Universidad Zaragoza 1542

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE DE 2017
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS. II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3,25 puntos)* Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}3&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0&5\\2&1&-1\\-1&4&0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&3&1\\-5&2&0\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1&0&4\\2&3&0\\1&-1&2\end{pmatrix}$$

a) *(0,5 puntos)* ¿Se puede calcular AB? Si es así, calcularla; si no se puede, razonar por qué.

b) *(0,5 puntos)* ¿Se puede calcular BA? Si es así, calcularla; si no se puede, razonar por qué.

c) *(1,25 puntos)* Calcular, si existe, la matriz inversa de C.

d) *(1 punto)* Encontrar, si existe, una matriz X tal que $2C+4X=3D$.

2. (*3,25 puntos*) Los ingresos por ventas (en millones de euros) que obtiene una empresa dependen del gasto que haga en publicidad, de forma que, si gasta x millones de euros, los ingresos por ventas son iguales a:

$$V(x)=\frac{21x+12}{x+1}$$

a) *(0,75 puntos)* Encontrar, si existe, el valor o valores de x para los cuales los ingresos por ventas son iguales a 18 millones de euros.

b) *(1 punto)* Calcular:

$$\lim_{x\to+\infty} V(x)$$

¿Cómo se puede interpretar el resultado?

c) *(1,5 puntos)* Si definimos el beneficio por ventas como la diferencia entre los ingresos por ventas y el gasto en publicidad (esto es, $B(x)=V(x)-x$, calcular el máximo beneficio que se puede alcanzar cuando $x\in[0,5]$.

3. *(3,5 puntos)* En la Facultad de Economía de una universidad se pueden estudiar 3 grados: Grado en Contabilidad, Grado en Economía y Grado en Empresariales. En todos los grados hay un grupo de mañana y un grupo de tarde. La distribución de los estudiantes en cada uno de los grados, según grupo de mañana y de tarde es:

	Grado en Contabilidad	Grado en Economía	Grado en Empresariales
Mañana	395	278	538
Tarde	240	306	486

a) *(0,5 puntos)* Se elige al azar un estudiante de la Facultad. ¿Cuál es la probabilidad de que sea del grupo de tarde del Grado en Contabilidad?

b) *(0,75 puntos)* Se elige al azar un estudiante del grupo de tarde. ¿Cuál es la probabilidad de que sea del Grado en Contabilidad?

c) *(0,75 puntos)* Se elige al azar un estudiante de la Facultad. Sea A el suceso "Es del Grado en Contabilidad" y B el suceso "Es del grupo de tarde", ¿son independientes los sucesos A y B?

d) *(0,75 puntos)* Se eligen al azar dos estudiantes distintos de la Facultad. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos sean del grupo de tarde?

e) *(0,75 puntos)* Se eligen al azar dos estudiantes distintos de la Facultad. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo Grado?

OPCIÓN B

1. (*3,25 puntos*) Una asociación está organizando un viaje a un parque temático para sus socios. Para comprar las entradas, la asociación ha llegado a un acuerdo con la dirección del parque, de forma que puede comprar dos tipos de entradas, "Grupal-A" y "Grupal-B" con las siguientes características:

- Cada entrada de tipo "Grupal-A" permite entrar al parque a 2 adultos y 3 niños, y cuesta 85 euros.
- Cada entrada de tipo "Grupal-B" permite entrar al parque a 4 adultos y 12 niños, y cuesta 230 euros.
- Deben comprarse, al menos, 4 entradas de tipo "Grupal-A y 2 entradas de tipo "Grupal-B".

La asociación quiere que entren al parque, al menos, 40 adultos y 96 niños. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántas entradas de cada tipo "Grupal-A" y "Grupal-B" debe comprar para minimizar el coste total. ¿Cuál es el valor de ese coste mínimo?

