Universidad Zaragoza 1542

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA DE JUNIO DE 2018
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS. II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3,25 puntos)* Una empresa de carpintería tiene dos fábricas A y B en las que produce sillas, mesas y taburetes, y tiene que decidir el número de horas de trabajo en cada una de las dos fábricas para la semana próxima. Por cada hora de trabajo de la fábrica A, se producen 1 silla, 2 mesas y 4 taburetes, por cada hora de trabajo de la fábrica B se producen 4 sillas, 3 mesas y 2 taburetes. Durante la semana próxima la empresa tiene que producir, al menos, 80 sillas, 120 mesas y 96 taburetes. El coste por cada hora de trabajo de la fábrica A es de 1500 euros, mientras que el coste por cada hora de trabajo de la fábrica B es de 1000 euros. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar el número de horas que tiene que trabajar cada una de las fábricas para minimizar el coste. ¿Cuál es el valor de ese coste mínimo?

.

2. (*3,25 puntos*) Dada la función:

$$f(x)=\frac{x^2-2x+1}{2x+3}$$

Calcular:

a) (*0,25 puntos*) Dominio de *f*.

b) *(0,75 puntos)* ¿Para qué valores de x es la función positiva?

c) *(1 punto)* Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

d) *(1,25 puntos)* Sus máximos y mínimos relativos, si existen.

.

3. *(3,5 puntos)* Un concesionario se dedica a la venta de tres modelos de coches: A, B y C. En el concesionario trabajan dos vendedores: María y Pedro. El mes pasado María realizó el 55% de las ventas y Pedro el 45% restante. Además, de las ventas de María, un 60% fueron del modelo A, un 30% del modelo B y un 10% del modelo C. De las ventas de Pedro, un 50% fueron del modelo A, un 20% del modelo B y un 30% del modelo C.

a) *(0,75 puntos)* Elegimos al azar una de las ventas realizadas el mes pasado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un coche del modelo B vendido por María?

b) *(1 punto)* Elegimos al azar una de las ventas de mes pasado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea del modelo B?

c) *(1 punto)* Elegimos al azar una de las ventas de modelo B del mes pasado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una venta de María?

d) *(0,75 puntos)* Elegimos al azar (con reemplazamiento) dos ventas del mes pasado. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas sea una venta de María?

OPCIÓN B

1. (*3,25 puntos*) Discutir, según los valores de a, el sistema:

$$\begin{aligned} 2x + ay + az &= 4 \\ -x + ay + z &= a \\ x + y + az &= 3 \end{aligned}$$

Resolverlo para $a = -3$.

2. *(3,25 puntos)* Una empresa va a lanzar al mercado un nuevo juguete para la campaña de Navidad. Tiene que decidir el precio de venta al público del juguete, que estará entre 1 y 10 euros. Ha realizado un estudio y sabe que el beneficio B que obtendrá en la campaña dependerá del precio de venta que le ponga al juguete. Así, si le pone un precio de venta x (en euros), el beneficio que obtendrá será de

$$B(x) = \frac{9}{x} - \frac{18}{x^2} - 1$$

donde B está expresado en millones de euros.

a) *(0,75 puntos)* ¿Para qué valores de $x \in [1,10]$ el beneficio es positivo?

b) *(1,5 puntos)* ¿Qué precio de venta $x \in [1,10]$ tiene que poner al juguete para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el valor de ese beneficio máximo?

c) *(1 punto)* Calcular

$$\int_1^{10} B(x)dx$$

3. (*3,5 puntos*)

a) *(1,5 puntos)* Dados dos sucesos A *y* B tales que $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}8$ *y* $P(A/B) = 0{,}7$, calcular $P(A \cap B)$ y $P(A \cup B)$. ¿Son A y B sucesos independientes?

b) *(2 puntos)* Se sabe que el gasto semanal en ocio de los jóvenes de una ciudad tiene distribución normal de desviación típica 6 euros. Se toma una muestra de 10 jóvenes y se les pregunta el gasto en ocio de la última semana, con los siguientes resultados (expresados en euros):

