Universidad Zaragoza 1542

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE DE 2018
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS. II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3,25 puntos)* Un artesano de vidrio va a fabricar figuras de dos tipos durante la próxima semana: cisne y elefante. Cada figura de cisne necesita 0,1 kg de vidrio y 30 minutos de trabajo, mientras que cada figura de elefante necesita 0,2 kg de vidrio y 20 minutos de trabajo. El artesano puede utilizar como máximo 16 kg de vidrio y 40 horas de trabajo. Además, el número de figuras de cisne que fabrique ha de ser menor o igual que el doble de figuras de elefante. Por cada figura de cisne obtiene un beneficio de 10 euros y por cada figura de elefante obtiene un beneficio de 8 euros. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar el número de figuras de cada tipo que tiene que fabricar para obtener el máximo beneficio. ¿Cuál es el valor de ese beneficio máximo?

.

2. (*3,25 puntos*) Dada la función, definida para $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} ax+1 & si \quad x < -2 \\ \dfrac{x+b}{x^2+1} & si \quad -2 \le x < 0 \\ x^3 - 9x^2 + 24x + 4 & si \quad x \ge 0 \end{cases}$$

a) (*1 punto*) Calcular a y b sabiendo que f es continua en todos los puntos

b) *(1,5 puntos)* Calcular el mínimo valor que toma la función f para $x \in [3, 8]$.

c) *(0,75 puntos)* Calcular

$$\int_1^2 f(x)\,dx$$

.

3. *(3,5 puntos)* En una caseta de feria se puede jugar a lanzar balones a una canasta. El juego consiste en lanzar 2 balones; si se encesta al menos un lanzamiento, entonces se gana un premio. Luis va a jugar una partida: la probabilidad que tiene de encestar cada lanzamiento es de 0,3 y los lanzamientos son independientes.

a) (*0,75 puntos)* ¿Qué probabilidad tiene Luis de encestar los dos lanzamientos?

b) (*1 punto)* ¿Qué probabilidad tiene Luis de ganar el premio?

c) (*1 punto)* Si Luis ha ganado el premio, ¿cuál es la probabilidad de que haya fallado el primer lanzamiento?

d) (*0,75 puntos)* Sea *A* el suceso “Luis falla el primer lanzamiento” y *B* el suceso “Luis gana el premio”. ¿Son los sucesos *A* y *B* independientes?

OPCIÓN B

1. (*3,25 puntos*) Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} -8 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad D=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) *(1 punto)* Calcular $(AB)^2$.
b) *(1 punto)* Encontrar, si existe, una matriz X tal que $2A + 3X = 4C$.
c) *(1,25 puntos)* Calcular, si existe, la matriz inversa de D.

2. *(3,25 puntos)* Un programa de televisión emitido ayer duró 120 minutos. La cuota de pantalla que tuvo el programa, medida en porcentaje, fue variando a lo largo del tiempo según la función:

$$C(x)=\frac{1}{200}\left(-x^2+100x+7500\right)$$

donde $x \in [0, 120]$ es el tiempo (en minutos) transcurrido desde el inicio del programa y C es la cuota de pantalla, en porcentaje.

a) *(0,75 puntos)* Encontrar los valores de tiempo, si los hubo, en los que la cuota de pantalla fue igual a 18.
b) *(1,5 puntos)* ¿En qué instantes de tiempo se alcanzaron la mínima y máxima cuotas de pantalla del programa? ¿Cuáles fueron dichas cuotas?
c) *(1 punto)* Calcular:

$$\int_{10}^{20} C(x)dx$$

3. (*3,5 puntos*)

a) *(1 punto)* En un instituto hay 335 estudiantes de Bachillerato, 195 de los cuales están en primer curso y 140 están en segundo curso. Se eligen al azar dos estudiantes distintos de entre estos 335. ¿Cuál es la probabilidad de que estén en el mismo curso?