2. *(3,25 puntos)* Dada la función, definida para $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} ax+2 & si \quad x < -1 \\ 18-4x+x^2 & si \quad -1 \le x < 3 \\ x^3-9x^2+15x+20 & si \quad x \ge 3 \end{cases}$$

a) *(0,75 puntos)* Calcular a sabiendo que f es continua en $x = -1$.

b) *(1,5 puntos)* Calcular el máximo valor que toma la función f para $x \in [4,8]$.

c) *(1 punto)* Calcular:

$$\int_1^2 f(x)dx$$

3. (*3,5 puntos*)

a) *(2,75 puntos)* La duración de las bombillas de un fabricante es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 75 horas.

a1) *(1,75 puntos)* Queremos construir un intervalo de confianza al 98% para la media de la duración de las bombillas del fabricante, de forma que el error no sea mayor de 15 horas. ¿Qué tamaño de la muestra debemos tomar?

a2) *(1 punto)* Decidimos tomar un tamaño de la muestra igual a 150, comprobamos la duración de cada bombilla y calculamos su promedio, que resulta ser 1053 horas. Calcular el intervalo de confianza al 98% para la media de la duración de las bombillas del fabricante.

b) *(0,75 puntos)* Sean A y B sucesos tales que $P(A) = 0{,}6$, $P(B/A) = 0{,}9$ y $P(B) = 0{,}8$. Calcular $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$ y $P(A/B)$.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \le k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. *(3,25 puntos)* Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}3&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0&5\\2&1&-1\\-1&4&0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&3&1\\-5&2&0\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1&0&4\\2&3&0\\1&-1&2\end{pmatrix}$$

a) *(0,5 puntos)* ¿Se puede calcular AB? Si es así, calcularla; si no se puede, razonar por qué.
b) *(0,5 puntos)* ¿Se puede calcular BA? Si es así, calcularla; si no se puede, razonar por qué.
c) *(1,25 puntos)* Calcular, si existe, la matriz inversa de C.
d) *(1 punto)* Encontrar, si existe, una matriz X tal que $2C+4X=3D$.

a) Comparamos el número de columnas de A con el número de filas de B. Como son iguales es posible el producto y nos daría como resultado una matriz con 2 filas y 3 columnas.

$$AB=\begin{pmatrix}3&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&5\\2&1&-1\\-1&4&0\end{pmatrix}$$

$$2\times\boxed{3\quad\cdot\quad 3}\times 3\longrightarrow 2\times 3$$

$$¡¡IGUALES!!$$

Calculamos AB.

$$AB=\begin{pmatrix}3&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&5\\2&1&-1\\-1&4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+2+0&0+1+0&15-1+0\\-1+4-3&0+2+12&-5-2+0\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}5&1&14\\0&14&-7\end{pmatrix}}$$

.

$$2\times\boxed{3\quad\cdot\quad 3}\times 3\longrightarrow 2\times 3$$

$$¡¡IGUALES!!$$

b) Comparamos el número de columnas de B con el número de filas de A. Como son distintos no es posible el producto.

$$BA=\begin{pmatrix}1&0&5\\2&1&-1\\-1&4&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$$

$$3\times\boxed{3\quad\cdot\quad 2}\times 3\longrightarrow ¡¡\text{No es posible!!}$$

$$¡¡DISTINTOS!$$

c) Calculamos su determinante para comprobar si existe la inversa.

$$|C|=\begin{vmatrix}1&-1&0\\2&3&1\\-5&2&0\end{vmatrix}=0+5+0-0-0-2=3\neq 0$$ → Existe la inversa de C.

$$C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 1\\ -5 & 2 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow C^T=\begin{pmatrix}1 & 2 & -5\\ -1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$C^{-1}=\frac{Adj\left(C^T\right)}{|C|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 2 & -5\\ -1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}}{3}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & -5\\ 1 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & -5\\ 0 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}2 & -5\\ 3 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -5\\ -1 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{C^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & 0 & -1\\ -5 & 0 & -1\\ 19 & 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-2}{3} & 0 & \frac{-1}{3}\\ \frac{-5}{3} & 0 & \frac{-1}{3}\\ \frac{19}{3} & 1 & \frac{5}{3}\end{pmatrix}}$$

d) Despejamos X en la ecuación.

