	Evaluación de Bachillerato para Acceder a Estudios Universitarios **Castilla y León**	**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES**	**EXAMEN** **Nº Páginas: 2 Y tabla**

OPTATIVIDAD: EL ALUMNO DEBERÁ ESCOGER UNA DE LAS DOS OPCIONES Y DESARROLLAR LAS PREGUNTAS DE LA MISMA.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN
Cada pregunta de la 1 a la 3 se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. La pregunta 4 se puntuará sobre un máximo de 1 punto. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de las cuatro preguntas. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables.

Opción A

1A- Los trabajadores de un taller artesano elaboran collares y pulseras de bisutería. En la elaboración de un collar se tardan 2 horas, mientras que se emplea 1 hora en la elaboración de una pulsera. Los materiales de los que disponen les permiten fabricar como mucho 50 piezas (entre collares y pulseras) y el tiempo dedicado a su elaboración no puede exceder de 80 horas. Sabiendo que obtienen un beneficio de 5 euros por la venta de un collar y de 4 euros por la venta de una pulsera, utiliza técnicas de programación lineal para calcular el número de collares y pulseras que tienen que elaborar para que su beneficio sea máximo. ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

2A- Se considera la función $f(x)=\begin{cases} 4-x & si \;\; x<4 \\ x^2-16 & si \;\; x\geq 4 \end{cases}$

a) Estudia razonadamente la continuidad de $f(x)$.

b) Analiza el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

3A- Se quiere estimar el sueldo medio de un trabajador. Para ello se selecciona una muestra de 625 trabajadores y se obtiene un sueldo medio muestral de 1480 €. El sueldo de un trabajador es una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica σ igual a 250 €.
a) Halla el intervalo de confianza del 90% para el sueldo medio de un trabajador.
b) Si se quiere que el error máximo de la estimación del sueldo medio de un trabajador sea de 10 €, con una confianza del 99%, halla el tamaño mínimo de la muestra que se debe elegir.

4A- El 40% de los internautas utiliza *Dropbox* o *Google Drive* para almacenar archivos en la nube. Sabiendo que el 25 % emplea *Dropbox* y el 20 % emplea *Google Drive*, ¿qué porcentaje de internautas emplea ambos?

Opción B

1B- Se considera el sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro *a*:

$$\begin{cases} x+3y+z=1 \\ 3x+y+(a-1)z=3 \\ x+y+z=4 \end{cases}$$

a) Clasifica el sistema según sus soluciones para los diferentes valores de *a*.
b) Resuelve el sistema para $a = 3$.

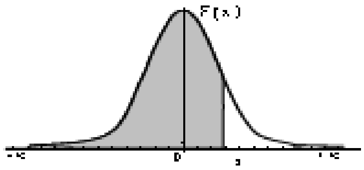
2B- Se espera que en los próximos diez años, los beneficios (en millones de euros) de una empresa, vengan dados por la función $P(t)=t^2-10t+16$, donde $t\in(0,10]$ es el tiempo transcurrido en años desde el momento inicial.
a) Determina en qué momento del tiempo los beneficios serán de 16 millones de euros.
b) Determina en qué momento los beneficios serán mínimos.

3B- Una cadena de supermercados envasa tres variedades de queso en paquetes al vacío, en las proporciones que se indican: curado (45%), semicurado (30%) y tierno (25%). Parte del queso que recibe es de importación, concretamente, el 25% del queso curado, el 23% del semicurado y el 20% del tierno. Se elige al azar un paquete de queso.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea de importación?
b) Si el queso elegido es de importación, ¿qué probabilidad tiene de ser curado?

4B- La probabilidad de que un alumno de Matemáticas apruebe un examen tipo test es del 80%, mientras que la probabilidad de que apruebe un examen de problemas es del 60%. Si la probabilidad de aprobar los dos exámenes es del 50%, calcula la probabilidad de que no apruebe ninguno de los dos exámenes.

