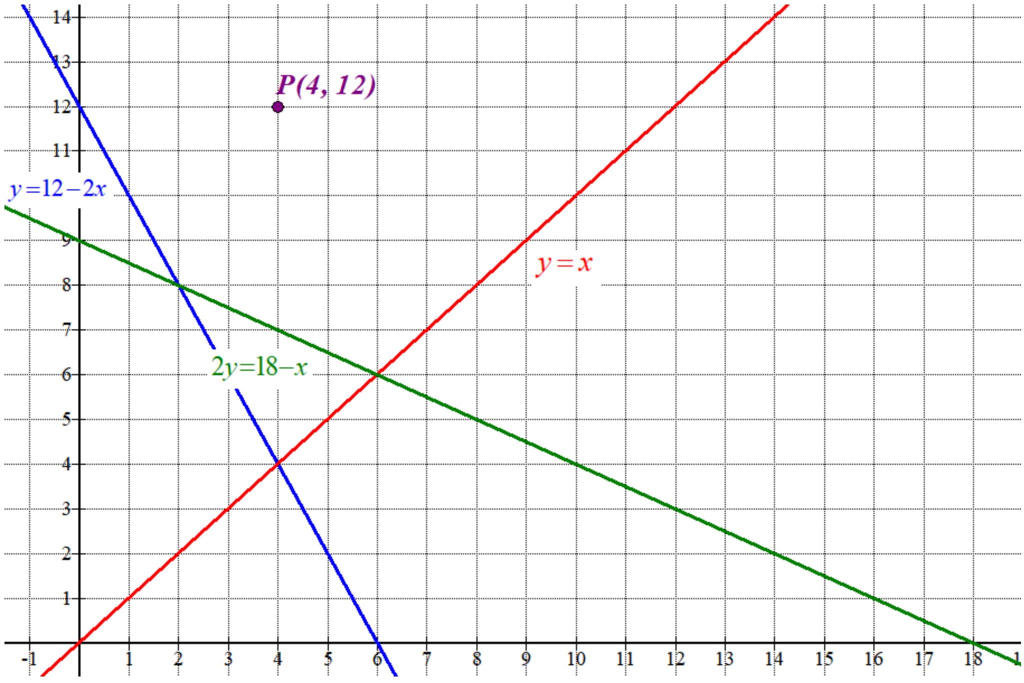
$$\begin{array}{c|c}x & y=x\\\hline 4 & 4\\6 & 6\end{array}$$