b) *(2,5 puntos)* En una encuesta sobre hábitos alimentarios en una ciudad se ha tomado una muestra de 300 individuos y se les ha preguntado si son vegetarianos. De los 300 individuos, 72 son vegetarianos y los 228 restantes no lo son. Calcular el intervalo de confianza al 94% para la proporción de personas de la ciudad que son vegetarianas.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. *(3,25 puntos)* Un artesano de vidrio va a fabricar figuras de dos tipos durante la próxima semana: cisne y elefante. Cada figura de cisne necesita 0,1 kg de vidrio y 30 minutos de trabajo, mientras que cada figura de elefante necesita 0,2 kg de vidrio y 20 minutos de trabajo. El artesano puede utilizar como máximo 16 kg de vidrio y 40 horas de trabajo. Además, el número de figuras de cisne que fabrique ha de ser menor o igual que el doble de figuras de elefante. Por cada figura de cisne obtiene un beneficio de 10 euros y por cada figura de elefante obtiene un beneficio de 8 euros. Plantear y resolver un problema de programación lineal para determinar el número de figuras de cada tipo que tiene que fabricar para obtener el máximo beneficio. ¿Cuál es el valor de ese beneficio máximo?

Se trata de un problema de programación lineal. Llamamos “x” al número de figuras de cisne e “y” al número de figuras de elefantes.

Organizamos los datos en una tabla:

	Kg de vidrio	**Horas de trabajo**	**Beneficio**
Nº cisnes (x)	0.1x	x/2	10x
Nº elefantes (y)	0.2y	y/3	8y
	$0.1x+0.2y$	$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}$	$10x+8y$

La función objetivo es el beneficio que deseamos maximizar y tiene la expresión:

$$B(x,y)=10x+8y$$

Las restricciones son:

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ \ y\geq 0$

“*El artesano puede utilizar como máximo 16 kg de vidrio*” → $0.1x+0.2y\leq 16$

“*El artesano puede utilizar como máximo 40 horas de trabajo*” → $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\leq 40$

“*El número de figuras de cisne que fabrique ha de ser menor o igual que el doble de figuras de elefante*” → $x\leq 2y$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} x\geq 0;\ \ y\geq 0 \\ 0.1x+0.2y\leq 16 \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}\leq 40 \\ x\leq 2y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x\geq 0;\ \ y\geq 0 \\ x+2y\leq 160 \\ 3x+2y\leq 240 \\ x\leq 2y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x\geq 0;\ \ y\geq 0 \\ 2y\leq 160-x \\ 2y\leq 240-3x \\ 2y\geq x \end{array}\right\}$$

Empezamos dibujando las rectas que delimitan la región factible.