$$2C+4X=3D\Rightarrow 4X=3D-2C\Rightarrow X=\frac{3}{4}D-\frac{1}{2}C$$

Reemplazamos el valor de las matrices y realizamos las operaciones indicadas.

$$X=\frac{3}{4}D-\frac{1}{2}C$$

$$X=\frac{3}{4}\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 2 & 3 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 1\\ -5 & 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & 0 & 3\\ \frac{3}{2} & \frac{9}{4} & 0\\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ -1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{5}{2} & -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 3\\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2}\\ \frac{13}{4} & -\frac{7}{4} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}}$$

2. (*3,25 puntos*) Los ingresos por ventas (en millones de euros) que obtiene una empresa dependen del gasto que haga en publicidad, de forma que, si gasta x millones de euros, los ingresos por ventas son iguales a:

$$V(x)=\frac{21x+12}{x+1}$$

a) *(0,75 puntos)* Encontrar, si existe, el valor o valores de x para los cuales los ingresos por ventas son iguales a 18 millones de euros.

b) *(1 punto)* Calcular:

$$\lim_{x\to+\infty} V(x)$$

¿Cómo se puede interpretar el resultado?

c) *(1,5 puntos)* Si definimos el beneficio por ventas como la diferencia entre los ingresos por ventas y el gasto en publicidad (esto es, $B(x) = V(x) - x$, calcular el máximo beneficio que se puede alcanzar cuando $x \in [0,5]$.

a) $V(x)=18 \Rightarrow \frac{21x+12}{x+1}=18 \Rightarrow 21x+12=18x+18 \Rightarrow 3x=6 \Rightarrow x=\frac{6}{3}=2$.

Cuando gaste 2 millones de euros en publicidad obtendrá 18 millones de euros de ventas.

b) $\lim_{x\to+\infty} V(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{21x+12}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{21x}{x}=21$

La interpretación es que por mucho que aumente el gasto en publicidad, los ingresos por ventas no sobrepasarán los 21 millones de euros.

c) $B(x)=V(x)-x=\frac{21x+12}{x+1}-x=\frac{21x+12-x^2-x}{x+1}=\frac{-x^2+20x+12}{x+1}$

Buscamos algún punto crítico en el intervalo [0, 5].

$$B(x)=\frac{-x^2+20x+12}{x+1} \Rightarrow B'(x)=\frac{(-2x+20)(x+1)-(-x^2+20x+12)}{(x+1)^2}$$

$$B'(x)=\frac{-2x^2-2x+\cancel{20x}+20+x^2-\cancel{20x}-12}{(x+1)^2}=\frac{-x^2-2x+8}{(x+1)^2}$$

$$B'(x)=0 \Rightarrow \frac{-x^2-2x+8}{(x+1)^2}=0 \Rightarrow -x^2-2x+8=0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(-1)8}}{-2}$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{36}}{-2}=\begin{cases} x=\frac{2+6}{-2}=-4 \notin [0,5] \\ x=\frac{2-6}{-2}=2 \in [0,5] \end{cases}$$

Como la función es continua en [0, 5], pues el denominador se anula en $x = -1$ que no pertenece al intervalo indicado, valoramos la función en el punto crítico $x = 2$ y en los extremos del intervalo para localizar el máximo relativo.

En $x = 0 \rightarrow B(0) = \dfrac{-0^2 + 0 + 12}{0+1} = 12$

En $x = 2 \rightarrow B(x) = \dfrac{-2^2 + 40 + 12}{2+1} = 16$ ¡Máximo!

En $x = 5 \rightarrow B(5) = \dfrac{-5^2 + 100 + 12}{5+1} = \dfrac{87}{6} = 14.5$

El máximo beneficio en el intervalo [0, 5] se obtiene en $x = 2$.

El máximo beneficio que se puede obtener con un gasto en publicidad entre 0 y 5 millones de euros es de 16 millones de euros y se obtiene con un gasto en publicidad de 2 millones de euros.