$y=12-2x$

$$\begin{array}{c|c}x & y=12-2x\\\hline 2 & 8\\4 & 4\end{array}$$

$2y=18-x$

$$\begin{array}{c|c}x & y=\dfrac{18-x}{2}\\\hline 2 & 8\\6 & 6\end{array}$$

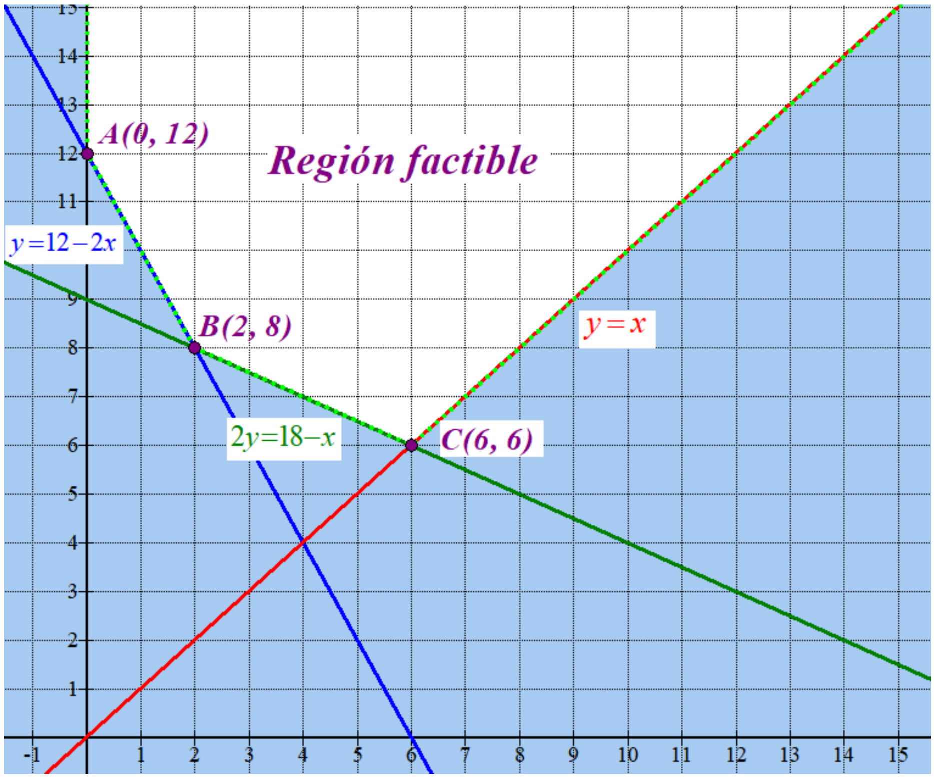


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 2y \geq 18 - x \\ y \geq 12 - 2x \\ y \geq x \\ x \geq 0;\ \ y \geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por encima de las rectas verde, roja y azul.

Comprobamos que el punto P(4, 12) de esta región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 24 \geq 18 - 4 \\ 12 \geq 12 - 8 \\ 12 \geq 4 \\ 4 \geq 0;\ \ 12 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{¡Se cumplen todas!}$$

Dejamos la región factible de color blanco en el siguiente dibujo.



Los vértices de la región factible son:

$$A \to \left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=12-2x \end{array}\right\} \Rightarrow y=12 \to A(0,12)$$

$$B \to \left.\begin{array}{l} y=12-2x \\ 2y=18-x \end{array}\right\} \Rightarrow 2(12-2x)=18-x \Rightarrow 24-4x=18-x \Rightarrow 6=3x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=2 \Rightarrow y=12-4=8 \to B(2,8)$$

$$C \to \left.\begin{array}{l} y=x \\ 2y=18-x \end{array}\right\} \Rightarrow 2x=18-x \Rightarrow 3x=18 \Rightarrow x=6 \Rightarrow y=6 \to C(6,6)$$

Valoramos la función coste $C(x,y)=240x+400y$ en cada uno de los vértices en busca del valor mínimo.

A(0,12) → $C(0,12)=4800$

B(2, 8) → $C(2,8)=480+3200=3680$ ¡Mínimo!

C(6, 6) → $C(6,6)=1440+2400=3840$

El coste mínimo es de 3680 € y se obtiene alquilando 2 furgonetas del tipo A y 8 furgonetas del tipo B.

2. (*3,25 puntos*)
a) *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + 2x + 2$, con $x \in \mathbb{R}$, encontrar, si existen, a y b tal que f tenga un máximo relativo en $x = -1$ con valor $f(-1) = 2$.
b) *(1,25 puntos)* Calcular:

$$\int_1^2 \left(7e^{3x} + \frac{4}{3}x^2 - 3\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)dx$$

a)

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = 2 \\ f(x) = ax^3 + bx^2 + 2x + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2 = a(-1)^3 + b(-1)^2 + 2(-1) + 2 \Rightarrow 2 = -a + b - 2 + 2 \Rightarrow \boxed{b - a = 2}$$

Como f tiene un máximo relativo en $x = -1$ la derivada primera se anula para ese valor.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + 2x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 2$$

$$f'(-1) = 0 \Rightarrow 3a(-1)^2 + 2b(-1) + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{3a - 2b + 2 = 0}$$

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones obtenidas.

$$\left.\begin{array}{l} b - a = 2 \\ 3a - 2b + 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b = 2 + a \\ 3a - 2b + 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3a - 2(2 + a) + 2 = 0 \Rightarrow 3a - 4 - 2a + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 2} \Rightarrow \boxed{b = 2 + 2 = 4}$$

Los valores buscados son $a = 2$ y $b = 4$.

b) Calculamos primero la primitiva de la función.

