Universidad Zaragoza
1542

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA DE JUNIO DE 2019
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC.SS. II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. (*3,25 puntos*) Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} x & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ y & 2y \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$$

a) (*2 puntos*) ¿Para qué valores de x e y se tiene $AB = C$?

b) (*1,25 puntos*) Calcular, si existe, la matriz inversa de C.

2. (*3,25 puntos*) El precio (en euros) de una acción de una compañía entre las nueve y las diez de la mañana ha venido dado por la siguiente expresión

$$P(x)=12-\frac{2x-8}{x^2+4x+4}$$

donde $x \in [0,60]$ es el tiempo en minutos desde las nueve de la mañana. Calcular:

a) (*0,25 puntos*) El precio de la acción a las nueve y media.

b) (*1 punto*) Entre las nueve y las diez de la mañana, ¿durante cuánto tiempo la acción ha tenido un precio mayor que 12 euros?

c) (*2 puntos*) El máximo y mínimo precio que ha alcanzado la acción entre las nueve y las diez de la mañana.

3. (*3,5 puntos*) Se va a realizar un estudio de mercado para estimar la proporción de consumidores que conoce una determinada marca de yogures. Para ello se va a tomar una muestra aleatoria simple de consumidores, se va a preguntar a cada uno si conoce la marca y a partir de los resultados se construirá el intervalo de confianza correspondiente, a nivel de confianza del 91%.

a) (*2 puntos*) Si queremos que el intervalo no tenga una amplitud mayor que 0,08 ¿qué tamaño de la muestra debemos escoger?

b) (*1,5 puntos*) Decidimos tomar una muestra de tamaño de 175 consumidores; les preguntamos y un total de 126 responden que conocen la marca. Calcular el intervalo de confianza al 91% para la proporción de consumidores que conocen la marca.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

OPCIÓN B

1. (*3,25 puntos*) Un ebanista fabrica sillas y taburetes. Cada silla necesita 4 kilos de madera y 1 hora de trabajo, mientras que cada taburete necesita 2 kilos de madera y 3 horas de trabajo. El beneficio por cada silla es de 70 euros y por cada taburete es de 50 euros. Para la semana que viene quiere fabricar, al menos, 6 sillas y 4 taburetes; dispone, como máximo, de 72 kilos de madera y de 48 horas de trabajo. ¿Cuántas sillas y taburetes debe fabricar para maximizar su beneficio? ¿Cuál será el valor del beneficio en ese caso?

2. (*3,25 puntos*)

a) (*2 puntos*) Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + 3x - 6$, con $x \in \mathbb{R}$, encontrar, si existen, a y b tales que f tenga un máximo relativo en $x = -2$ con valor $f(-2) = -6$.

b) (*1,25 puntos*) Calcular

$$\int_0^1 \left(\frac{5x}{\sqrt{8x^2+1}} - 3xe^{-4x^2} \right) dx$$

3. (*3,5 puntos*) Según los datos del Instituto Nacional de Estadística, el 49,3% de la población aragonesa son hombres y el 50,7% son mujeres. Del total de hombres, un 80,9% tienen menos de 65 años; del total de mujeres, un 75,9% tienen menos de 65 años.

a) (*0,75 puntos*) Elegimos una persona de Aragón al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer de menos de 65 años?

b) (*1 punto*) Elegimos una persona de Aragón al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 65 años?

c) (*1 punto*) Elegimos una persona de Aragón de entre las que tienen menos de 65 años, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

d) (*0,75 puntos*) Si se eligen al azar (con reemplazamiento) tres personas de Aragón, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de las tres sea mujer?