$x\geq 0;\ \ y\geq 0$ — *Primer cuadrante*

$2y=160-x$

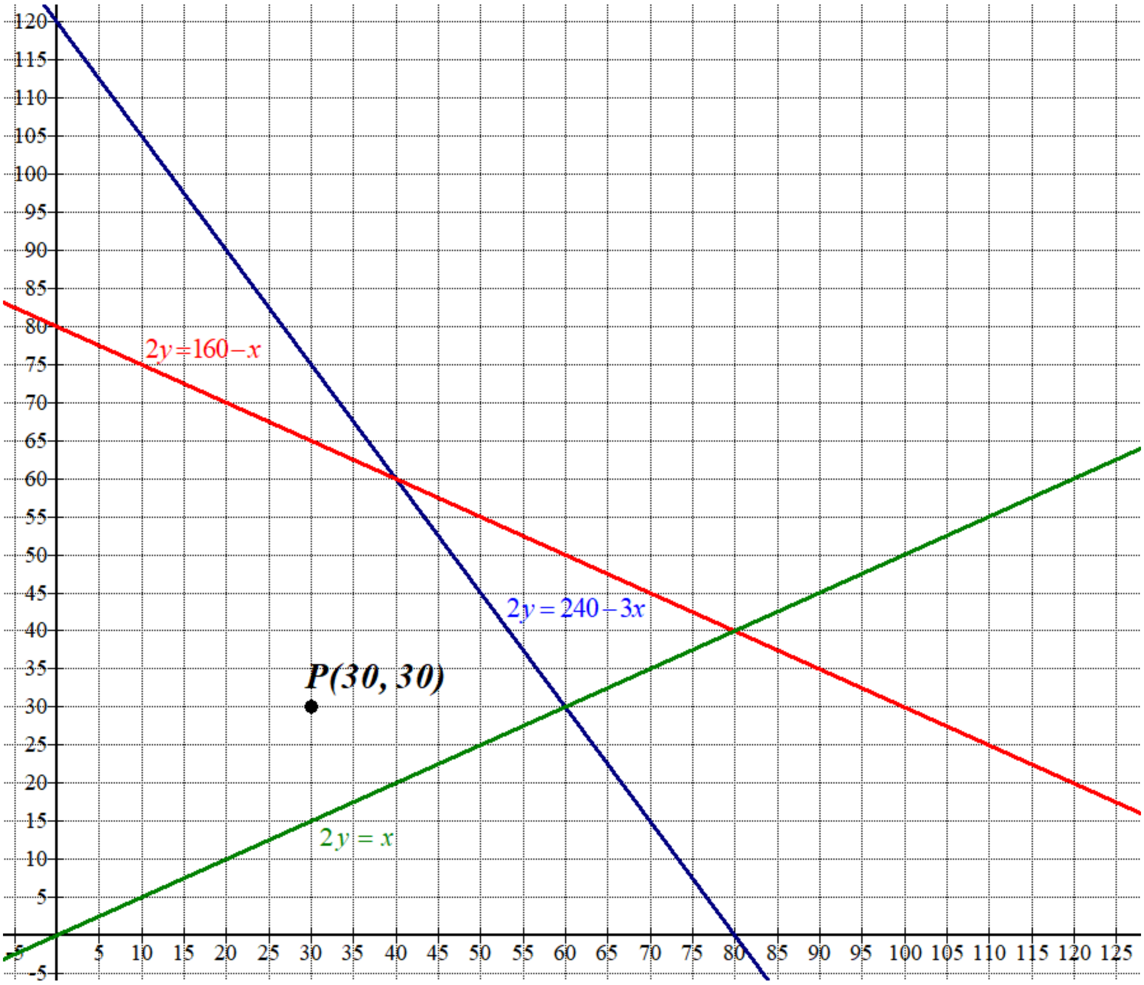
x	$y=\frac{160-x}{2}$
0	80
40	60

$2y=240-3x$

x	$y=\frac{240-3x}{2}$
40	60
60	30

$2y=x$

x	$y=\frac{x}{2}$
0	0
60	30

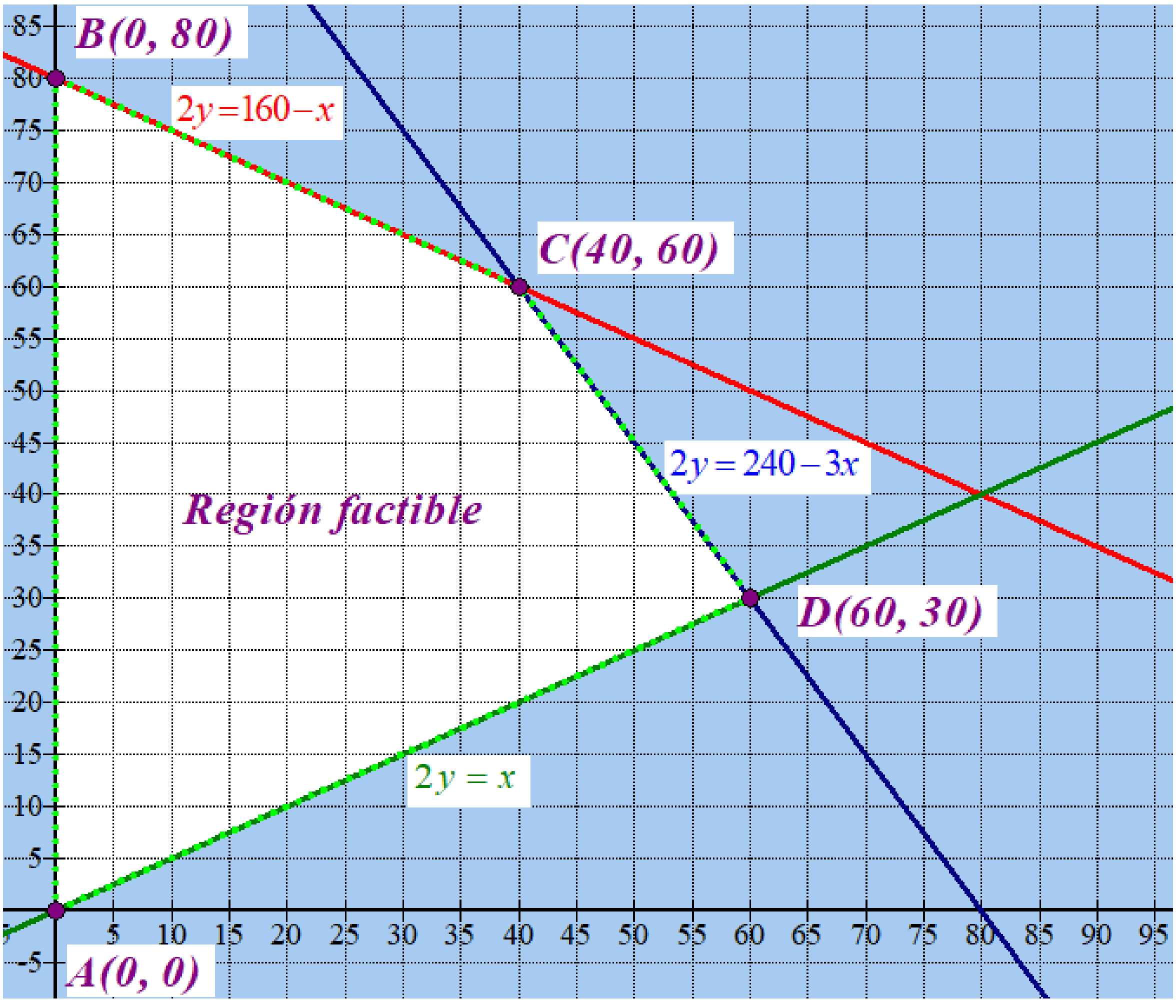


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x \geq 0;\ \ y \geq 0 \\ 2y \leq 160 - x \\ 2y \leq 240 - 3x \\ 2y \geq x \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja y azul y por encima de la recta verde.

De todas formas, comprobamos que el punto P(30, 30) cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 30 \geq 0;\ \ 30 \geq 0 \\ 60 \leq 160 - 30 \\ 60 \leq 240 - 90 \\ 60 \geq 30 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{¡¡Se cumplen todas!!}$$

Dejamos en blanco dicha región en el siguiente dibujo



Las coordenadas de los vértices se han podido obtener durante el dibujo de las rectas.
Valoramos la función beneficio $B(x,y)=10x+8y$ en cada uno de los vértices en busca de un valor máximo.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$

B(0, 80) → $B(0,80)=640$

C(40, 60) → $B(40,60)=400+480=880$ ¡¡Máximo!!

D(60, 30) → $B(60,30)=600+240=840$

El beneficio máximo es de 880 € y se obtiene con la fabricación de 40 cisnes y 60 elefantes.

2. (*3,25 puntos*) Dada la función, definida para $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} ax+1 & si \;\; x < -2 \\ \dfrac{x+b}{x^2+1} & si \;\; -2 \le x < 0 \\ x^3 - 9x^2 + 24x + 4 & si \;\; x \ge 0 \end{cases}$$