$$\int \left(7e^{3x} + \frac{4}{3}x^2 - 3\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)dx = 7\int e^{3x}dx + \frac{4}{3}\int x^2 dx - 3\int x^{1/2}dx + \int \frac{1}{x}dx =$$

$$= 7 \cdot \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{4}{3} \cdot \frac{x^3}{3} - 3\frac{x^{1+1/2}}{1 + \frac{1}{2}} + \ln x = \frac{7}{3}e^{3x} + \frac{4}{9}x^3 - 3\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + \ln x = \frac{7}{3}e^{3x} + \frac{4}{9}x^3 - 2\sqrt{x^3} + \ln x$$

Lo aplicamos al cálculo de la integral definida pedida.

$$\int_1^2 \left(7e^{3x} + \frac{4}{3}x^2 - 3\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)dx = \left[\frac{7}{3}e^{3x} + \frac{4}{9}x^3 - 2\sqrt{x^3} + \ln x\right]_1^2 =$$

$$= \left[\frac{7}{3}e^6 + \frac{4}{9}2^3 - 2\sqrt{2^3} + \ln 2\right] - \left[\frac{7}{3}e^3 + \frac{4}{9}1^3 - 2\sqrt{1^3} + \ln 1\right] =$$

$$= \frac{7}{3}e^6 + \frac{4}{9}2^3 - 2\sqrt{2^3} + \ln 2 - \frac{7}{3}e^3 - \frac{4}{9} + 2 = \frac{7}{3}e^6 - \frac{7}{3}e^3 - 4\sqrt{2} + \ln 2 + \frac{32}{9} - \frac{4}{9} + 2 =$$

$$= \boxed{\frac{7}{3}e^6 - \frac{7}{3}e^3 - 4\sqrt{2} + \ln 2 + \frac{46}{9} \simeq 894.615}$$

3. *(3,5 puntos)* En una urna hay 2 bolas blancas, 4 bolas negras y 5 bolas rojas. Se extraen dos bolas de la urna, una tras otra sin reemplazamiento. Calcular:

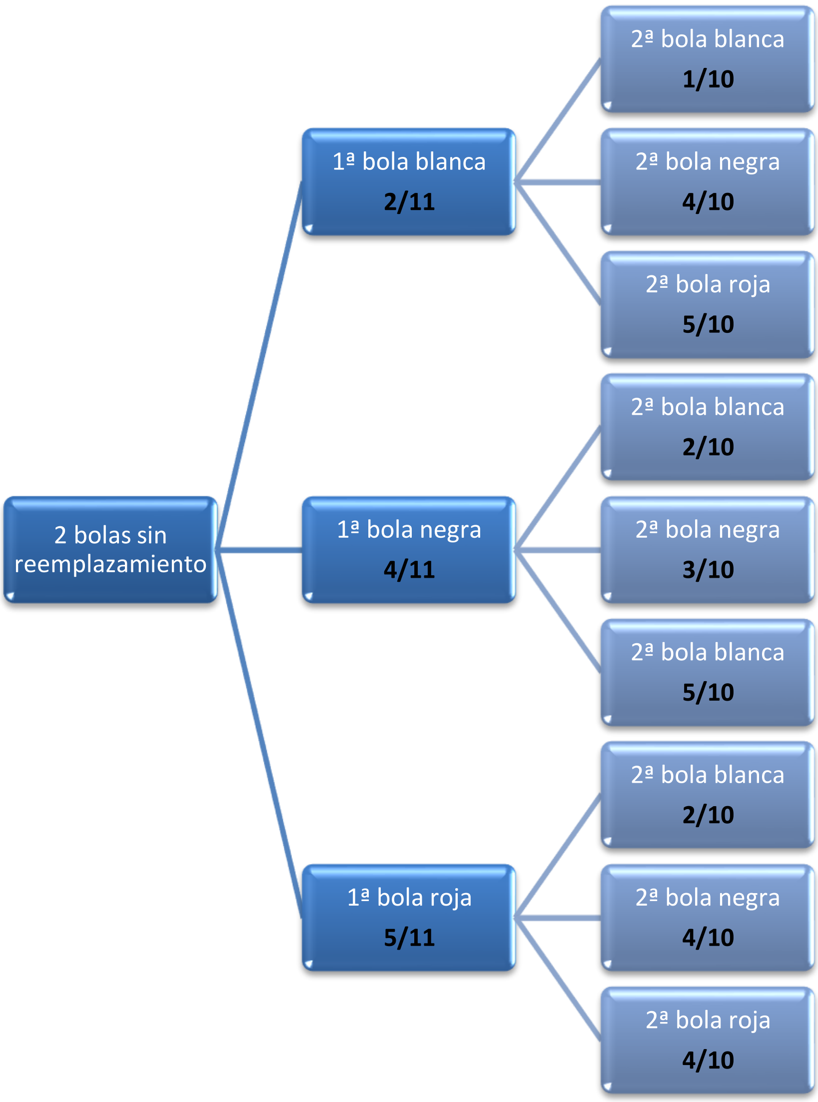
a) *(0,75 puntos)* La probabilidad de que las dos sean rojas.