Distribución Normal

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9014
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9318
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

SOLUCIONES

Opción A

1A- Los trabajadores de un taller artesano elaboran collares y pulseras de bisutería. En la elaboración de un collar se tardan 2 horas, mientras que se emplea 1 hora en la elaboración de una pulsera. Los materiales de los que disponen les permiten fabricar como mucho 50 piezas (entre collares y pulseras) y el tiempo dedicado a su elaboración no puede exceder de 80 horas. Sabiendo que obtienen un beneficio de 5 euros por la venta de un collar y de 4 euros por la venta de una pulsera, utiliza técnicas de programación lineal para calcular el número de collares y pulseras que tienen que elaborar para que su beneficio sea máximo. ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

Llamamos "x" al número de collares que se fabrican e "y" al número de pulseras.

Realizamos una tabla para ordenar toda la información ofrecida por el ejercicio.

	Horas de trabajo	**Beneficio**
Nº collares (x)	$2x$	$5x$
Nº pulseras (y)	y	$4y$
TOTALES	$2x+y$	$5x+4y$

FUNCIÓN OBJETIVO

La función a maximizar es el beneficio que viene expresado por la función $B(x,y)=5x+4y$

RESTRICCIONES

Los valores del número de piezas debe ser mayor o igual que 0 → $x \geq 0;\ y \geq 0$

"*El tiempo dedicado a su elaboración no puede exceder de 80 horas*" → $2x+y \leq 80$

"*Los materiales de los que disponen les permiten fabricar como mucho 50 piezas (entre collares y pulseras)*" → $x+y \leq 50$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ 2x+y \leq 80 \\ x+y \leq 50 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ y \leq 80-2x \\ y \leq 50-x \end{array}\right\}$$

Dibujamos la región factible, empezando por dibujar las rectas asociadas.