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. (*3,25 puntos*) Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} x & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ y & 2y \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$$

a) (*2 puntos*) ¿Para qué valores de x e y se tiene *AB* = *C?*
b) (*1,25 puntos*) Calcular, si existe, la matriz inversa de *C*.

a) Sustituimos el valor de las matrices, realizamos las operaciones indicadas y resolvemos el sistema de ecuaciones que se plantea.

$$AB=C\Rightarrow\begin{pmatrix} x & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \\ y & 2y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} -2x-1-2y & x-4y \\ -8-1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{r} -2x-1-2y=2 \\ x-4y=-3 \\ -8-1=-9 \\ 4=4 \end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r} -2x-2y=3 \\ x-4y=-3 \end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r} -2x-2y=3 \\ x=-3+4y \end{array}\right\}\Rightarrow -2(-3+4y)-2y=3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6-8y-2y=3\Rightarrow -10y=-3\Rightarrow\boxed{y=\frac{3}{10}}\Rightarrow\boxed{x=-3+4\left(\frac{3}{10}\right)=-3+\frac{12}{10}=-\frac{18}{10}=-\frac{9}{5}}$$

Los valores buscados son $x=-\frac{9}{5};\ y=\frac{3}{10}$

b) Comprobamos si existe la inversa de la matriz C viendo si su determinante es no nulo.

$$C=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}\Rightarrow |C|=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -9 & 4 \end{vmatrix}=8-27=-19\neq 0$$

Existe la inversa de C. La calculamos:

$$C^{-1}=\frac{Adj\left(A^{T}\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 2 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}}{-19}=-\frac{1}{19}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{C^{-1}=\begin{pmatrix} -4/19 & -3/19 \\ -9/19 & -2/19 \end{pmatrix}}$$

2. (*3,25 puntos*) El precio (en euros) de una acción de una compañía entre las nueve y las diez de la mañana ha venido dado por la siguiente expresión

$$P(x)=12-\frac{2x-8}{x^2+4x+4}$$

donde $x \in [0,60]$ es el tiempo en minutos desde las nueve de la mañana. Calcular:
a) (*0,25 puntos*) El precio de la acción a las nueve y media.
b) (*1 punto*) Entre las nueve y las diez de la mañana, ¿durante cuánto tiempo la acción ha tenido un precio mayor que 12 euros?
c) (*2 puntos*) El máximo y mínimo precio que ha alcanzado la acción entre las nueve y las diez de la mañana.

a) Nos piden calcular P(30).

$$P(30)=12-\frac{60-8}{30^2+120+4}=12-\frac{52}{1024}=11.95$$

El precio es de 11.95 €

b)

$$P(x)>12\Rightarrow 12-\frac{2x-8}{x^2+4x+4}>12\Rightarrow \frac{2x-8}{x^2+4x+4}<0\Rightarrow \frac{2x-8}{(x+2)^2}<0\Rightarrow 2x-8<0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x<8\Rightarrow x<\frac{8}{2}=4$$

El precio es mayor de 12 euros entre los 0 y 4 minutos iniciales, es decir, entre las 9 y las 9:04.

c) Utilizamos la derivada para determinar estos valores.

$$P(x)=12-\frac{2x-8}{x^2+4x+4}\Rightarrow P'(x)=0-\frac{2\left(x^2+4x+4\right)-(2x+4)(2x-8)}{\left(x^2+4x+4\right)^2}$$

$$P'(x)=-\frac{2x^2+8x+8-\left(4x^2-16x+8x-32\right)}{\left(x^2+4x+4\right)^2}=-\frac{-2x^2+16x+40}{\left(x^2+4x+4\right)^2}=\frac{2x^2-16x-40}{\left(x^2+4x+4\right)^2}$$

$$P'(x)=0\Rightarrow \frac{2x^2-16x-40}{\left(x^2+4x+4\right)^2}=0\Rightarrow 2x^2-16x-40=0\Rightarrow x^2-8x-20=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4(1)(-20)}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{64+80}}{2}=\frac{8\pm 12}{2}=\begin{cases}\frac{8+12}{2}=10\\ \frac{8-12}{2}=-2\end{cases}$$

Como $x = -2$ no pertenece al intervalo [0,60] solo estudiamos la posibilidad de que 10 sea máximo o mínimo.