a) (*1 punto*) Calcular a y b sabiendo que f es continua en todos los puntos
b) *(1,5 puntos)* Calcular el mínimo valor que toma la función f para $x \in [3, 8]$.
c) *(0,75 puntos)* Calcular

$$\int_1^2 f(x)\,dx$$

a) Las tres funciones que definen *f(x)* son continuas. Debemos exigir que también lo sea en $x=-2$ y $x=0$. Para ello, debe ser:

$$\left. \begin{array}{l} f(-2) = \dfrac{-2+b}{(-2)^2+1} = \dfrac{b-2}{5} \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{x+b}{x^2+1} = \dfrac{b-2}{5} \\ \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} ax+1 = -2a+1 \\ \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = f(-2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{b-2}{5} = -2a+1 \Rightarrow b-2 = -10a+5 \Rightarrow \boxed{b = -10a+7}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0^3 - 9\cdot 0^2 + 24\cdot 0 + 4 = 4 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^3 - 9x^2 + 24x + 4 = 4 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x+b}{x^2+1} = \dfrac{b}{1} = b \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(-2) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{b = 4}$$

Sustituimos el valor de “b” obtenido en la primera ecuación y tenemos:

$$4 = -10a + 7 \Rightarrow 10a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{10} = 0.3$$

Los valores buscados son *a = 0.3* y *b = 4.*

b) En el intervalo [3, 8] la función tiene la expresión $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 4$.
Estudiamos si tiene algún valor crítico en este intervalo.