b) *(1 punto)* La probabilidad de que sean de distinto color.

c) *(0,75 puntos)* La probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja.

d) *(1 punto)* Sea *A* el suceso "la primera bola extraída es roja" y *B* el suceso "las dos bolas son del mismo color", ¿son los dos sucesos *A* y *B* independientes?

Realizamos un diagrama de árbol.



Sean B_1, N_1 y R_1 los sucesos "la primera bola extraída es blanca, negra o roja, respectivamente" y B_2, N_2 y R_2 los sucesos "la segunda bola extraída es blanca, negra o roja, respectivamente".

a) $P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)P(R_2/R_1) = \dfrac{5}{11}\cdot\dfrac{4}{10} = \boxed{\dfrac{2}{11} \simeq 0.181}$

b) Hay muchas combinaciones posibles para sacar dos bolas de distinto color, por lo que calculamos la probabilidad utilizando el suceso contrario a "Sacar dos bolas de distinto color" que es "Sacar dos bolas del mismo color" = "Sacar dos bolas rojas o dos bolas blancas o dos bolas negras".

$$P(\text{Sacar dos bolas del mismo color}) = P(B_1 \cap B_2) + P(N_1 \cap N_2) + P(R_1 \cap R_2) =$$

$$= P(B_1)P(B_2/B_1) + P(N_1)P(N_2/N_1) + P(R_1)P(R_2/R_1) =$$

$$= \frac{2}{11}\cdot\frac{1}{10} + \frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10} + \frac{5}{11}\cdot\frac{4}{10} = \frac{2+12+20}{110} = \frac{34}{110} = \frac{17}{55}$$

Hallamos ahora la probabilidad pedida.

$$P(\text{Sacar dos bolas de distinto color}) = 1 - P(\text{Sacar dos bolas del mismo color}) =$$

$$= 1 - \frac{17}{55} = \boxed{\frac{38}{55} \simeq 0.691}$$

c)

$$P(R_2) = P(B_1 \cap R_2) + P(N_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap R_2) =$$

$$= P(B_1)P(R_2/B_1) + P(N_1)P(R_2/N_1) + P(R_1)P(R_2/R_1) =$$

$$= \frac{2}{11}\cdot\frac{5}{10} + \frac{4}{11}\cdot\frac{5}{10} + \frac{5}{11}\cdot\frac{4}{10} = \frac{10+20+20}{110} = \frac{50}{110} = \boxed{\frac{5}{11} \simeq 0.455}$$

d) Hemos llamado al suceso A como R_1. La probabilidad de sacar dos bolas del mismo color lo hemos calculado en el apartado b).

$$P(B) = P(\text{Sacar dos bolas del mismo color}) = \frac{17}{55}$$

$$P(A) = P(R_1) = \frac{5}{11}$$

$$P(A \cap B) = P(\text{Sacar 1}^{\text{a}}\text{ bola roja y la 2}^{\text{a}}\text{ roja}) = P(R_1 \cap R_2) = \frac{2}{11}$$

Para que los sucesos A y B sean independientes debe cumplirse la igualdad $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Comprobamos si es cierta la igualdad.

$$¿P(A \cap B) = P(A)P(B)?$$

$$¿\frac{2}{11} = \frac{5}{11}\cdot\frac{17}{55}?$$

$$¿\frac{2}{11} = \frac{17}{121}?$$ ¡¡No es cierto!!

No se cumple la igualdad y los dos sucesos A y B no son independientes.