24,5 11 16,5 18,5 21,5 25 6,5 12 10,5 9,5

Construya un intervalo de confianza de nivel 94% para la media del gasto semanal en ocio de los jóvenes de la ciudad.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \le k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. *(3,25 puntos)* Una empresa de carpintería tiene dos fábricas A y B en las que produce sillas, mesas y taburetes, y tiene que decidir el número de horas de trabajo en cada una de las dos fábricas para la semana próxima. Por cada hora de trabajo de la fábrica A, se producen 1 silla, 2 mesas y 4 taburetes, por cada hora de trabajo de la fábrica B se producen 4 sillas, 3 mesas y 2 taburetes. Durante la semana próxima la empresa tiene que producir, al menos, 80 sillas, 120 mesas y 96 taburetes. El coste por cada hora de trabajo de la fábrica A es de 1500 euros, mientras que el coste por cada hora de trabajo de la fábrica B es de 1000 euros. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar el número de horas que tiene que trabajar cada una de las fábricas para minimizar el coste. ¿Cuál es el valor de ese coste mínimo?

Se trata de un problema de programación lineal.
Llamamos "*x*" al número de horas que tiene que trabajar la fábrica A e "*y*" al número de horas de la fábrica B.
Organicemos los datos en una tabla:

	Nº sillas	Nº mesas	Nº taburetes	Coste
Nº horas de A (x)	x	2x	4x	1500x
Nº horas de B (y)	4y	3y	2y	1000y
	$x+4y$	$2x+3y$	$4x+2y$	$1500x+1000y$

La función objetivo es el coste que debe ser mínimo teniendo la expresión:

$$C(x,y)=1500x+1000y$$

El conjunto de restricciones a las que debe estar sometida la solución son:

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ y\geq 0$

"*Tiene que producir, al menos, 80 sillas, 120 mesas y 96 taburetes*" → $x+4y\geq 80$; $2x+3y\geq 120$; $4x+2y\geq 96$

Las reunimos en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} x\geq 0;\ y\geq 0 \\ x+4y\geq 80 \\ 2x+3y\geq 120 \\ 4x+2y\geq 96 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x\geq 0;\ y\geq 0 \\ x+4y\geq 80 \\ 2x+3y\geq 120 \\ 2x+y\geq 48 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x\geq 0;\ y\geq 0 \\ 4y\geq 80-x \\ 3y\geq 120-2x \\ y\geq 48-2x \end{array}\right\}$$

Obtengamos, gráficamente, la región factible (solución del conjunto de restricciones):