3. *(3,5 puntos)* En la Facultad de Economía de una universidad se pueden estudiar 3 grados: Grado en Contabilidad, Grado en Economía y Grado en Empresariales. En todos los grados hay un grupo de mañana y un grupo de tarde. La distribución de los estudiantes en cada uno de los grados, según grupo de mañana y de tarde es:

	Grado en Contabilidad	Grado en Economía	Grado en Empresariales
Mañana	395	278	538
Tarde	240	306	486

a) *(0,5 puntos)* Se elige al azar un estudiante de la Facultad. ¿Cuál es la probabilidad de que sea del grupo de tarde del Grado en Contabilidad?

b) *(0,75 puntos)* Se elige al azar un estudiante del grupo de tarde. ¿Cuál es la probabilidad de que sea del Grado en Contabilidad?

c) *(0,75 puntos)* Se elige al azar un estudiante de la Facultad. Sea *A* el suceso "Es del Grado en Contabilidad" y *B* el suceso "Es del grupo de tarde", ¿son independientes los sucesos *A* y *B*?

d) *(0,75 puntos)* Se eligen al azar dos estudiantes distintos de la Facultad. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos sean del grupo de tarde?

e) *(0,75 puntos)* Se eligen al azar dos estudiantes distintos de la Facultad. ¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo Grado?

La tabla de contingencia correspondiente a la distribución de los estudiantes es:

	Grado en Contabilidad	Grado en Economía	Grado en Empresariales	TOTAL
Mañana	395	278	538	**1211**
Tarde	240	306	486	**1032**
TOTAL	**635**	**584**	**1024**	**2243**

Llamamos M al suceso "Ser del grupo de mañana", T al suceso "Ser del grupo de tarde", C al suceso "Ser de Contabilidad", Ec al suceso "Ser del grupo de Economía" y Em al suceso "Ser del grupo de Empresariales".

a) $P(T\cap C)=\dfrac{240}{2243}\approx\boxed{0.107}$

b) $P(C/T)=\dfrac{240}{1032}\approx\boxed{0.2326}$

c) ¿$P(A\cap B)=P(A)P(B)$?

Lo comprobamos.

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B)=P(C\cap T)=\dfrac{240}{2243}\approx 0.107 \\ P(A)P(B)=P(C)P(T)=\dfrac{635}{2243}\cdot\dfrac{1032}{2243}\approx 0.13 \end{array}\right\}\Rightarrow P(A\cap B)=0.107\neq 0.13=P(A)P(B)$$

No son independientes los sucesos A y B.

d) Este experimento es como elegir un primer alumno y después un segundo alumno del resto de alumnos.

Nos piden calcular la probabilidad del suceso $T_1 \cap T_2$.

$$P(T_1 \cap T_2) = P(T_1)P(T_2/T_1) = \frac{1032}{2243} \cdot \frac{1031}{2242} \approx \boxed{0.2116}$$

e) Para que sean del mismo grado hay tres formas distintas: ser del grado de economía o de contabilidad o de empresariales.
Nos piden la probabilidad de que ocurra alguno de estos sucesos que es la suma de la probabilidad de cada uno de ellos.

$$P(\text{Los dos alumnos son del mismo grado}) =$$

$$= P(C_1 \cap C_2) + P(Em_1 \cap Em_2) + P(Ec_1 \cap Ec_2) =$$

$$= \frac{635}{2243} \cdot \frac{634}{2242} + \frac{584}{2243} \cdot \frac{583}{2242} + \frac{1024}{2243} \cdot \frac{1023}{2242} \approx \boxed{0.3561}$$

OPCIÓN B

1. (*3,25 puntos*) Una asociación está organizando un viaje a un parque temático para sus socios. Para comprar las entradas, la asociación ha llegado a un acuerdo con la dirección del parque, de forma que puede comprar dos tipos de entradas, "Grupal-A" y "Grupal-B" con las siguientes características:

• Cada entrada de tipo "Grupal-A" permite entrar al parque a 2 adultos y 3 niños, y cuesta 85 euros.

• Cada entrada de tipo "Grupal-B" permite entrar al parque a 4 adultos y 12 niños, y cuesta 230 euros.

• Deben comprarse, al menos, 4 entradas de tipo "Grupal-A y 2 entradas de tipo "Grupal-B".