$x \geq 0;\ y \geq 0$

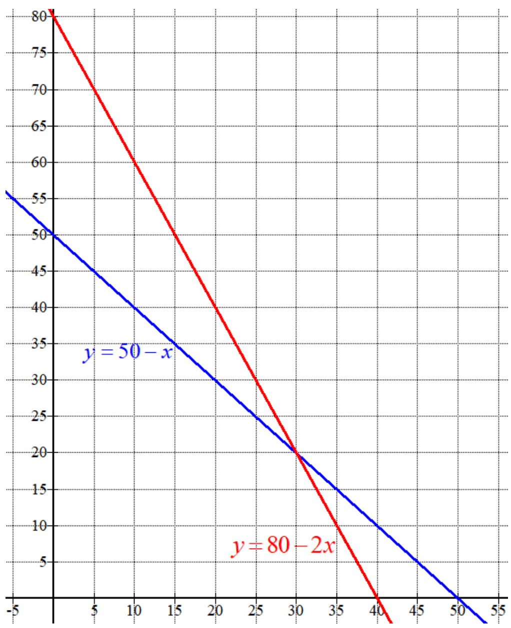
Primer cuadrante

$y = 80-2x$

x	$y=80-2x$
0	80
40	0

$y = 50-x$

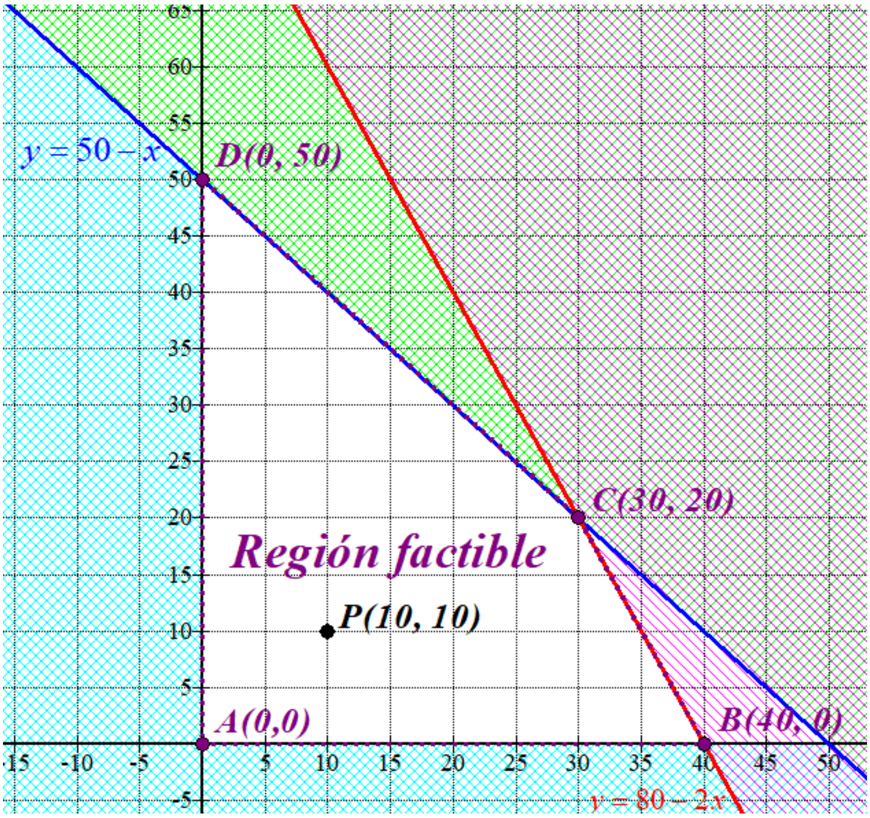
x	$y=50-x$
0	50
50	0



Probamos si un punto cualquiera situado en el primer cuadrante por debajo de las rectas azul y roja cumple las inecuaciones, por ejemplo P(10, 10).

$$P(10,10) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 10 \geq 0; 10 \geq 0 \\ 10 \leq 80-20 \\ 10 \leq 50-10 \end{array}\right\} \rightarrow \text{¡¡¡Ciertas todas las desigualdades!!!}$$

La región factible es la que contiene dicho punto y limitada por los ejes de coordenadas y las rectas azul y roja. La dejamos en blanco en el siguiente dibujo.



Observando el dibujo obtenemos las coordenadas de los vértices de dicha región:
A(0, 0), B(40, 0), C(30, 20) y D(0, 50).

Valoramos la función objetivo $B(x, y) = 5x + 4y$ en cada uno de los vértices para encontrar el beneficio máximo.

A(0, 0) → $B(0,0) = 0$

B(40, 0) → $B(40,0) = 200$

C(30, 20) → $B(30,20) = 150 + 80 = 230$

D(0, 50) → $B(0,50) = 200$

El beneficio máximo es de 230 € y se consigue en el punto C(30, 20), lo que significa la fabricación de 30 collares y 20 pulseras.

2A- Se considera la función $f(x)=\begin{cases} 4-x & si \ \ x<4 \\ x^2-16 & si \ \ x\geq 4 \end{cases}$

a) Estudia razonadamente la continuidad de $f(x)$.

b) Analiza el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.

a) La función $f(x)$ está definida mediante expresiones polinómicas, que son siempre continuas. Así, el único posible punto de discontinuidad se encuentra en el cambio de definición, en $x = 4$. Estudiamos los límites laterales en ese punto:

$$\left.\begin{array}{l} f(4)=4^2-16=0 \\ \lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-} 4-x=4-4=0 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+} x^2-16=4^2-16=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^+} f(x)=f(4)=0$$

Luego la función es continua en $x = 4$ y, en consecuencia: $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$

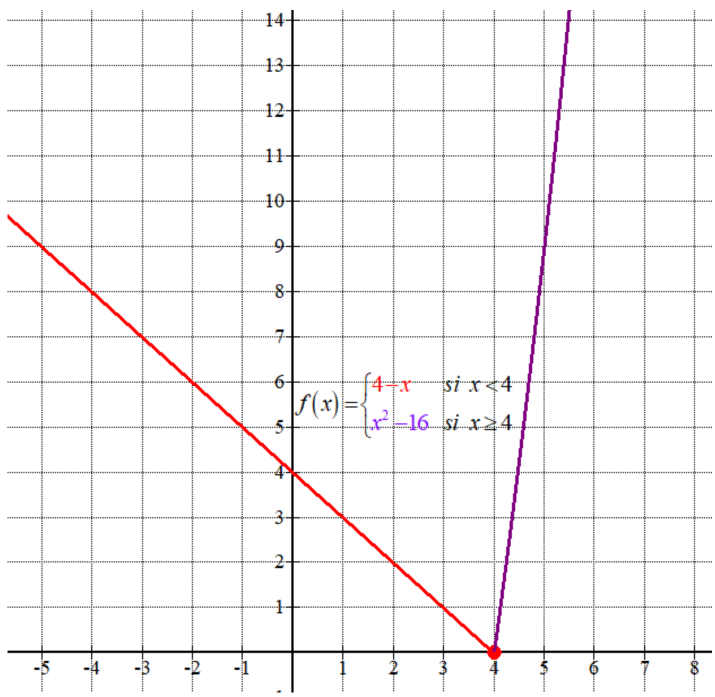
b) Para determinar la monotonía de la función debemos analizar el signo de su primera derivada:

$$f'(x)=\begin{cases} -1 & si \ \ x<4 \\ 2x & si \ \ x>4 \end{cases}$$

- En $(-\infty,4)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(4)=-1<0$. La función decrece en $(-\infty,4)$.
- En $(4,+\infty)$ tomamos $x = 5$ y la derivada vale $f'(5)=2\cdot 5=10>0$. La función decrece en $(4,+\infty)$.

La función es decreciente en $(-\infty,4)$ y creciente en $(4,+\infty)$.

No lo pide, pero dibujamos la gráfica de la función:



3A- Se quiere estimar el sueldo medio de un trabajador. Para ello se selecciona una muestra de 625 trabajadores y se obtiene un sueldo medio muestral de 1480 €. El sueldo de un trabajador es una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica σ igual a 250 €.
a) Halla el intervalo de confianza del 90% para el sueldo medio de un trabajador.
b) Si se quiere que el error máximo de la estimación del sueldo medio de un trabajador sea de 10 €, con una confianza del 99%, halla el tamaño mínimo de la muestra que se debe elegir.

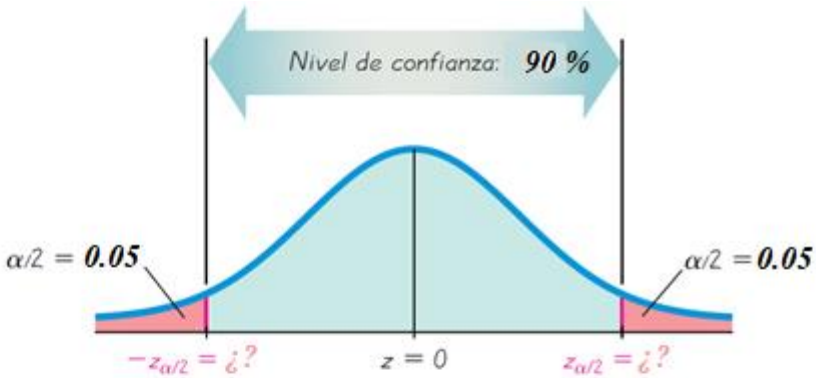
a) El sueldo de un trabajador es una variable aleatoria X que sigue una distribución normal: $X \sim N(\mu, 250)$

El intervalo de confianza para el sueldo medio de un trabajador viene dado por:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Donde el error viene dado por la expresión $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

La media muestral es $\bar{x} = 1480$ €, la desviación típica es $\sigma = 250$ € y el tamaño de la muestra es $n = 625$. Calculamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para una confianza del 90 %:



$1 - \alpha = 0{,}90 \rightarrow \alpha = 0{,}10 \rightarrow \alpha/2 = 0'05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}645}$

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \frac{250}{\sqrt{625}} = 16.45$$

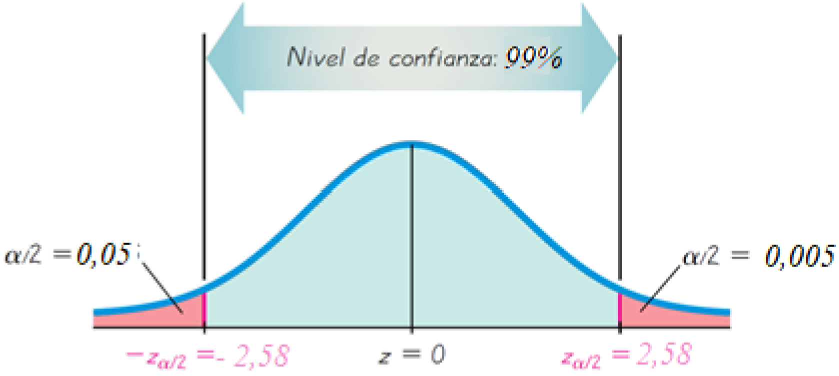
El intervalo de confianza es

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = (1480 - 16.45, 1480 + 16.45) = (1463.55, 1496.45)$$