Como la función es continua en su intervalo de definición valoramos la función en $x = 10$, así como los extremos del intervalo [0,60] para determinar los valores máximos y mínimos en dicho intervalo.

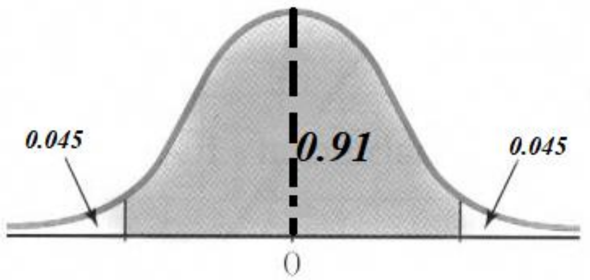
- Para $x = 0$ → $P(0) = 12 - \dfrac{0-8}{0^2+0+4} = 12 + 2 = 14$ €
- Para $x = 10$ → $P(10) = 12 - \dfrac{20-8}{10^2+40+4} = 12 - \dfrac{12}{144} = 12 - \dfrac{1}{12} \approx 11.916666$ €
- Para $x = 60$ → $P(60) = 12 - \dfrac{120-8}{60^2+240+4} = 12 - \dfrac{112}{3844} = \dfrac{11504}{961} \approx 11.9709$ €

El precio mínimo es de 11.917 € y se alcanza a los 10 minutos y el precio máximo es de 14 € y se produce a los 0 minutos. Es decir, a las 9 se tiene el precio máximo y a las 9:10 el precio mínimo.

3. (*3,5 puntos*) Se va a realizar un estudio de mercado para estimar la proporción de consumidores que conoce una determinada marca de yogures. Para ello se va a tomar una muestra aleatoria simple de consumidores, se va a preguntar a cada uno si conoce la marca y a partir de los resultados se construirá el intervalo de confianza correspondiente, a nivel de confianza del 91%.
a) (*2 puntos*) Si queremos que el intervalo no tenga una amplitud mayor que 0,08 ¿qué tamaño de la muestra debemos escoger?
b) (*1,5 puntos*) Decidimos tomar una muestra de tamaño de 175 consumidores; les preguntamos y un total de 126 responden que conocen la marca. Calcular el intervalo de confianza al 91% para la proporción de consumidores que conocen la marca.

a) Puesto que no disponemos de ninguna proporción previa, suponemos que $pr = 0,5$.
Con este valor de la proporción el producto $pr \cdot qr$ toma el valor máximo.

Obtengamos el valor crítico $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 91%



$1 - \propto = 0,91 \rightarrow \propto = 0,09 \rightarrow \propto/2 = 0'045 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0,955 \rightarrow z_{\alpha/2} = \dfrac{1.69+1.70}{2} = 1.695$

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	[illegible]	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	[illegible]
0.1	[illegible]	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	[illegible]
0.2	[illegible]	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	[illegible]
0.3	[illegible]	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	[illegible]
0.4	[illegible]	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	[illegible]
0.5	[illegible]	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	[illegible]
0.6	[illegible]	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	[illegible]
0.7	[illegible]	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	[illegible]
0.8	[illegible]	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	[illegible]
0.9	[illegible]	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	[illegible]
1.0	[illegible]	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	[illegible]
1.1	[illegible]	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	[illegible]
1.2	[illegible]	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	[illegible]
1.3	[illegible]	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	[illegible]
1.4	[illegible]	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	[illegible]
1.5	[illegible]	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	[illegible]
1.6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	$\boxed{0.9545}$
1.7	$\boxed{0.9554}$	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706

El error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza (0.08), por lo que el *Error* debe ser menor de *0.04*.