OPCIÓN B

1. (*3,25 puntos*) Una empresa invirtió un total de 10000 euros entre tres fondos A, B y C. El beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo A fue de 0,05 euros, el beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo B fue de 0,1 euros y el beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo C fue de 0,02 euros. Con las inversiones realizadas en los fondos, la empresa obtuvo un beneficio total de 497 euros. Además, la inversión en el fondo A fue igual al triple de la suma de las inversiones en los fondos B y C. Plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales para determinar cuánto dinero invirtió en cada fondo.

Sea "x" la inversión en el fondo A, "y" la inversión en B y "z" la inversión en C. Se tiene:

"*Una empresa invirtió un total de 10000 euros*" → $x+y+z=10000$

"*El beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo A fue de 0,05 euros, el beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo B fue de 0,1 euros y el beneficio que obtuvo por cada euro invertido en el fondo C fue de 0,02 euros. Obtiene un beneficio total de 497 €*" → $0.05x+0.1y+0.02z=497$

"*La inversión en el fondo A fue igual al triple de la suma de las inversiones en los fondos B y C*" → $x=3(y+z)$

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=10000 \\ 0.05x+0.1y+0.02z=497 \\ x=3(y+z) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=10000 \\ 0.05x+0.10y+0.02z=497 \\ x=3y+3z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=10000 \\ 5x+10y+2z=49700 \\ x=3y+3z \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3y+3z+y+z=10000 \\ 5(3y+3z)+10y+2z=49700 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4y+4z=10000 \\ 15y+15z+10y+2z=49700 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y+z=2500 \\ 25y+17z=49700 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=2500-z \\ 25y+17z=49700 \end{array}\right\} \Rightarrow 25(2500-z)+17z=49700 \Rightarrow 62500-25z+17z=49700 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12800=8z \Rightarrow \boxed{z=\frac{12800}{8}=1600} \Rightarrow \boxed{y=2500-1600=900} \Rightarrow \boxed{x=2700+4800=7500}$$

Ha invertido 7500 € en fondos A, 900 € en fondos B y 1600 en fondos C.

2. *(3,25 puntos)* Dada la función

$$f(x)=\frac{x^2-4}{2x-5}$$

calcular:
a) *(0,25 puntos)* Dominio de f.
b) *(0,75 puntos)* ¿Para qué valores de x es la función positiva?
c) *(1 punto)* Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
d) *(1,25 puntos)* Sus máximos y mínimos relativos, si existen.

a) El dominio de una función racional son todos los reales menos los valores que anulen el denominador.

$$2x-5=0 \Rightarrow 2x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{2}$$

Dominio de f = $\mathbb{R}-\left\{\frac{5}{2}\right\}$

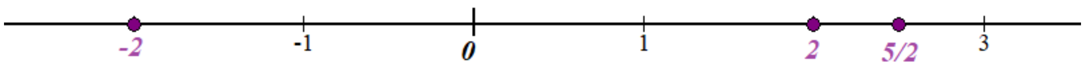
b) La función es positiva cuando son positivos numerador y denominador o cuando ambos son negativos.

El denominador se anula en $x=\frac{5}{2}$, veamos cuando se anula el numerador.

$$x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2$$

El denominador se anula para *x* = *–2* y para *x* = *2*.

Estudiamos el signo de la función antes de los tres valores, entre ellos y después de los tres.



- En $(-\infty,-2)$ tomamos *x* = *–3* y la función vale $f(-3)=\frac{(-3)^2-4}{2(-3)-5}=\frac{5}{-11}<0$. La función es negativa en $(-\infty,-2)$.
- En $(-2,2)$ tomamos *x* = *0* y la función vale $f(0)=\frac{0^2-4}{0-5}=\frac{4}{4}>0$. La función es positiva en $(-2,2)$.
- En $\left(2,\frac{5}{2}\right)$ tomamos *x* = *2.25* y la función vale $f(2.25)=\frac{2.25^2-4}{4.5-5}=\frac{1.0625}{-0.5}<0$. La función es negativa en $\left(2,\frac{5}{2}\right)$.
- En $\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$ tomamos *x* = *3* y la función vale $f(3)=\frac{3^2-4}{6-5}=1>0$. La función es positiva en $\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$.