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	[illegible]	[illegible]	0,523
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	[illegible]	[illegible]	0,563
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	[illegible]	[illegible]	0,602
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	[illegible]	[illegible]	0,640
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	[illegible]	[illegible]	0,677
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	[illegible]	[illegible]	0,712
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	[illegible]	[illegible]	0,745
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	[illegible]	[illegible]	0,776
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	[illegible]	[illegible]	0,805
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	[illegible]	[illegible]	0,831
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	[illegible]	[illegible]	0,855
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	[illegible]	[illegible]	0,877
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	[illegible]	[illegible]	0,896
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	[illegible]	[illegible]	0,913
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	[illegible]	[illegible]	0,927
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	[illegible]	[illegible]	0,940
1,6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	$\boxed{0{,}9495}$	$\boxed{0{,}9505}$	0,951
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,960

b) El error máximo admisible viene dado por: $Error = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Calculamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para una confianza del 99 %:



$1 - \alpha = 0{,}99 \rightarrow \alpha = 0{,}01 \rightarrow \alpha/2 = 0'005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2{,}575}$

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5[illegible]79	0,5[illegible]19	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5[illegible]75	0,[illegible]714	0,5
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6[illegible]64	0,[illegible]103	0,6
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6[illegible]43	0,[illegible]480	0,6
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6[illegible]08	0,[illegible]844	0,6
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7[illegible]57	0,[illegible]190	0,7
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7[illegible]86	0,[illegible]517	0,7
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7[illegible]94	0,[illegible]823	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8[illegible]78	0,[illegible]106	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8[illegible]40	0,[illegible]365	0,8
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8[illegible]77	0,[illegible]599	0,8
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8[illegible]90	0,[illegible]810	0,8
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8[illegible]80	0,[illegible]997	0,9
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9[illegible]47	0,[illegible]162	0,9
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9[illegible]92	0,[illegible]306	0,9
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9[illegible]18	0,[illegible]429	0,9
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9[illegible]25	0,[illegible]535	0,9
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9[illegible]16	0,[illegible]625	0,9
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9[illegible]93	0,[illegible]699	0,9
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9[illegible]56	0,[illegible]761	0,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9[illegible]08	0,[illegible]812	0,9
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9[illegible]50	0,[illegible]854	0,9
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9[illegible]84	0,[illegible]887	0,9
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9[illegible]11	0,[illegible]913	0,9
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9[illegible]32	0,[illegible]934	0,9
2,5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9949	0,9951	0,9
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9

Por lo tanto, el tamaño de la muestra para que el error sea de 10 € es:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 10 = 2.575 \cdot \frac{250}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{250 \cdot 2.575}{10} \Rightarrow n = \left(\frac{250 \cdot 2.575}{10}\right)^2 = 4144.1$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser un número entero y superior al obtenido, por lo que este tamaño mínimo es de 4145 trabajadores.

4A- El 40% de los internautas utiliza *Dropbox* o *Google Drive* para almacenar archivos en la nube. Sabiendo que el 25 % emplea *Dropbox* y el 20 % emplea *Google Drive*, ¿qué porcentaje de internautas emplea ambos?

Sea D el suceso "utilizar Dropbox" y G el suceso "utilizar Google Drive".
Entonces los datos proporcionados en el ejercicio se traducen en las probabilidades siguientes:

$$P(D) = 0{,}25,\ P(G) = 0{,}20,\ P(D \cup G) = 0{,}40$$

Teniendo en cuenta la fórmula: $P(D \cup G) = P(D) + P(G) - P(D \cap G)$

La probabilidad de la intersección de ambos sucesos es:

$$P(D \cup G) = P(D) + P(G) - P(D \cap G) \Rightarrow 0.40 = 0.25 + 0.20 - P(D \cap G) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(D \cap G) = 0.25 + 0{,}20 - 0.40 = 0.05$$

Luego, el porcentaje de internautas que utiliza los dos sistemas de almacenamiento es del 5 % .