Utilizamos la fórmula de cálculo del *Error* y tenemos

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} \Rightarrow 0.04 = 1.695 \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} \Rightarrow \frac{0.04}{1.695} = \sqrt{\frac{0.25}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.04}{1.695}\right)^2 = \frac{0.25}{n} \Rightarrow n = \frac{0.25}{\left(\frac{0.04}{1.695}\right)^2} = 448.91$$

El tamaño de la muestra debe ser al menos de 449 consumidores.

b)

Tenemos que n = *175* y la proporción es $pr = \frac{126}{175} = 0.72$ → $qr = 1 - 0.56 = 0.44$

Para un nivel de confianza del 91% el valor crítico es $z_{\alpha/2}$ **= 1.695**

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 1.695 \cdot \sqrt{\frac{0.72 \cdot 0.28}{175}} = 0.0575$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(0.72 - 0.0575, 0.72 + 0.0575\right) = \left(0.6625, 0.7775\right)$$

OPCIÓN B

1. (*3,25 puntos*) Un ebanista fabrica sillas y taburetes. Cada silla necesita 4 kilos de madera y 1 hora de trabajo, mientras que cada taburete necesita 2 kilos de madera y 3 horas de trabajo. El beneficio por cada silla es de 70 euros y por cada taburete es de 50 euros. Para la semana que viene quiere fabricar, al menos, 6 sillas y 4 taburetes; dispone, como máximo, de 72 kilos de madera y de 48 horas de trabajo. ¿Cuántas sillas y taburetes debe fabricar para maximizar su beneficio? ¿Cuál será el valor del beneficio en ese caso?

Se trata de un problema de programación lineal.
Llamemos "x" al número de sillas que se fabrican e "y" al número de taburetes.
Organicemos los datos en una tabla:

	Kilos de madera	Horas de trabajo	Beneficio
Nº sillas (x)	*4x*	*x*	*70x*
Nº taburetes (y)	*2y*	*3y*	*50y*
	$4x+2y$	$x+3y$	$70x+50y$

La función objetivo es el beneficio que viene dado por la expresión $B(x,y)=70x+50y$

Las restricciones del problema son:

"*Para la semana que viene quiere fabricar, al menos, 6 sillas y 4 taburetes*" → $x \geq 6;\ y \geq 4$
"*Dispone, como máximo, de 72 kilos de madera y de 48 horas de trabajo*" → $4x+2y \leq 72;\ x+3y \leq 48$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 6 \\ y \geq 4 \\ 4x+2y \leq 72 \\ x+3y \leq 48 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \geq 6 \\ y \geq 4 \\ 2x+y \leq 36 \\ x+3y \leq 48 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \geq 6 \\ y \geq 4 \\ y \leq 36-2x \\ 3y \leq 48-x \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas al sistema de inecuaciones.