$x\geq 0;\ y\geq 0$ — *Primer cuadrante*

$4y=80-x$

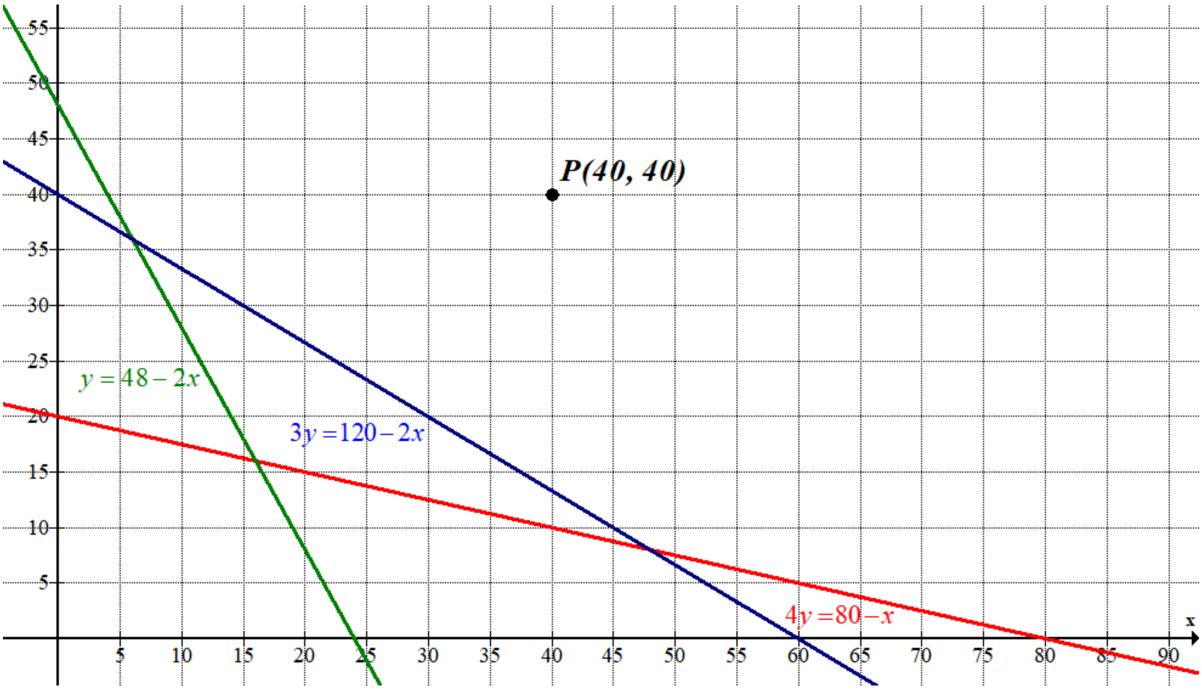
x	$y=\frac{80-x}{4}$
0	20
80	0

$3y=120-2x$

x	$y=\frac{120-2x}{3}$
0	40
45	10

$y=48-2x$

x	$y=48-2x$
0	48
24	0



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ 4y \geq 80 - x \\ 3y \geq 120 - 2x \\ y \geq 48 - 2x \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por encima de las rectas verde, azul y roja. Se puede comprobar que el punto P(40, 40) perteneciente a esta zona cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 40 \geq 0;\ 40 \geq 0 \\ 4 \cdot 40 \geq 80 - 40 \\ 3 \cdot 40 \geq 120 - 2 \cdot 40 \\ 40 \geq 48 - 2 \cdot 40 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{¡¡Todas se cumplen!!}$$

Dejamos de blanco la región factible en el siguiente dibujo y obtenemos las coordenadas de los vértices.

Las coordenadas del vértice A aparecen en la tabla de valores de la recta verde. Las coordenadas del punto D aparecen en la tabla de la recta roja.

Falta determinar las coordenadas de los vértices B y C que obtenemos resolviendo los sistemas de ecuaciones formados por las rectas correspondientes.

$$B \to \left.\begin{array}{l} y = 48 - 2x \\ 3y = 120 - 2x \end{array}\right\} \Rightarrow 3(48-2x) = 120 - 2x \Rightarrow 144 - 6x = 120 - 2x \Rightarrow 24 = 4x \Rightarrow x = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 48 - 12 = 36 \to \boxed{B(6,36)}$$

$$C \to \left.\begin{array}{l} 4y = 80 - x \\ 3y = 120 - 2x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 80 - 4y \\ 3y = 120 - 2x \end{array}\right\} \Rightarrow 3y = 120 - 2(80 - 4y) \Rightarrow 3y = 120 - 160 + 8y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 40 = 5y \Rightarrow y = 8 \Rightarrow x = 80 - 32 = 48 \to \boxed{C(48,8)}$$

Valoramos la función coste en cada uno de los vértices en busca del valor mínimo.

A(0, 48) → $C(0,48) = 48000$

B(6, 36) → $C(6,36) = 9000 + 36000 = 45000$ ¡¡Mínimo!!

C(48, 8) → $C(48,8) = 72000 + 8000 = 80000$

D(80, 0) → $C(80,0) = 120000$

El coste mínimo es de 45000 € y se obtiene con 6 horas de la fábrica A y 36 de la fábrica B.

2. (*3,25 puntos*) Dada la función:

$$f(x)=\frac{x^2-2x+1}{2x+3}$$

Calcular:
a) (*0,25 puntos*) Dominio de *f*.
b) *(0,75 puntos)* ¿Para qué valores de x es la función positiva?
c) *(1 punto)* Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
d) *(1,25 puntos)* Sus máximos y mínimos relativos, si existen.

a) Al tratarse de una función racional, su dominio son todos los números reales menos los valores de *x* que anulen al denominador.

$$f(x)=\frac{x^2-2x+1}{2x+3}\Rightarrow 2x+3=0\Rightarrow x=-\frac{3}{2}$$

$$\text{Dominio } f(x)=\mathbb{R}-\left\{-\frac{3}{2}\right\}$$

b) La función $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{2x+3}$ es positiva cuando son positivos numerador y denominador y también cuando ambos son negativos.