OTRA FORMA DE HACERLO

Con tabla de contingencia.
Si el 40 % usan Google Drive o Dropbox significa que el restante 60 % no utiliza ninguno de ellos.

	Usan Google Drive	**No usan Google Drive**	
Usan Dropbox			**25**
No usan Dropbox		**60**	
	20		**100**

Completamos la tabla

	Usan Google Drive	**No usan Google Drive**	
Usan Dropbox	**¡¡¡ 5 !!!**	**20**	**25**
No usan Dropbox	**15**	**60**	**75**
	20	**80**	**100**

Hemos obtenido que 5 de cada 100 internautas usan ambos sistemas de almacenamiento.
El 5 % de los internautas usan ambos sistemas.

Opción B

1B- Se considera el sistema de ecuaciones lineales, en función del parámetro *a*:

$$\begin{cases} x+3y+z=1 \\ 3x+y+(a-1)z=3 \\ x+y+z=4 \end{cases}$$

a) Clasifica el sistema según sus soluciones para los diferentes valores de *a*.
b) Resuelve el sistema para *a* = 3.

a) Escribimos la matriz de los coeficientes, A, y la matriz ampliada A/B con los términos independientes.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & a-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};\ A/B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & a-1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Estudiaremos el rango de cada una de ellas. Aplicamos el método de Gauss:

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & a-1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 2^a \ - \ 3\cdot\text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 3 & 1 & a-1 & 3 \\ -3 & -9 & -3 & -3 \\ \hline 0 & -8 & a-4 & 0 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 2^a \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 3^a \ - \ \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -3 & -1 & -1 \\ \hline 0 & -2 & 0 & 3 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 2^a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & a-4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 2^a \ - \ 4\cdot\text{Fila } 3^a \\ \begin{array}{cccc} 0 & -8 & a-4 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -12 \\ \hline 0 & 0 & a-4 & -12 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & a-4 & 0 \\ 0 & 0 & a-4 & -12 \end{pmatrix}$$

a – 4 = 0 → *a = 4*. Se plantean dos opciones.

CASO 1. Si *a = 4*.

La matriz A es equivalente a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, por lo que su rango es 2.

La matriz A/B es equivalente a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$, por lo que su rango es 3.

Como Rango de A = 2 ≠ 3 = Rango de A/B por el teorema de Rouche- Frobenius el sistema es incompatible (sin solución).

CASO 2. Si $a \neq 4$.

En este caso $a - 4 \neq 0$.

La matriz A es equivalente a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -8 & a-4 \\ 0 & 0 & a-4 \end{pmatrix}$, por lo que su rango es 3.

La matriz A/B es equivalente a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & a-4 & 0 \\ 0 & 0 & a-4 & -12 \end{pmatrix}$, por lo que su rango es 3.

Como Rango de A = 3 = Rango de A/B = Nº de incógnitas, por el teorema de Rouche-Frobenius el sistema es compatible determinado (una única solución).

b) Para $a = 3$ estamos en el caso 2 y el sistema es compatible determinado.
Como hemos obtenido con transformaciones un sistema equivalente triangular resolvemos el sistema triangular obtenido en el apartado anterior.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+3y+z=1 \\ -8y-z=0 \\ -z=-12 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+3y+z=1 \\ -8y-z=0 \\ \boxed{z=12} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x+3y+12=1 \\ -8y-12=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+3y=-11 \\ -8y=12 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+3y=-11 \\ \boxed{y=-\frac{12}{8}=-\frac{3}{2}} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x+3\left(-\frac{3}{2}\right)=-11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-\frac{9}{2}=-11 \Rightarrow \boxed{x=\frac{9}{2}-11=-\frac{13}{2}}$$

La solución es $x=-\frac{13}{2};\ y=-\frac{3}{2};\ z=12$

2B- Se espera que en los próximos diez años, los beneficios (en millones de euros) de una empresa, vengan dados por la función $P(t)=t^2-10t+16$, donde $t\in(0,10]$ es el tiempo transcurrido en años desde el momento inicial.
a) Determina en qué momento del tiempo los beneficios serán de 16 millones de euros.
b) Determina en qué momento los beneficios serán mínimos.