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 4 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 18x + 24 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 32}}{2} = \begin{cases} \dfrac{6+2}{2} = 4 = x \\ \dfrac{6-2}{2} = 2 = x \end{cases}$$

El valor *x = 4* es un valor crítico que pertenece al intervalo [3, 8]. Valoramos la función en los extremos del intervalo y en *x = 4* y comprobamos donde se alcanza el valor mínimo.

$$\left.\begin{array}{l} f(3)=3^3-9\cdot 3^2+24\cdot 3+4=22 \\ f(4)=4^3-9\cdot 4^2+24\cdot 4+4=20 \text{ ¡Mínimo!} \\ f(8)=8^3-9\cdot 8^2+24\cdot 8+4=132 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ En } x=4 \text{ se alcanza el valor mínimo}$$

El mínimo valor que alcanza la función en el intervalo [3, 8] es 20.

c) En el intervalo [1, 2] la función tiene la expresión $f(x)=x^3-9x^2+24x+4$.

$$\int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2 x^3-9x^2+24x+4\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-3x^3+12x^2+4x\right]_1^2=$$

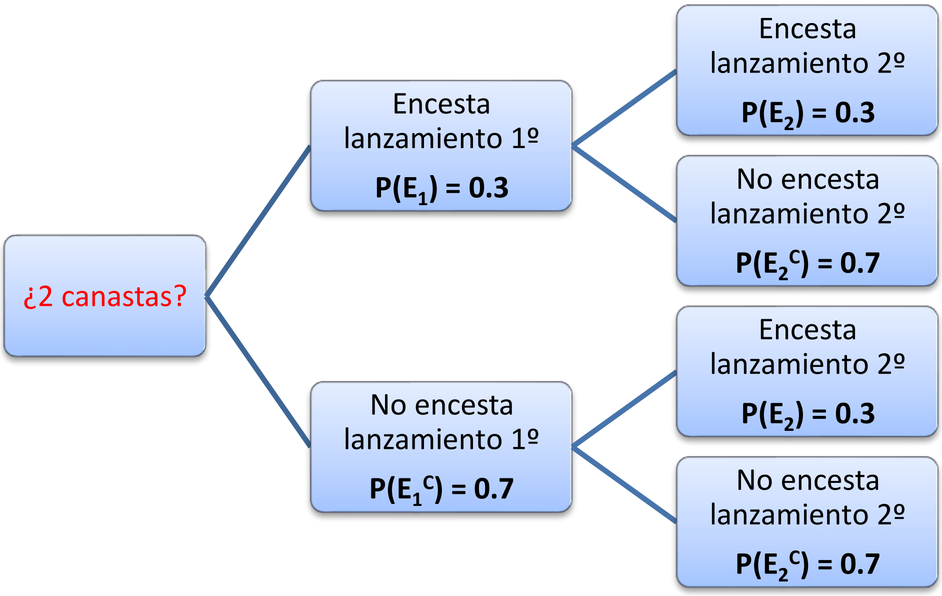
$$=\left[\frac{2^4}{4}-3\cdot 2^3+12\cdot 2^2+4\cdot 2\right]-\left[\frac{1^4}{4}-3\cdot 1^3+12\cdot 1^2+4\cdot 1\right]=$$

$$=4-24+48+8-\frac{1}{4}+3-12-4=23-\frac{1}{4}=\boxed{\frac{91}{4}}$$

3. *(3,5 puntos)* En una caseta de feria se puede jugar a lanzar balones a una canasta. El juego consiste en lanzar 2 balones; si se encesta al menos un lanzamiento, entonces se gana un premio. Luis va a jugar una partida: la probabilidad que tiene de encestar cada lanzamiento es de 0,3 y los lanzamientos son independientes.
a) *(0,75 puntos)* ¿Qué probabilidad tiene Luis de encestar los dos lanzamientos?
b) *(1 punto)* ¿Qué probabilidad tiene Luis de ganar el premio?
c) *(1 punto)* Si Luis ha ganado el premio, ¿cuál es la probabilidad de que haya fallado el primer lanzamiento?
d) *(0,75 puntos)* Sea *A* el suceso "Luis falla el primer lanzamiento" y *B* el suceso "Luis gana el premio". ¿Son los sucesos *A* y *B* independientes?