Pero $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{2x+3}=\frac{(x-1)^2}{2x+3}$ por lo que el numerador siempre es positivo o cero, entonces la función es positiva solo cuando es positivo el denominador.

$$2x+3>0\Rightarrow 2x>-3\Rightarrow x>-\frac{3}{2}$$

Como el numerador se anula para *x = 1*, entonces la función es positiva en $\left(-\frac{3}{2},1\right)\cup(1,+\infty)$

c) **Asíntota vertical**. $x=a$

$$\lim_{x\to -3/2} f(x)=\lim_{x\to -3/2}\frac{x^2-2x+1}{2x+3}=\frac{6.25}{0}=\infty$$

$x=-\frac{3}{2}$ es asíntota vertical de la función.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1}{2x+3}=\infty$$

No existe asíntota horizontal

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-2x+1}{2x+3}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1}{2x^2+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^2}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1}{2x+3}-\frac{x}{2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\left(x^2-2x+1\right)-x\left(2x+3\right)}{2\left(2x+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{2x^2}-4x+2-\cancel{2x^2}-3x}{4x+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{-7x+2}{4x+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{-7x}{4x}=\boxed{-\frac{7}{4}}$$

$y=\frac{1}{2}x-\frac{7}{4}$ es asíntota oblicua de la función.

d) Usamos la derivada de la función.

$$f(x)=\frac{x^2-2x+1}{2x+3}\Rightarrow f'(x)=\frac{(2x-2)(2x+3)-2\left(x^2-2x+1\right)}{(2x+3)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4x^2+6x-\cancel{4x}-6-2x^2+\cancel{4x}-2}{(2x+3)^2}=\frac{2x^2+6x-8}{(2x+3)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{2x^2+6x-8}{(2x+3)^2}=0\Rightarrow 2x^2+6x-8=0\Rightarrow x^2+3x-4=0\Rightarrow$$

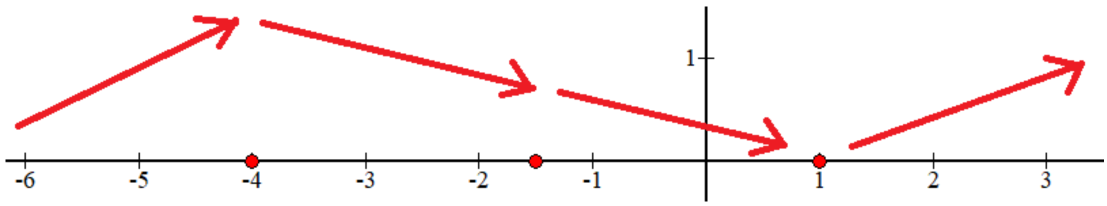
$$\Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4(-4)}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{2}=\begin{cases}\frac{-3+5}{2}=1=x\\ \frac{-3-5}{2}=-4=x\end{cases}$$

Existen dos puntos críticos: $x=-4$ y $x=1$.
Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores. Añadimos el valor $x=-\frac{3}{2}$ pues está excluido del dominio.

- En $(-\infty,-4)$ tomamos $x=-5$ y la derivada vale $f'(-5)=\frac{50-30-8}{(-10+3)^2}=\frac{12}{49}>0$. La función crece en $(-\infty,-4)$.
- En $\left(-4,-\frac{3}{2}\right)$ tomamos $x=-3$ y la derivada vale $f'(-3)=\frac{18-18-8}{(-6+3)^2}=\frac{-8}{9}<0$. La función decrece en $\left(-4,-\frac{3}{2}\right)$.
- En $\left(-\frac{3}{2},1\right)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale $f'(0)=\frac{-8}{(3)^2}<0$. La función decrece en $\left(-\frac{3}{2},1\right)$.