La asociación quiere que entren al parque, al menos, 40 adultos y 96 niños. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar cuántas entradas de cada tipo "Grupal-A" y "Grupal-B" debe comprar para minimizar el coste total. ¿Cuál es el valor de ese coste mínimo?

Se trata de un problema de Programación Lineal.
Organicemos los datos en una tabla:

	Adultos	Niños	Coste
Grupal A (x)	2x	3x	85x
Grupal B (y)	4y	12y	230y
	$2x+4y$	$3x+12y$	$85x+230y$

La función objetivo es el coste que deseamos minimizar: $C(x,y)=85x+230y$

Las restricciones son:

"*Deben comprarse, al menos, 4 entradas de tipo "Grupal-A y 2 entradas de tipo "Grupal-B*"" → $x\geq 4;\ \ y\geq 2$

"*La asociación quiere que entren al parque, al menos, 40 adultos y 96 niños*" →
$2x+4y\geq 40;\ \ 3x+12y\geq 96$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x\geq 4;\ \ y\geq 2 \\ 2x+4y\geq 40 \\ 3x+12y\geq 96 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x\geq 4;\ \ y\geq 2 \\ x+2y\geq 20 \\ x+4y\geq 32 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x\geq 4;\ \ y\geq 2 \\ 2y\geq 20-x \\ 4y\geq 32-x \end{array}\right\}$$

Representamos las rectas que delimitan la región factible.