Llamamos E_1 al suceso "encesta el primer lanzamiento" y E_2 al suceso "encesta el segundo lanzamiento". B al suceso "Luis gana el premio".

El diagrama en árbol de la situación es:



a) $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2) = 0.3 \cdot 0.3 = \boxed{0.09}$

b) Como puede ganar de distintas maneras y de perderlo solo de una forma lo calculamos con el suceso opuesto.

Calculamos la probabilidad de perder. $P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2}) = P(\overline{E_1})P(\overline{E_2}) = 0.7 \cdot 0.7 = 0.49$

Calculamos la probabilidad de ganar. $P(B) = 1 - P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2}) = 1 - 0.49 = \boxed{0.51}$

c) $P(\overline{E_1}/B) = \dfrac{P(\overline{E_1} \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(\overline{E_1})P(B/\overline{E_1})}{P(B)} = \dfrac{P(\overline{E_1})P(E_2/\overline{E_1})}{P(B)} = \dfrac{0.7 \cdot 0.3}{0.51} = \boxed{\dfrac{7}{17} \approx 0.41}$

d) He llamado $\overline{E_1}$ al suceso A. Por lógica los sucesos A y B no son independientes. Lo comprobamos con cálculos.

$$\left. \begin{array}{l} P(\overline{E_1} \cap B) = P(E_2) = 0.3 \\ P(\overline{E_1})P(B) = 0.7 \cdot 0.51 = 0.357 \end{array} \right\} \Rightarrow P(\overline{E_1} \cap B) = 0.3 \neq 0.357 = P(\overline{E_1})P(B)$$

Los sucesos A y B no son independientes.

OPCIÓN B

1. (*3,25 puntos*) Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}-8 & -3 & 1\\ 0 & 4 & 2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix},\qquad D=\begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\ 2 & 1 & 0\\ -6 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

a) *(1 punto)* Calcular $(AB)^2$.
b) *(1 punto)* Encontrar, si existe, una matriz X tal que $2A + 3X = 4C$.
c) *(1,25 puntos)* Calcular, si existe, la matriz inversa de D.

a)

$$AB=\begin{pmatrix}-8 & -3 & 1\\ 0 & 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8-6+1 & 0-9+4\\ 0+8+2 & 0+12+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -5\\ 10 & 20\end{pmatrix}$$

$$(AB)^2=\begin{pmatrix}3 & -5\\ 10 & 20\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -5\\ 10 & 20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9-50 & -15-100\\ 30+200 & -50+400\end{pmatrix}$$

$$\boxed{(AB)^2=\begin{pmatrix}-41 & -115\\ 230 & 350\end{pmatrix}}$$

b) Despejamos la matriz X de la ecuación matricial y luego sustituyo el valor de las matrices que intervienen en la ecuación.

$$2A+3X=4C \Rightarrow 3X=4C-2A \Rightarrow X=\frac{4}{3}C-\frac{2}{3}A$$

$$X=\frac{4}{3}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}-8 & -3 & 1\\ 0 & 4 & 2\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}\frac{4}{3} & 0 & -\frac{4}{3}\\ -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{8}{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{16}{3} & \frac{6}{3} & -\frac{2}{3}\\ 0 & -8/3 & -\frac{4}{3}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}\frac{20}{3} & 2 & -2\\ -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3}\end{pmatrix}}$$

c) Comprobamos si existe la inversa de D viendo que su determinante es no nulo.

$$|D|=\begin{vmatrix}2 & -1 & -2\\ 2 & 1 & 0\\ -6 & 1 & 3\end{vmatrix}=6-4-12+6=-4\neq 0$$. Existe la inversa de la matriz D.