La función es positiva en $(-2,2)\cup\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$

c) **Asíntota vertical.** $x=a$

$$\lim_{x\to 5/2} f(x) = \lim_{x\to 5/2} \frac{x^2-4}{2x-5} = \frac{1.0625}{0} = \infty$$

La recta $x = \frac{5}{2}$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4}{2x-5} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2} = \infty$$

No tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-4}{2x-5}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-4}{2x^2-5x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$n = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-4}{2x-5} - \frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{2x^2} - 8 - \cancel{2x^2} + 5x}{2(2x-5)} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x-8}{4x-10} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x}{4x} = \frac{5}{4}$$

La función tiene una asíntota oblicua en $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$

d) Utilizamos la derivada para encontrar los valores críticos.

$$f(x) = \frac{x^2-4}{2x-5} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(2x-5) - 2(x^2-4)}{(2x-5)^2} = \frac{4x^2 - 10x - 2x^2 + 8}{(2x-5)^2} = \frac{2x^2 - 10x + 8}{(2x-5)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^2-10x+8}{(2x-5)^2} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 10x + 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow$$

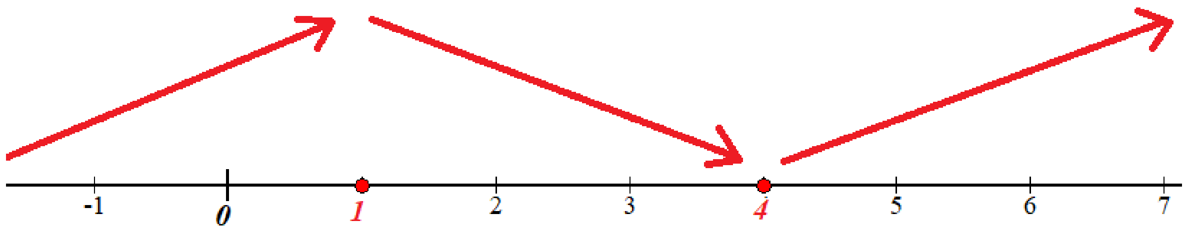
$$\Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} \frac{5+3}{2} = 4 = x \\ \frac{5-3}{2} = 1 = x \end{cases}$$

Tenemos dos puntos críticos, valoramos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En $(-\infty, 1)$ tomamos *x = 0* y la derivada vale $f'(0) = \frac{0-0+8}{(0-5)^2} = \frac{8}{25} > 0$. La función crece en $(-\infty, 1)$.
- En $\left(1, \frac{5}{2}\right)$ tomamos *x = 2* y la derivada vale $f'(2) = \frac{2\cdot 2^2 - 10\cdot 2 + 8}{(2\cdot 2 - 5)^2} = -2 < 0$. La función decrece en $\left(1, \frac{5}{2}\right)$.

- En $\left(\frac{5}{2},4\right)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3)=\frac{2\cdot 3^2-10\cdot 3+8}{(2\cdot 3-5)^2}=-4<0$. La función decrece en $\left(\frac{5}{2},4\right)$.
- En $(4,+\infty)$ tomamos $x = 5$ y la derivada vale $f'(5)=\frac{2\cdot 5^2-10\cdot 5+8}{(10-5)^2}=\frac{8}{25}>0$. La función crece en $(4,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función tiene un máximo relativo en $x = 1$ y un mínimo en $x = 4$. Como $f(1)=\frac{1^2-4}{2-5}=1$ y $f(4)=\frac{4^2-4}{8-5}=4$ el máximo tiene coordenadas (1, 1) y el mínimo (4, 4).

3. (*3,5 puntos*)
a) *(2 puntos)* Se sabe que la cantidad de hidratos de carbono de las barritas energéticas de una marca es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 1,5 gramos. Elegimos una muestra aleatoria simple de 75 barritas, les medimos la cantidad de hidratos de carbono y calculamos su promedio, que resulta ser igual a 23,8 gramos. Calcular el intervalo de confianza al 98% para la media de la cantidad de hidratos de carbono en las barritas de esa marca.
b) *(1,5 puntos)* Un opositor se sabe 28 de los 40 temas de un examen. En el examen se eligen al azar 2 de los 40 temas. ¿Cuál es la probabilidad de que el opositor se sepa los dos temas? ¿Cuál es la probabilidad de que se sepa al menos uno de los dos temas?