$x=6$

$x=6$	y
6	0
6	10

$3y=48-x$

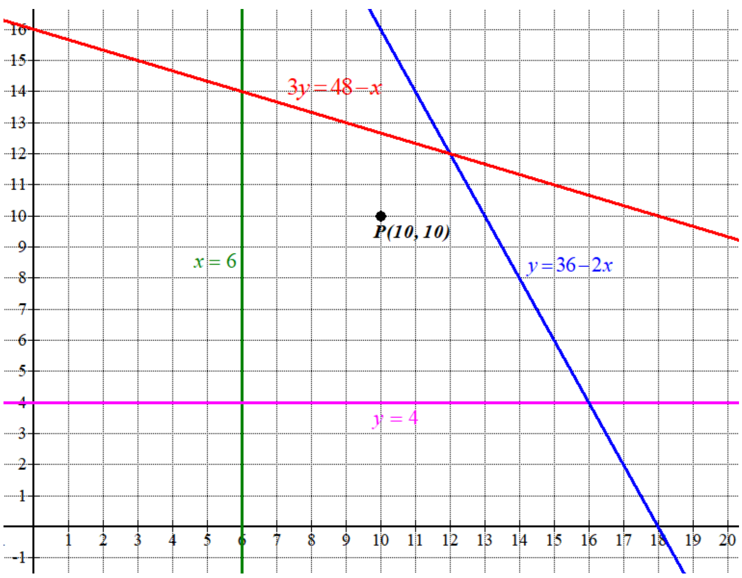
x	$y=\frac{48-x}{3}$
36	4
6	14

$y=36-2x$

x	$y=36-2x$
18	0
6	24

$y=4$

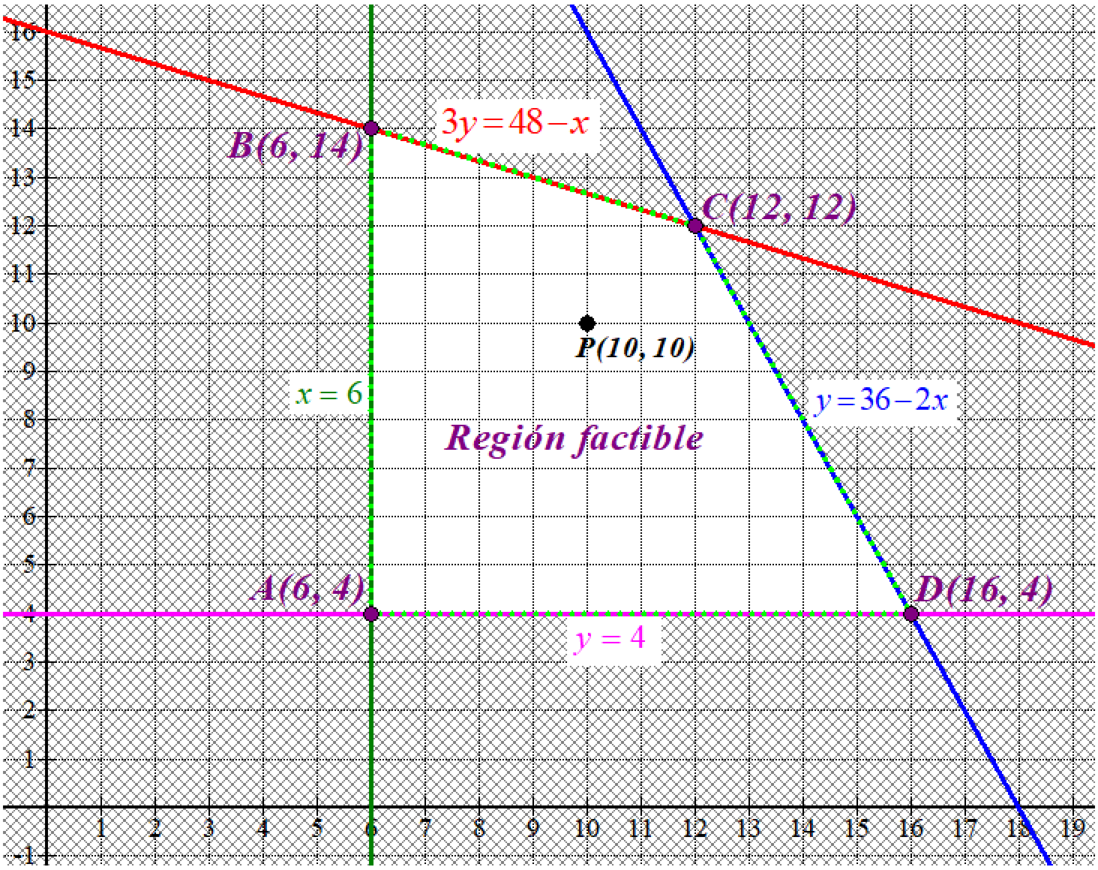
x	$y=4$
6	4
36	4



Comprobamos que el punto P(10, 10) cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 10 \geq 6 \\ 10 \geq 4 \\ 10 \leq 36-20 \\ 30 \leq 48-10 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{¡¡Se cumplen todas!!}$$

La región factible es la situada en el primer cuadrante por debajo de las rectas roja y azul, por encima de la recta horizontal rosa y a la derecha de la recta vertical verde.
La dejamos en blanco en el dibujo siguiente señalando los vértices y sus coordenadas.