a) Como los beneficios, en millones de euros, vienen dados por la función $P(t)=t^2-10t+16$, debemos determinar el valor de t para el cual $P(t) = 16$:

$$\left.\begin{array}{l} P(t)=16 \\ P(t)=t^2-10t+16 \end{array}\right\} \Rightarrow t^2-10t+16=16 \Rightarrow t^2-10t=0 \Rightarrow t(t-10)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ o \\ t=10 \end{cases}$$

Dado que $t \in (0, 10]$, entonces $t = 0$ no es una solución válida y, en consecuencia el tiempo buscado es $t = 10$, es decir, al décimo año.

b)
En el punto en el cual función $P(t)$ alcanza el mínimo debe cumplirse que $P'(t) = 0$.

$$P(t)=t^2-10t+16 \Rightarrow P'(t)=2t-10$$

Por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{r} P'(t)=0 \\ P'(t)=2t-10 \end{array}\right\} \Rightarrow 2t-10=0 \Rightarrow 2t=10 \Rightarrow \boxed{t=5}$$

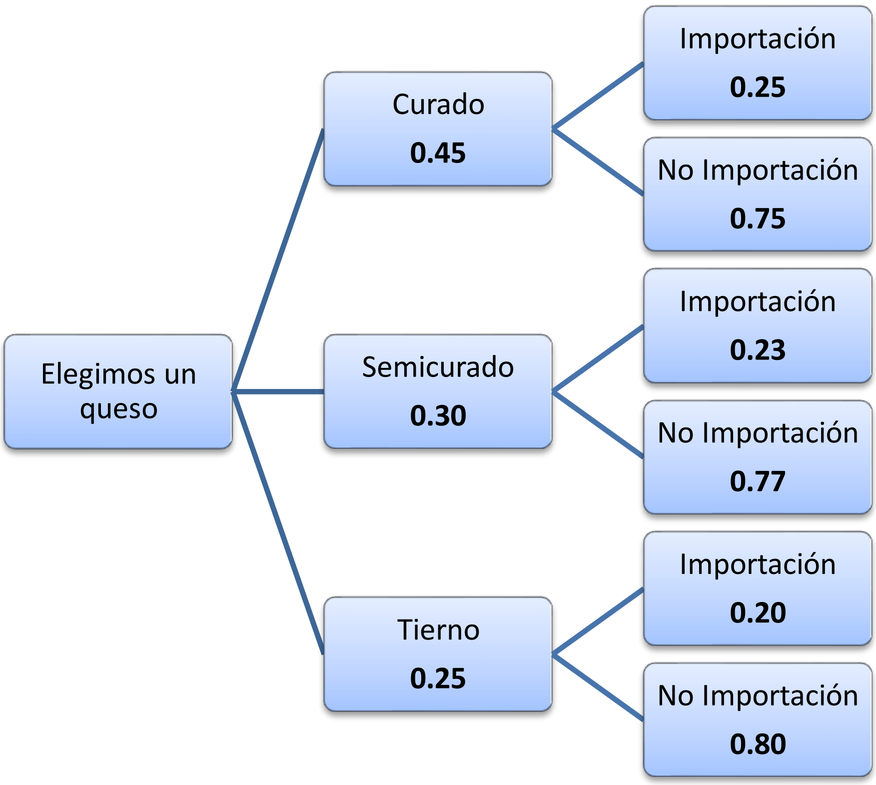
Se comprueba que para este valor de t existe un mínimo, evaluando el signo de la segunda derivada:

$$P'(t)=2t-10 \Rightarrow P''(t)=2>0$$

Como la segunda derivada es siempre positiva, sea cual sea el valor de t, podemos asegurar que hay un mínimo cuando $t = 5$ años.
En ese momento, los beneficios son $P(5) = -9$ millones de euros (es decir, la empresa tiene pérdidas millonarias).

3B- Una cadena de supermercados envasa tres variedades de queso en paquetes al vacío, en las proporciones que se indican: curado (45%), semicurado (30%) y tierno (25%). Parte del queso que recibe es de importación, concretamente, el 25% del queso curado, el 23% del semicurado y el 20% del tierno. Se elige al azar un paquete de queso.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea de importación?
b) Si el queso elegido es de importación, ¿qué probabilidad tiene de ser curado?