a) X = Duración de las bombillas de un fabricante. X = N(μ, 75)

a1) Obtengamos el valor crítico correspondiente al nivel de confianza del 98%:

1 – ∝ = 0.98 → ∝ = 0.02 →∝/2 = 0.01 →1 – ∝/2 = 0.99 → $z_{\alpha/2}$ = **2.325**

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.
0.0	0.5000	0.5040	[illegible]	[illegible]120	0.5
0.1	0.5398	0.5438	0.[illegible]478	[illegible]7	0.5
0.2	0.5793	0.5832	0.[illegible]871	0.[illegible]910	0.5
0.3	0.6179	0.6217	0.[illegible]255	0.[illegible]293	0.6
0.4	0.6554	0.6591	0.[illegible]628	0.[illegible]664	0.6
0.5	0.6915	0.6950	0.[illegible]985	0.[illegible]019	0.7
0.6	0.7257	0.7291	0.[illegible]324	0.[illegible]357	0.7
0.7	0.7580	0.7611	0.[illegible]642	0.[illegible]673	0.7
0.8	0.7881	0.7910	0.[illegible]939	0.[illegible]967	0.7
0.9	0.8159	0.8186	0.[illegible]212	0.[illegible]238	0.8
1.0	0.8413	0.8438	0.[illegible]461	0.[illegible]485	0.8
1.1	0.8643	0.8665	0.[illegible]686	0.[illegible]708	0.8
1.2	0.8849	0.8869	0.[illegible]888	0.[illegible]907	0.8
1.3	0.9032	0.9049	0.[illegible]066	0.[illegible]082	0.9
1.4	0.9192	0.9207	0.[illegible]222	0.[illegible]236	0.9
1.5	0.9332	0.9345	0.[illegible]357	0.[illegible]370	0.9
1.6	0.9452	0.9463	0.[illegible]474	0.[illegible]484	0.9
1.7	0.9554	0.9564	0.[illegible]573	0.[illegible]582	0.9
1.8	0.9641	0.9649	0.[illegible]656	0.[illegible]664	0.9
1.9	0.9713	0.9719	0.[illegible]726	0.[illegible]732	0.9
2.0	0.9772	0.9778	0.[illegible]783	0.[illegible]788	0.9
2.1	0.9821	0.9826	0.[illegible]830	0.[illegible]834	0.9
2.2	0.9861	0.9864	0.[illegible]868	0.[illegible]871	0.9
2.3	[illegible]	[illegible]	0.9898	0.9901	0.9
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9

El error máximo admisible o cota de error debe ser menor de 15 horas:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.325 \cdot \frac{75}{\sqrt{n}} = 15 \Rightarrow 2.325 \cdot 75 = 15\sqrt{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2.325 \cdot 75}{15} \Rightarrow n = \left(\frac{2.325 \cdot 75}{15}\right)^2 = 135.14$$

Como el tamaño debe ser entero y mayor del obtenido la muestra debe ser de, al menos, 136 bombillas para obtener como máximo un error en la media de 15 horas.

a2) Ahora, tenemos una muestra de n = 150 bombillas y con media $\bar{x} = 1053$ horas.

El valor crítico correspondiente al nivel de confianza del 98% lo hemos obtenido en el apartado anterior y es $z_{\alpha/2}$ **= 2.325.**

El error del intervalo de confianza es: $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.325 \cdot \frac{75}{\sqrt{150}} = 14.238$

El intervalo de confianza para la media de la población, centrado en la media muestral será:

$$\left(\bar{x} - E,\ \bar{x} + E\right) = \left(1053 - 14.238,\ 1053 + 14.238\right) = \left(1038.762,\ 1067.238\right)$$

b) Utilizamos las distintas fórmulas de probabilidad.

$$P\left(A \cap B\right) = P\left(A\right) P\left(B / A\right) = 0.6 \cdot 0.9 = \boxed{0.54}$$

$$P\left(A \cup B\right) = P\left(A\right) + P\left(B\right) - P\left(A \cap B\right) = 0.6 + 0.8 - 0.54 = \boxed{0.66}$$

$$P\left(A / B\right) = \frac{P\left(A \cap B\right)}{P\left(B\right)} = \frac{0.54}{0.8} = \boxed{0.675}$$