- En $(1,+\infty)$ tomamos x = 2 y la derivada vale $f\,'(2)=\frac{2\cdot 2^2+6\cdot 2-8}{(2\cdot 2+3)^2}=\frac{12}{49}>0$. La función crece en $(1,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función presenta un máximo relativo en $x=-4$, como $f(-4)=\frac{(-4)^2-2(-4)+1}{2(-4)+3}=-5$, el máximo relativo tiene coordenadas (–4, –5)

La función presenta un mínimo relativo en $x=1$, como $f(1)=\frac{1^2-2+1}{2+3}=0$ el mínimo relativo tiene coordenadas (1, 0).

3. *(3,5 puntos)* Un concesionario se dedica a la venta de tres modelos de coches: A, B y C. En el concesionario trabajan dos vendedores: María y Pedro. El mes pasado María realizó el 55% de las ventas y Pedro el 45% restante. Además, de las ventas de María, un 60% fueron del modelo A, un 30% del modelo B y un 10% del modelo C. De las ventas de Pedro, un 50% fueron del modelo A, un 20% del modelo B y un 30% del modelo C.

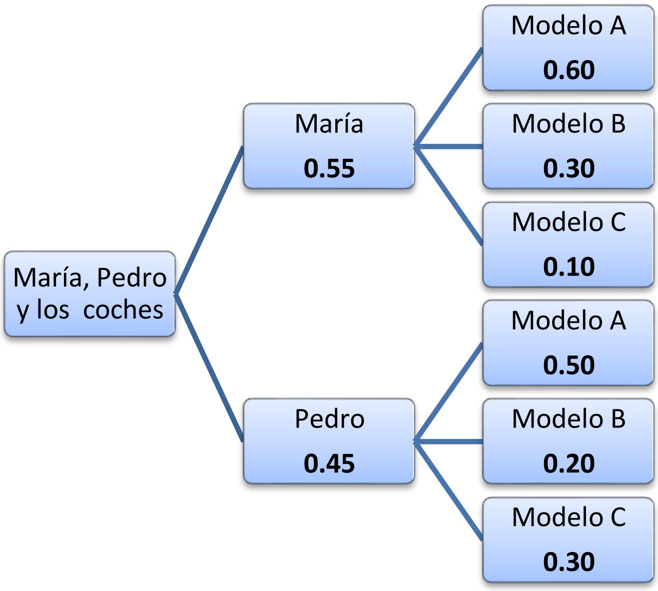
a) *(0,75 puntos)* Elegimos al azar una de las ventas realizadas el mes pasado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un coche del modelo B vendido por María?

b) *(1 punto)* Elegimos al azar una de las ventas de mes pasado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea del modelo B?

c) *(1 punto)* Elegimos al azar una de las ventas de modelo B del mes pasado. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una venta de María?

d) *(0,75 puntos)* Elegimos al azar (con reemplazamiento) dos ventas del mes pasado. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de ellas sea una venta de María?

Realizamos un diagrama de árbol.



Llamamos M al suceso "el coche es vendido por María", $\overline{M}$ al suceso "el coche es vendido por Pedro". A al suceso "El coche es del modelo A", B al suceso "El coche es del modelo B" y C al suceso "El coche es del modelo C".

a) $P(B \cap M) = P(M)P(B/M) = 0.55 \cdot 0.30 = \boxed{0.165}$

b) $P(B) = P(M)P(B/M) + P(\overline{M})P(B/\overline{M}) = 0.55 \cdot 0.3 + 0.45 \cdot 0.2 = \boxed{0.255}$

c) $P(M/B) = \dfrac{P(M \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(M)P(B/M)}{P(B)} = \dfrac{0.165}{0.255} = \boxed{0.6471}$

d) El suceso "al menos una de las dos ventas es de María" es el suceso contrario al suceso "ninguna de las dos ventas es de María". Como además hay reposición, los dos sucesos son independientes.

$$P(\overline{M_1} \cap \overline{M_2}) = P(\overline{M_1})P(\overline{M_2}) = 0.45 \cdot 0.45 = 0.2025$$

$$P(\text{Al menos una de las dos ventas es de María}) = 1 - P(\overline{M_1} \cap \overline{M_2}) = 1 - 0.2025 = \boxed{0.7975}$$

OPCIÓN B

1. (*3,25 puntos*) Discutir, según los valores de *a*, el sistema:

$$\begin{aligned} 2x+ay+az&=4\\ -x+ay+z&=a\\ x+y+az&=3 \end{aligned}$$

Resolverlo para $a=-3$.