$$D=\begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\ 2 & 1 & 0\\ -6 & 1 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow D^T=\begin{pmatrix}2 & 2 & -6\\ -1 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$D^{-1}=\frac{Adj\left(D^{T}\right)}{|D|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}2 & 2 & -6\\ -1 & 1 & 1\\ -2 & 0 & 3\end{pmatrix}}{-4}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -2 & 3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -2 & 0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & -6\\ 0 & 3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & -6\\ -2 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 2\\ -2 & 0\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}2 & -6\\ 1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & -6\\ -1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{D^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ -6 & -6 & -4\\ 8 & 4 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2}\\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1\\ -2 & -1 & -1\end{pmatrix}}$$

2. *(3,25 puntos)* Un programa de televisión emitido ayer duró 120 minutos. La cuota de pantalla que tuvo el programa, medida en porcentaje, fue variando a lo largo del tiempo según la función:

$$C(x)=\frac{1}{200}\left(-x^2+100x+7500\right)$$

donde $x\in[0,\,120]$ es el tiempo (en minutos) transcurrido desde el inicio del programa y C es la cuota de pantalla, en porcentaje.

a) *(0,75 puntos)* Encontrar los valores de tiempo, si los hubo, en los que la cuota de pantalla fue igual a 18.

b) *(1,5 puntos)* ¿En qué instantes de tiempo se alcanzaron la mínima y máxima cuotas de pantalla del programa? ¿Cuáles fueron dichas cuotas?

c) *(1 punto)* Calcular:

$$\int_{10}^{20} C(x)dx$$

a)

$$C(x)=18\Rightarrow\frac{1}{200}\left(-x^2+100x+7500\right)=18\Rightarrow -x^2+100x+7500=3600\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^2+100x+3900=0\Rightarrow x=\frac{-100\pm\sqrt{100^2-4(-1)3900}}{-2}=\frac{-100\pm\sqrt{25600}}{-2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-100\pm 160}{-2}=\begin{cases}\dfrac{-100+160}{-2}=-30\notin[0,120]\\[2ex]\dfrac{-100-160}{-2}=130\notin[0,120]\end{cases}$$

No hay ningún momento durante el programa en el que la cuota de pantalla sea 18 %.

b) Utilizamos la derivada para buscar los momentos críticos.

$$C(x)=\frac{1}{200}\left(-x^2+100x+7500\right)\Rightarrow C'(x)=\frac{1}{200}(-2x+100)$$

$$C'(x)=0\Rightarrow\frac{1}{200}(-2x+100)=0\Rightarrow -2x+100=0\Rightarrow\boxed{x=50}$$

Solo existe un valor crítico en $x = 50$. Como la función es polinómica es una función continua, por lo que valoramos la función en los extremos del intervalo [0, 120] y en $x = 50$ para determinar el valor máximo y mínimo de cuota de audiencia.

- En $x = 0$ la cuota es de $C(0)=\frac{1}{200}\left(-0^2+0+7500\right)=37.5$
- En $x = 50$ la cuota es de $C(50)=\frac{1}{200}\left(-50^2+5000+7500\right)=50$ ¡Máximo!
- En $x = 120$ la cuota es de $C(120)=\frac{1}{200}\left(-120^2+12000+7500\right)=\frac{1}{200}\left(-14400+12000+7500\right)=25.5$ ¡Mínimo!

Luego la mínima cuota de pantalla se produjo en el minuto 120 y fue del 25,5% y la máxima en el minuto 50 con un 50%.

c)

$$\int_{10}^{20} C(x)dx = \int_{10}^{20} \frac{1}{200}\left(-x^2+100x+7500\right)dx = \frac{1}{200}\int_{10}^{20} -x^2+100x+7500dx =$$