$x=4$

$x=4$	y
4	2
4	8

$y=2$

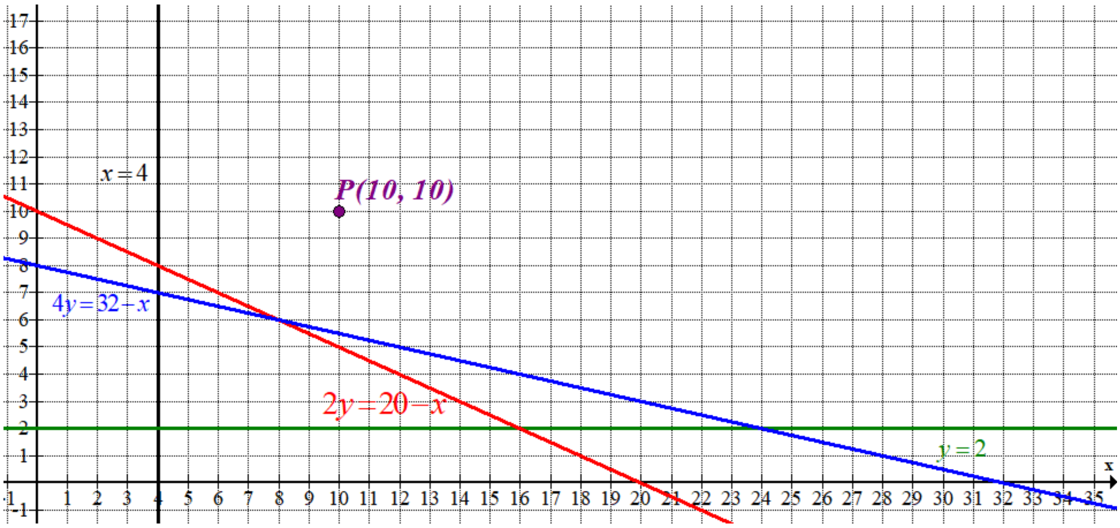
x	$y=2$
4	2
24	2

$2y=20-x$

x	$y=\frac{20-x}{2}$
4	8
8	6

$4y=32-x$

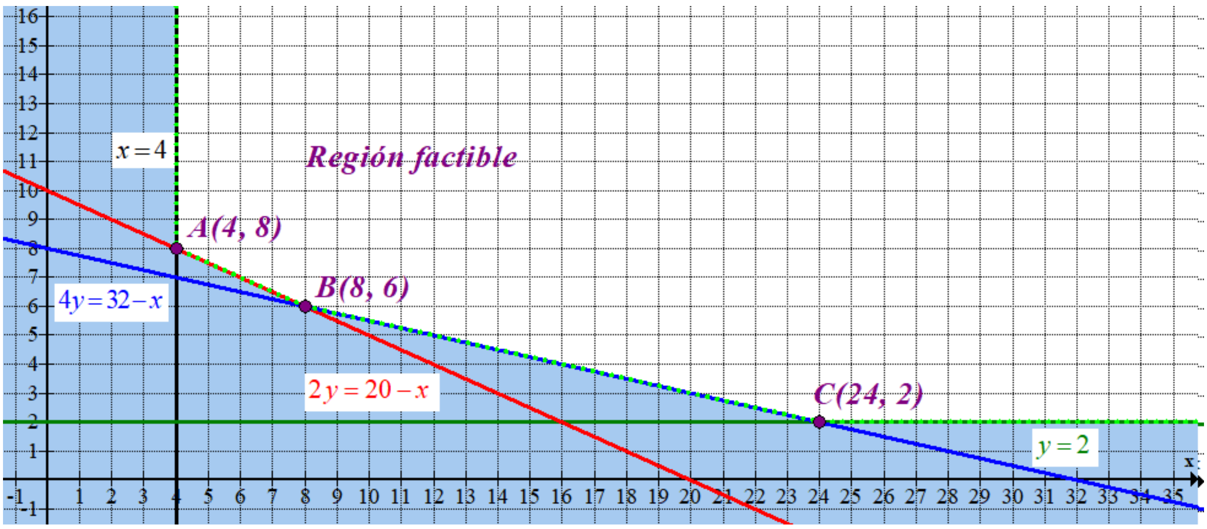
x	$y=\frac{32-x}{4}$
24	2
8	6



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{r} x \geq 4;\ \ y \geq 2 \\ 2y \geq 20 - x \\ 4y \geq 32 - x \end{array}\right\}$ la región factible es la región del plano que está a la derecha de la recta vertical negra y por encima de las rectas verde, azul y roja. Comprobamos que el punto P(10, 10) cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 10 \geq 4;\ \ 10 \geq 2 \\ 20 \geq 20 - 10 \\ 40 \geq 32 - 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{¡Se cumplen todas!}$$

La región factible es la región del plano que dejamos de color blanco en el siguiente dibujo.



Obtenemos las coordenadas de los vértices.

$$A \to \left.\begin{array}{l} x=4 \\ 2y=20-x \end{array}\right\} \Rightarrow 2y=20-4 \Rightarrow 2y=16 \Rightarrow y=8 \to A(4,8)$$

$$B \to \left.\begin{array}{l} 4y=32-x \\ 2y=20-x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=32-4y \\ 2y=20-x \end{array}\right\} \Rightarrow 2y=20-32+4y \Rightarrow 12=2y \Rightarrow y=6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=32-24=8 \to B(8,6)$$

$$C \to \left.\begin{array}{l} 4y=32-x \\ y=2 \end{array}\right\} \Rightarrow 8=32-x \Rightarrow x=32-8=24 \to C(24,2)$$

Valoramos la función Coste $C(x,y)=85x+230y$ en cada uno de los vértices en busca del valor mínimo.

A(4, 8) → $C(4,8)=340+1840=2180$

B(8, 6) → $C(8,6)=680+1380=$ 2060 ¡Mínimo!

C(24, 2) → $C(24,2)=85\cdot 24+230\cdot 2=2500$

El coste mínimo es de 2060 € y se consigue comprando 8 entradas del tipo Grupal-A y 6 entradas del tipo Grupal-B.