Valoramos la función beneficio $B(x,y) = 70x + 50y$ en cada uno de los vértices.

A(6, 4) → $B(6,4) = 420 + 200 = 620$

B(6, 14) → $B(6,14) = 420 + 700 = 1120$

C(12, 12) → $B(12,12) = 840 + 600 = 1440$ ¡¡*máximo*!!

D(16, 4) → $B(16,4) = 1120 + 200 = 1320$

El máximo beneficio es de 1440 € y se obtiene fabricando 12 sillas y 12 taburetes.

2. (*3,25 puntos*)
a) (*2 puntos*) Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + 3x - 6$, con $x \in \mathbb{R}$, encontrar, si existen, a y b tales que f tenga un máximo relativo en $x = -2$ con valor $f(-2) = -6$.
b) (*1,25 puntos*) Calcular

$$\int_0^1 \left(\frac{5x}{\sqrt{8x^2+1}} - 3xe^{-4x^2} \right) dx$$

a) La función debe cumplir que $f(-2) = -6$.

$$\left.\begin{array}{r} f(x) = ax^3 + bx^2 + 3x - 6 \\ f(-2) = -6 \end{array}\right\} \Rightarrow a(-2)^3 + b(-2)^2 + 3(-2) - 6 = -6 \Rightarrow \boxed{-8a + 4b - 6 = 0}$$

La función tiene un máximo relativo en $x = -2$ esto implica que la derivada primera se anula y que la derivada segunda es negativa.

$$\left.\begin{array}{r} f(x) = ax^3 + bx^2 + 3x - 6 \Rightarrow f\,'(x) = 3ax^2 + 2bx + 3 \\ f\,'(-2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3a(-2)^2 + 2b(-2) + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{12a - 4b + 3 = 0}$$

Unimos las dos ecuaciones obtenidas en un sistema y resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} -8a + 4b - 6 = 0 \\ 12a - 4b + 3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$4a \qquad -3 = 0 \Rightarrow \boxed{a = \frac{3}{4}} \Rightarrow 12\frac{3}{4} - 4b + 3 = 0 \Rightarrow 9 - 4b + 3 = 0 \Rightarrow 4b = 12 \Rightarrow \boxed{b = 3}$$

Con $a = \frac{3}{4}$ y $b = 3$ se debe cumplir que la derivada segunda es negativa en $x = -2$.

$$f(x) = \frac{3}{4}x^3 + 3x^2 + 3x - 6 \Rightarrow f\,'(x) = \frac{9}{4}x^2 + 6x + 3 \Rightarrow f\,''(x) = \frac{18}{4}x + 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\,''(-2) = \frac{18}{4}(-2) + 6 = -\frac{36}{4} + 6 = -3 < 0$$

Los valores buscados son $a = \frac{3}{4}$ y $b = 3$

b) Empezamos calculando la primitiva de la función.

$$\int \left(\frac{5x}{\sqrt{8x^2+1}} - 3xe^{-4x^2} \right) dx = \int \frac{5x}{\sqrt{8x^2+1}} dx - \int 3xe^{-4x^2} dx =$$

$$= \frac{5 \cdot 2}{16} \int \frac{16x}{2\sqrt{8x^2+1}} dx + \frac{3}{8} \int (-8x) e^{-4x^2} dx =$$

$$=\frac{10}{16}\sqrt{8x^2+1}+\frac{3}{8}e^{-4x^2}=\boxed{\frac{5}{8}\sqrt{8x^2+1}+\frac{3}{8}e^{-4x^2}+K}$$

Pasamos a calcular el valor pedido de la integral definida.