La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 2 & a & a\\ -1 & a & 1\\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, y la ampliada es $A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & a & a & 4\\ -1 & a & 1 & a\\ 1 & 1 & a & 3 \end{array}\right)$.

Estudiamos el rango de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & a & a\\ -1 & a & 1\\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=2a^2+\cancel{a}-\cancel{a}-\cancel{a^2}+\cancel{a^2}-2=2a^2-2$$

$$|A|=0\Rightarrow 2a^2-2=0\Rightarrow a^2-1=0\Rightarrow a^2=1\Rightarrow a=\sqrt{1}=\pm1$$

Consideramos tres situaciones diferentes que estudiamos por separado.

CASO 1. $a\neq\pm1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. Al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado.

CASO 2. $a=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz de coeficientes queda $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. La columna 2ª y 3ª son iguales, por lo que considero el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª →

$\begin{vmatrix} 2 & 1\\ -1 & 1 \end{vmatrix}=2+1=3\neq0$. El rango de A es 2.

La matriz ampliada queda $A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4\\ -1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$. La columna 2ª y 3ª son iguales, por lo que considero el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 3ª →

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=6+1-4-4+3-2=0$. El rango de A/B no es 3 y tendrá rango 2 igual que la matriz A. Como este rango es menor que el número de incógnitas el sistema es compatible indeterminado.

CASO 3. $a=-1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Utilizamos Gauss para obtener una matriz triangular equivalente a la matriz ampliada y determinara con más facilidad el rango de A y de A/B y por tanto la compatibilidad del sistema.

$$A/B=\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&-1&4\\-1&-1&1&-1\\1&1&-1&3\end{array}\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc}\multicolumn{4}{c}{\text{Fila 1}^{\text{a}}+2\cdot\text{Fila 2}^{\text{a}}}\\2&-1&-1&4\\-2&-2&2&-2\\\hline 0&-3&1&2\rightarrow\text{Nueva Fila 2}^{\text{a}}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{cccc}\multicolumn{4}{c}{\text{Fila 1}^{\text{a}}-2\cdot\text{Fila 3}^{\text{a}}}\\2&-1&-1&4\\-2&-2&2&-6\\\hline 0&-3&1&-2\rightarrow\text{Nueva Fila 3}^{\text{a}}\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&-1&4\\0&-3&1&2\\0&-3&1&-2\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{cccc}\multicolumn{4}{c}{\text{Fila 2}^{\text{a}}-\text{Fila 3}^{\text{a}}}\\0&-3&1&2\\0&3&-1&2\\\hline 0&0&0&4\rightarrow\text{Nueva Fila 3}^{\text{a}}\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&-1&4\\0&-3&1&2\\0&0&{\color{red}0}&{\color{red}4}\end{array}\right)$$

El sistema equivalente queda $\begin{cases}2x-y-z=4\\-3y+z=2\\0=4\end{cases}$ y es incompatible.

Lo resolvemos para $a=-3$. El sistema es compatible determinado.

$$\begin{cases}2x-3y-3z=4\\-x-3y+z=-3\\x+y-3z=3\end{cases}$$

Lo resolvemos utilizando Cramer.

$$A=\begin{pmatrix}2&-3&-3\\-1&-3&1\\1&1&-3\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}4\\-3\\3\end{pmatrix}\qquad |A|=\begin{vmatrix}2&-3&-3\\-1&-3&1\\1&1&-3\end{vmatrix}=18-3+3-9+9-2=16$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}4&-3&-3\\-3&-3&1\\3&1&-3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&-3&-3\\-1&-3&1\\1&1&-3\end{vmatrix}}=\frac{36-9+9-27+27-4}{16}=2\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}2&4&-3\\-1&-3&1\\1&3&-3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&-3&-3\\-1&-3&1\\1&1&-3\end{vmatrix}}=\frac{18+4+9-9-12-6}{16}=\frac{1}{4}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}2&-3&4\\-1&-3&-3\\1&1&3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&-3&-3\\-1&-3&1\\1&1&-3\end{vmatrix}}=\frac{-18+9-4+12-9+6}{16}=\frac{-1}{4}$$