Realizamos el diagrama de árbol de esta situación planteada.



a) Llamamos C a elegir un queso curado, S a elegirlo semicurado, T a elegirlo tierno e I a elegirlo de importación.

$$P(\bar{I})=P(C)P(\bar{I}/C)+P(S)P(\bar{I}/S)+P(T)P(\bar{I}/T)=$$
$$=0.45\cdot 0.75+0.3\cdot 0.77+0.25\cdot 0.8=\boxed{0.7685}$$

b) Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/I)=\frac{P(C\cap I)}{P(I)}=\frac{P(C)\cdot P(C/I)}{1-P(\bar{I})}=\frac{0.45\cdot 0.25}{1-0.7685}\approx\boxed{0.486}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

Pasemos estos datos a valores absolutos suponiendo que tenemos 100 quesos.
Son curados el 45 %, es decir, 45 quesos curados, análogamente son 30 semicurados y 25 tiernos.

El 25 % de los curados (45) son de importación, luego $\frac{45\cdot 25}{100}=\frac{45}{4}$, nos da un resultado decimal pero nos sirve para nuestro cálculo aunque sea un valor no real.

El 23 % de los semicurados (30) son de importación, luego $\frac{23 \cdot 30}{100} = \frac{69}{10}$, nos da un resultado decimal pero nos sirve para nuestro cálculo aunque sea un valor no real.

El 20 % de los tiernos (25) son de importación, luego $\frac{20 \cdot 25}{100} = 5$ son quesos tiernos de importación.

Si hubiésemos supuesto que son 2000 quesos las cuentas saldrían con números naturales.

a) Tenemos 100 quesos y de importación son $\frac{45}{4} + \frac{69}{10} + 5 = \frac{463}{20}$, por lo que los que no son de importación son $100 - \frac{463}{20} = \frac{1537}{20}$. Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(\text{No sea de importación}) = \frac{\frac{1537}{20}}{100} = \boxed{\frac{1537}{2000} = 0.7685}$$

b) Si es de importación es uno de los $\frac{463}{20}$ quesos de importación. De estos son $\frac{45}{4}$ los curados, por lo que aplicando la regla de Laplace tenemos:

$$P(\text{Sea curado /Es de importación}) = \frac{\frac{45}{4}}{\frac{463}{20}} = \boxed{\frac{225}{463} \approx 0.486}$$

4B- La probabilidad de que un alumno de Matemáticas apruebe un examen tipo test es del 80%, mientras que la probabilidad de que apruebe un examen de problemas es del 60%. Si la probabilidad de aprobar los dos exámenes es del 50%, calcula la probabilidad de que no apruebe ninguno de los dos exámenes.

Hacemos una tabla de contingencia.

	Aprueban examen problemas	Suspenden examen problemas	
Aprueban examen test	**50**		**80**
Suspenden examen test			
	60		**100**

Completamos la tabla.

	Aprueban examen problemas	Suspenden examen problemas	
Aprueban examen test	**50**	**30**	**80**
Suspenden examen test	**10**	**10**	**20**
	60	**40**	**100**

Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(\text{Suspendan los dos examenes}) = \frac{\text{Nº de alumnos que aprueban test y problemas}}{\text{Nº de alumnos}} = \frac{10}{100} = \boxed{0.10}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Aplicando las fórmulas de cálculo de probabilidades.

Llamamos T = Aprobar examen tipo test, P = Aprobar examen problemas.

La probabilidad de aprobar un examen tipo test es $P(T)$ = 0,80; la de aprobar un examen de problemas es $P(P)$ = 0,60; y la de aprobar los dos, $P(T \cap P)$ = 0,50. Se pide la probabilidad de no aprobar ninguno. Nos piden calcular $P\left(\overline{T} \cap \overline{P}\right)$.

$$P\left(\overline{T} \cap \overline{P}\right) = P\left(\overline{T \cup P}\right) = 1 - P(T \cup P) = 1 - \left(P(T) + P(P) - P(T \cap P)\right)$$

$$P\left(\overline{T} \cap \overline{P}\right) = 1 - (0.80 + 0.60 - 0.50) = 1 - 0.90 = \boxed{0.10}$$