2. *(3,25 puntos)* Dada la función, definida para $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} ax + 2 & si \quad x < -1 \\ 18 - 4x + x^2 & si \quad -1 \le x < 3 \\ x^3 - 9x^2 + 15x + 20 & si \quad x \ge 3 \end{cases}$$

a) *(0,75 puntos)* Calcular a sabiendo que f es continua en $x = -1$.
b) *(1,5 puntos)* Calcular el máximo valor que toma la función f para $x \in [4,8]$.
c) *(1 punto)* Calcular:

$$\int_1^2 f(x)dx$$

a) Para que *f(x)* sea continua en *x = –1* debe cumplirse:

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = a(-1) + 2 = 2 - a \\ \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} ax + 2 = 2 - a \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} 18 - 4x + x^2 = 18 - 4(-1) + (-1)^2 = 23 \\ f(-1) = \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow 23 = 2 - a \Rightarrow \boxed{a = -21}$$

b) En el intervalo [4, 8] la función es $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 20$. Utilizamos la derivada para localizar sus valores críticos.

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 20 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 18x + 15$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 18x + 15 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 20}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \begin{cases} \dfrac{6+4}{2} = 5 \\ \dfrac{6-4}{2} = 1 \notin [4,8] \end{cases}$$

La función es polinómica y por lo tanto es continua y para hallar su máximo valoramos la función en los extremos del intervalo y en *x = 5* que es el valor crítico.

En *x = 4* la función vale $f(4) = 4^3 - 9 \cdot 4^2 + 15 \cdot 4 + 20 = 0$
En *x = 5* la función vale $f(5) = 5^3 - 9 \cdot 5^2 + 15 \cdot 5 + 20 = -5$
En *x = 8* la función vale $f(8) = 8^3 - 9 \cdot 8^2 + 15 \cdot 8 + 20 = 76$

El máximo valor es 76 y lo alcanza en *x = 8.*

c) En el intervalo [1, 2] la función es $f(x) = 18 - 4x + x^2$.

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 18 - 4x + x^2 dx = \left[18x - 2x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_1^2 =$$

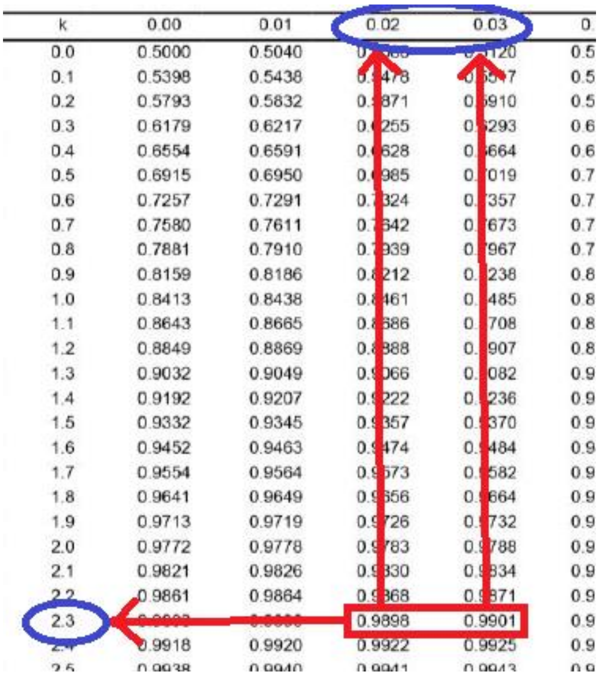
$$= \left[18 \cdot 2 - 2 \cdot 2^2 + \frac{2^3}{3}\right] - \left[18 \cdot 1 - 2 \cdot 1^2 + \frac{1^3}{3}\right] = 36 - 8 + \frac{8}{3} - 18 + 2 - \frac{1}{3} = 12 + \frac{7}{3} = \boxed{\frac{43}{3}}$$

3. (*3,5 puntos*)
a) *(2,75 puntos)* La duración de las bombillas de un fabricante es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica 75 horas.
a1) *(1,75 puntos)* Queremos construir un intervalo de confianza al 98% para la media de la duración de las bombillas del fabricante, de forma que el error no sea mayor de 15 horas. ¿Qué tamaño de la muestra debemos tomar?
a2) *(1 punto)* Decidimos tomar un tamaño de la muestra igual a 150, comprobamos la duración de cada bombilla y calculamos su promedio, que resulta ser 1053 horas. Calcular el intervalo de confianza al 98% para la media de la duración de las bombillas del fabricante.
b) *(0,75 puntos)* Sean A y B sucesos tales que $P(A) = 0{,}6$, $P(B/A) = 0{,}9$ y $P(B) = 0{,}8$. Calcular $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$ y $P(A/B)$.