Para $a=-3$ la solución es $x=2;\ y=\frac{1}{4};\ z=\frac{-1}{4}$

2. *(3,25 puntos)* Una empresa va a lanzar al mercado un nuevo juguete para la campaña de Navidad. Tiene que decidir el precio de venta al público del juguete, que estará entre 1 y 10 euros. Ha realizado un estudio y sabe que el beneficio B que obtendrá en la campaña dependerá del precio de venta que le ponga al juguete. Así, si le pone un precio de venta x (en euros), el beneficio que obtendrá será de

$$B(x)=\frac{9}{x}-\frac{18}{x^2}-1$$

donde B está expresado en millones de euros.

a) *(0,75 puntos)* ¿Para qué valores de $x \in [1,10]$ el beneficio es positivo?

b) *(1,5 puntos)* ¿Qué precio de venta $x \in [1,10]$ tiene que poner al juguete para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el valor de ese beneficio máximo?

c) *(1 punto)* Calcular

$$\int_1^{10} B(x)dx$$

a) Averiguamos cuando se anula la función.

$$B(x)=\frac{9}{x}-\frac{18}{x^2}-1=\frac{9x-18-x^2}{x^2}=\frac{-x^2+9x-18}{x^2}$$

$$B(x)=0 \Rightarrow \frac{-x^2+9x-18}{x^2}=0 \Rightarrow -x^2+9x-18=0 \Rightarrow x=\frac{-9\pm\sqrt{9^2-4(-1)(-18)}}{-2}=$$

$$=\frac{-9\pm 3}{-2}=\begin{cases}\frac{-9+3}{-2}=3=x\\ \frac{-9-3}{-2}=6=x\end{cases}$$

La función es continua en el intervalo de estudio pues su único punto de discontinuidad está en $x = 0$. Como la función se anula en $x = 3$ y en $x = 6$, el signo de la función se alternará en los intervalos (1, 3), (3, 6) y (6, 10).

- En (1, 3) tomamos $x = 2$ y la función vale $B(2)=\frac{-2^2+18-18}{2^2}=-1<0$. La función es negativa en el intervalo (1, 3).
- En (3, 6) tomamos $x = 4$ y la función vale $B(4)=\frac{-4^2+36-18}{4^2}=\frac{2}{16}>0$. La función es positiva en el intervalo (3, 6).
- En (6, 10) tomamos $x = 8$ y la función vale $B(8)=\frac{-8^2+72-18}{8^2}=\frac{-10}{64}<0$. La función es negativa en el intervalo (6, 10).

El beneficio es positivo en el intervalo (3, 6), es decir, con un precio entre 3 y 6 €.

b) Estudiamos el signo de la derivada.

$$B(x)=\frac{-x^2+9x-18}{x^2} \Rightarrow B'(x)=\frac{(-2x+9)\cdot x^2-2x\left(-x^2+9x-18\right)}{\left(x^2\right)^2}$$

$$B'(x)=\frac{-\cancel{2x^3}+9x^2+\cancel{2x^3}-18x^2+36x}{x^4}=\frac{-9x^2+36x}{x^4}$$

$$B'(x)=0\Rightarrow\frac{-9x^2+36x}{x^4}=0\Rightarrow -9x^2+36x=0\Rightarrow -9x(x-4)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\notin[1,10]\\ o\\ x=4\end{cases}$$

Tenemos un punto crítico en *x = 4*. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- En (1, 4) tomamos *x = 2* y la derivada vale $B'(2)=\frac{-9\cdot 2^2+72}{2^4}=\frac{36}{16}>0$. La función crece en (1, 4)
- En (4, 10) tomamos *x = 5* y la derivada vale $B'(5)=\frac{-9\cdot 5^2+180}{5^4}=\frac{-45}{625}<0$. La función decrece en (4, 10)

La función presenta un máximo relativo en *x = 4*.
Dicho beneficio es de $B(4)=\frac{-4^2+36-18}{4^2}=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}=0.125$.