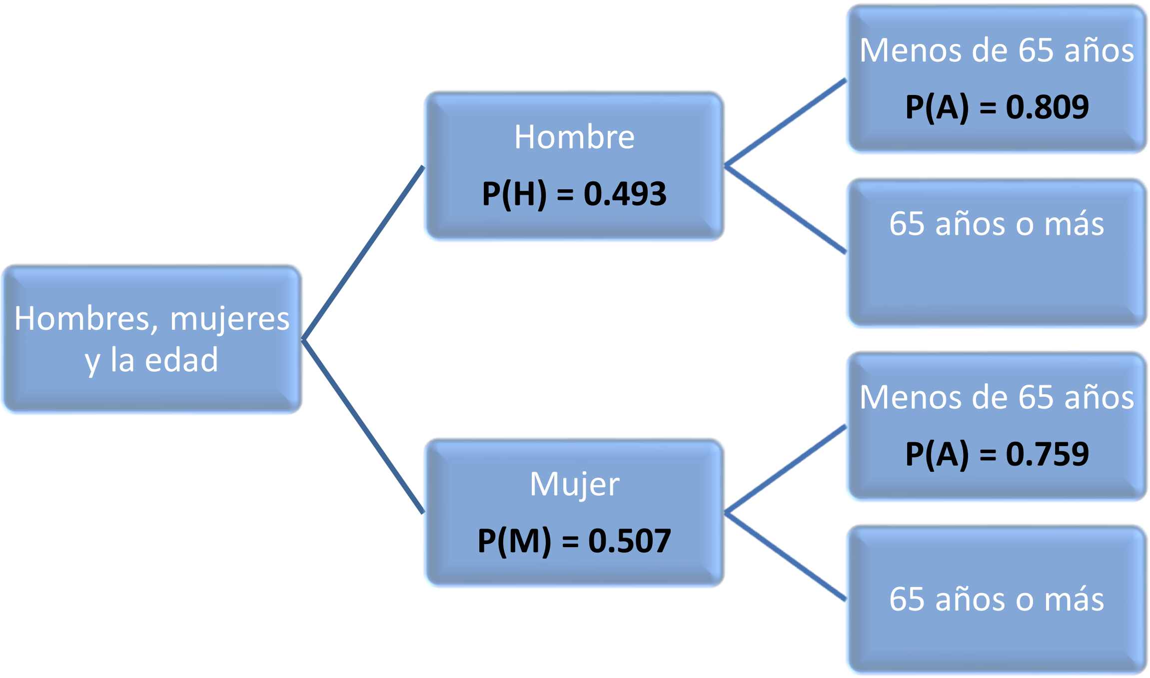
$$\int_0^1\left(\frac{5x}{\sqrt{8x^2+1}}-3xe^{-4x^2}\right)dx=\left[\frac{5}{8}\sqrt{8x^2+1}+\frac{3}{8}e^{-4x^2}\right]_0^1=$$

$$=\left[\frac{5}{8}\sqrt{8\cdot 1^2+1}+\frac{3}{8}e^{-4\cdot 1^2}\right]-\left[\frac{5}{8}\sqrt{0+1}+\frac{3}{8}e^{-0}\right]=$$

$$=\frac{5}{8}\cdot 3+\frac{3}{8}e^{-4}-\frac{5}{8}-\frac{3}{8}=\frac{15}{8}-\frac{8}{8}+\frac{3}{8e^4}=\boxed{\frac{7}{8}+\frac{3}{8e^4}\approx 0.88}$$

3. (*3,5 puntos*) Según los datos del Instituto Nacional de Estadística, el 49,3% de la población aragonesa son hombres y el 50,7% son mujeres. Del total de hombres, un 80,9% tienen menos de 65 años; del total de mujeres, un 75,9% tienen menos de 65 años.
a) (*0,75 puntos*) Elegimos una persona de Aragón al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer de menos de 65 años?
b) (*1 punto*) Elegimos una persona de Aragón al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 65 años?
c) (*1 punto*) Elegimos una persona de Aragón de entre las que tienen menos de 65 años, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?
d) (*0,75 puntos*) Si se eligen al azar (con reemplazamiento) tres personas de Aragón, ¿cuál es la probabilidad de que al menos una de las tres sea mujer?