$$= \frac{1}{200}\left[-\frac{x^3}{3}+50x^2+7500x\right]_{10}^{20} =$$

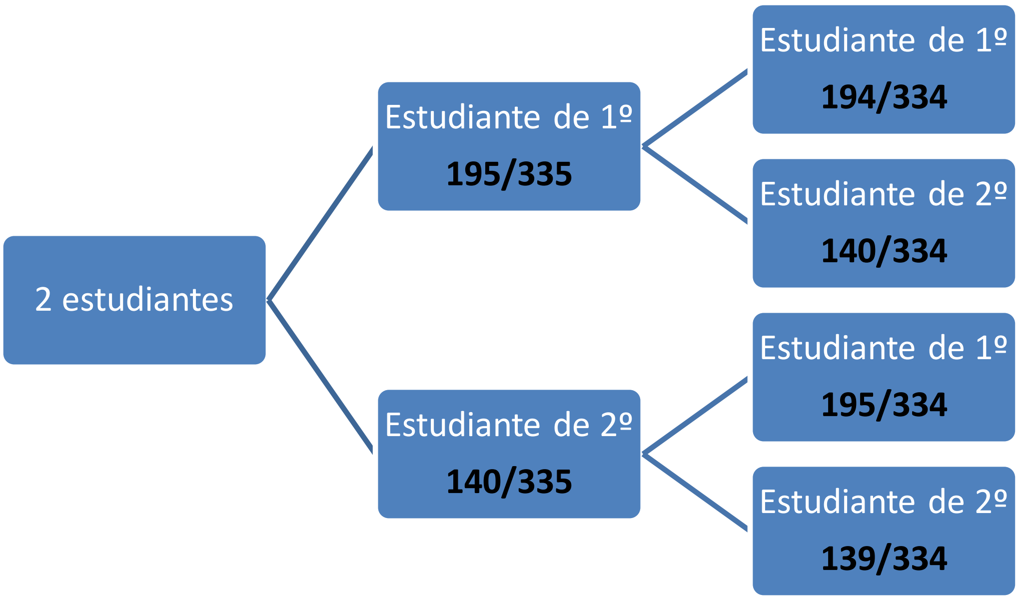
$$= \frac{1}{200}\left[\left(-\frac{20^3}{3}+50\cdot 20^2+7500\cdot 20\right)-\left(-\frac{10^3}{3}+50\cdot 10^2+7500\cdot 10\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{200}\left[-\frac{8000}{3}+20000+150000+\frac{1000}{3}-5000-75000\right] = \frac{263000}{600} = \boxed{\frac{1315}{3}}$$

3. (*3,5 puntos*)
a) *(1 punto)* En un instituto hay 335 estudiantes de Bachillerato, 195 de los cuales están en primer curso y 140 están en segundo curso. Se eligen al azar dos estudiantes distintos de entre estos 335. ¿Cuál es la probabilidad de que estén en el mismo curso?
b) *(2,5 puntos)* En una encuesta sobre hábitos alimentarios en una ciudad se ha tomado una muestra de 300 individuos y se les ha preguntado si son vegetarianos. De los 300 individuos, 72 son vegetarianos y los 228 restantes no lo son. Calcular el intervalo de confianza al 94% para la proporción de personas de la ciudad que son vegetarianas.

a)

Realizamos un diagrama de árbol. Tenemos en cuenta que elegimos un estudiante y después un segundo estando la probabilidad influida por lo que haya ocurrido en la primera elección.



Sean P_1 el suceso “el primer estudiante es de primer curso”, P_2 el suceso “el segundo estudiante es de primer curso”, S_1 el suceso “el primer estudiante es de segundo curso” y S_2 el suceso “el segundo estudiante es de segundo curso”. Se tiene:

$$P\left(\left(P_1 \cap P_2\right) \cup \left(S_1 \cap S_2\right)\right) = P\left(P_1 \cap P_2\right) + P\left(S_1 \cap S_2\right) =$$

$$= P\left(P_1\right) P\left(P_2 / P_1\right) + P\left(S_1\right) P\left(S_2 / S_1\right) = \frac{195}{335} \cdot \frac{194}{334} + \frac{140}{335} \cdot \frac{139}{334} = \boxed{\frac{5729}{11189} = 0.51}$$

b)

Obtengamos el valor crítico correspondiente al nivel de confianza del 94%:

$1 - \alpha = 0.94 \rightarrow \alpha = 0.06 \rightarrow \alpha/2 = 0.03 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.97 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.88}$

La proporción de personas vegetarianas en la muestra es: $pr = \dfrac{72}{300} = 0.24$

El error máximo admisible o cota de error es:

$$E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1-pr)}{n}} = 1.88 \cdot \sqrt{\frac{0.24 \cdot 0.76}{300}} = 0.046$$

El intervalo de confianza pedido es:

$$(0.24 - 0.046,\ 0.24 + 0.046) = (0.194,\ 0.286)$$

Es decir, con un nivel de confianza del 94% hay entre un 19,4% y un 28,6% de personas vegetarianas en la ciudad.