a) X = Duración de las bombillas de un fabricante. X = N(μ, 75)

a1) Obtengamos el valor crítico correspondiente al nivel de confianza del 98%:

$$1 - \alpha = 0.98 \rightarrow \alpha = 0.02 \rightarrow \alpha/2 = 0.01 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.99 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.325}$$



k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.
0.0	0.5000	0.5040	[illegible]	[illegible]120	0.5
0.1	0.5398	0.5438	0.[illegible]478	0.[illegible]	0.5
0.2	0.5793	0.5832	0.[illegible]871	0.[illegible]910	0.5
0.3	0.6179	0.6217	0.[illegible]255	0.[illegible]293	0.6
0.4	0.6554	0.6591	0.[illegible]628	0.[illegible]664	0.6
0.5	0.6915	0.6950	0.[illegible]985	0.[illegible]019	0.7
0.6	0.7257	0.7291	0.[illegible]324	0.[illegible]357	0.7
0.7	0.7580	0.7611	0.[illegible]642	0.[illegible]673	0.7
0.8	0.7881	0.7910	0.[illegible]939	0.[illegible]967	0.7
0.9	0.8159	0.8186	0.[illegible]212	0.[illegible]238	0.8
1.0	0.8413	0.8438	0.[illegible]461	0.[illegible]485	0.8
1.1	0.8643	0.8665	0.[illegible]686	0.[illegible]708	0.8
1.2	0.8849	0.8869	0.[illegible]888	0.[illegible]907	0.8
1.3	0.9032	0.9049	0.[illegible]066	0.[illegible]082	0.9
1.4	0.9192	0.9207	0.[illegible]222	0.[illegible]236	0.9
1.5	0.9332	0.9345	0.[illegible]357	0.[illegible]370	0.9
1.6	0.9452	0.9463	0.[illegible]474	0.[illegible]484	0.9
1.7	0.9554	0.9564	0.[illegible]573	0.[illegible]582	0.9
1.8	0.9641	0.9649	0.[illegible]656	0.[illegible]664	0.9
1.9	0.9713	0.9719	0.[illegible]726	0.[illegible]732	0.9
2.0	0.9772	0.9778	0.[illegible]783	0.[illegible]788	0.9
2.1	0.9821	0.9826	0.[illegible]830	0.[illegible]834	0.9
2.2	0.9861	0.9864	0.[illegible]868	0.[illegible]871	0.9
2.3	[illegible]	[illegible]	0.9898	0.9901	0.9
[illegible]	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9

El error máximo admisible o cota de error debe ser menor de 15 horas:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.325 \cdot \frac{75}{\sqrt{n}} = 15 \Rightarrow 2.325 \cdot 75 = 15\sqrt{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2.325 \cdot 75}{15} \Rightarrow n = \left(\frac{2.325 \cdot 75}{15}\right)^2 = 135.14$$

Como el tamaño debe ser entero y mayor del obtenido la muestra debe ser de, al menos, 136 bombillas para obtener como máximo un error en la media de 15 horas.

a2) Ahora, tenemos una muestra de n = 150 bombillas y con media $\bar{x} = 1053$ horas.

El valor crítico correspondiente al nivel de confianza del 98% lo hemos obtenido en el apartado anterior y es $z_{\alpha/2}$ **= 2.325.**

El error del intervalo de confianza es: $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.325 \cdot \frac{75}{\sqrt{150}} = 14.238$

El intervalo de confianza para la media de la población, centrado en la media muestral será:

$$\left(\bar{x} - E,\ \bar{x} + E\right) = (1053 - 14.238,\ 1053 + 14.238) = (1038.762,\ 1067.238)$$

b) Utilizamos las distintas fórmulas de probabilidad.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = 0.6 \cdot 0.9 = \boxed{0.54}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.8 - 0.54 = \boxed{0.66}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.54}{0.8} = \boxed{0.675}$$