El beneficio es máximo con un precio de 4 € y dicho beneficio es de 125.000 €

c)

$$\int_1^{10}B(x)dx=\int_1^{10}\frac{9}{x}-\frac{18}{x^2}-1dx=\int_1^{10}\frac{9}{x}-18x^{-2}-1dx=\left[9\ln x-18\frac{x^{-1}}{-1}-x\right]_1^{10}=\left[9\ln x+\frac{18}{x}-x\right]_1^{10}=$$

$$=\left[9\ln 10+\frac{18}{10}-10\right]-\left[9\ln 1+\frac{18}{1}-1\right]=9\ln 10+1.8-10-18+1=\boxed{9\ln 10-25.2}$$

3. (*3,5 puntos*)
a) *(1,5 puntos)* Dados dos sucesos *A y B* tales que $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}8$ *y* $P(A/B) = 0{,}7$, calcular $P(A \cap B)$ y $P(A \cup B)$. ¿Son A y B sucesos independientes?
b) *(2 puntos)* Se sabe que el gasto semanal en ocio de los jóvenes de una ciudad tiene distribución normal de desviación típica 6 euros. Se toma una muestra de 10 jóvenes y se les pregunta el gasto en ocio de la última semana, con los siguientes resultados (expresados en euros):

24,5 11 16,5 18,5 21,5 25 6,5 12 10,5 9,5

Construya un intervalo de confianza de nivel 94% para la media del gasto semanal en ocio de los jóvenes de la ciudad.

a)

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow 0.7 = \frac{P(A \cap B)}{0.8} \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = 0.7 \cdot 0.8 = 0.56}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.8 - 0.56 \Rightarrow \boxed{P(A \cup B) = 0.84}$$

Comprobamos si los sucesos A y B son independientes viendo si se cumple $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(A) = 0.6 \\ P(B) = 0.8 \\ P(A \cap B) = 0.56 \end{array}\right\} \Rightarrow P(A) \cdot P(B) = 0.6 \cdot 0.8 = 0.48 \neq 0.56 = P(A \cap B)$$

Los sucesos A y B no son independientes.

b) **X =** Gasto semanal en ocio de un joven. X = N(μ, 6).

La muestra es de tamaño 10 → *n = 10*. Calculamos la media muestral.

$$\bar{x} = \frac{24{,}5 + 11 + 16{,}5 + 18{,}5 + 21{,}5 + 25 + 6{,}5 + 12 + 10{,}5 + 9{,}5}{10} = 15.55\ €$$

Obtengamos el valor crítico correspondiente al nivel de confianza del 94%:

$1 - \alpha = 0.94 \rightarrow \alpha = 0.06 \rightarrow \alpha/2 = 0.03 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.97 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.88}$

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.0
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	[illegible]	0.5
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	[illegible]	0.5
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	[illegible]	0.6
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	[illegible]	0.6
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	[illegible]	0.6
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	[illegible]	0.7
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	[illegible]	0.7
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	[illegible]	0.7
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	[illegible]	0.8
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	[illegible]	0.8
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	[illegible]	0.8
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	[illegible]	0.8
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	[illegible]	0.9
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	[illegible]	0.9
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	[illegible]	0.9
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	[illegible]	0.9
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	[illegible]	0.9
[illegible]	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	[illegible]	0.9
1.8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	$\boxed{0.9699}$	0.9
[illegible]	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9

Determinamos el valor del error del intervalo de confianza con la fórmula $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.88 \cdot \frac{6}{\sqrt{10}} = 3.567$$

El intervalo de confianza será:

$$\left(\overline{x} - Error, \overline{x} + Error\right) = \left(15.55 - 3.567,\ 15.55 + 3.567\right) = \left(11.983,\ 19.117\right)$$

Es decir, con un nivel de confianza del 94%, la media del gasto semanal en ocio de los jóvenes de la ciudad está entre 11,98 € y 19,12 €.