Realizamos un diagrama de árbol.



Llamamos *H* al suceso "la persona es un hombre", *M* al suceso "la persona es una mujer", *A* al suceso "la persona tiene menos de 65 años" y $\overline{A}$ al suceso "la persona tiene 65 años o más"

a) $P(M \cap A) = 0.507 \cdot 0.759 = \boxed{0.384813}$

b) $P(A) = P(H \cap A) + P(M \cap A) = 0.493 \cdot 0.809 + 0.507 \cdot 0.759 = \boxed{0.78365}$

c) $P(M / A) = \dfrac{P(M \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0.384813}{0.76365} = \boxed{0.49}$

d) Esta probabilidad es más sencilla calcularla haciendo uso del suceso contrario. Lo contrario a "al menos una de las tres sea mujer" es el suceso "ninguna de las tres es mujer" o lo que es lo mismo "elegimos tres hombres". Elegir tres hombres con reemplazamiento es como elegir en tres elecciones sucesivas independientes entre si y con la misma probabilidad en cada elección.

$$P(H_1 \cap H_2 \cap H_3) = P(H_1)P(H_2)P(H_3) = \frac{49.3}{100} \cdot \frac{49.3}{100} \cdot \frac{49.3}{100} = 0.1198$$

$$P(\text{Elegir al menos una mujer de entre 3 personas}) = 1 - P(H_1 \cap H_2 \cap H_3) = 1 - 0.1198 = \boxed{0.8802}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Sea H el suceso "la persona es un hombre", M el suceso "la persona es una mujer", A el suceso "la persona tiene menos de 65 años" y $\overline{A}$ el suceso "la persona tiene 65 años o más"

Pasemos los valores porcentuales a valores absolutos y organicemos los datos en una tabla de contingencia.
Para un total de 100 personas, hay 49,3 hombres y 50,7 mujeres.
Entre los hombres un 80,9% tienen menos de 65 años, es decir, 49,3×0,809 = 39,8837 menores de 65 años y entre las mujeres un 75,9% tienen menos de 65 años, es decir, 50,7×0,759 = 38,4813 menores de 65 años.

	Menos de 65 años	**Con 65 años o más**	
Hombres	**39.8837**		**49.3**
Mujeres	**38.4813**		**50.7**
			100

Completamos la tabla

	Menos de 65 años	**Con 65 años o más**	
Hombres	**39.8837**	**9.4163**	**49.3**
Mujeres	**38.4813**	**12.2187**	**50.7**
	78.365	**21.635**	**100**

Respondemos a las preguntas planteadas aplicando la regla de Laplace.

a) $P(M \cap A) = \frac{38.4813}{100} = \boxed{0.384813}$

b) $P(A) = \frac{78.365}{100} = \boxed{0.78365}$

c) $P(M / A) = \frac{12.2187}{21.635} = \boxed{0.49}$

d) Esta probabilidad es más sencilla calcularla haciendo uso del suceso contrario. Lo contrario a "al menos una de las tres sea mujer" es el suceso "ninguna de las tres es mujer" o lo que es lo mismo "elegimos tres hombres". Elegir tres mujeres con reemplazamiento es como elegir en tres elecciones sucesivas independientes entre si y con la misma probabilidad en cada elección.

$$P(H_1 \cap H_2 \cap H_3) = P(H_1)P(H_2)P(H_3) = \frac{49.3}{100} \cdot \frac{49.3}{100} \cdot \frac{49.3}{100} = 0.1198$$

$$P(\text{Elegir al menos una mujer de entre 3 personas}) = 1 - P(H_1 \cap H_2 \cap H_3) = 1 - 0.1198 = \boxed{0.8802}$$