Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura
Curso 2017-2018

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

Elegir una opción entre las dos que se proponen a continuación.
Calificación máxima de la prueba: 10 puntos.
Problema 1: de 0 a 3.5 puntos; Problema 2: de 0 a 3 puntos; Problema 3: de 0 a 3.5 puntos.

OPCIÓN A

PROBLEMA 1

Con el fin de incentivar sus ventas, un vivero de árboles frutales ofrece dos tipos de lotes: el lote A formado por 1 limonero, 1 naranjo y 1 manzano y el lote B por 2 limoneros y 1 manzano. Cada lote A lo produce un beneficio de 30 euros y cada lote B un beneficio de 40 euros. Sabiendo que dispone como máximo de 1600 limoneros, 800 naranjos y 1000 manzanos, se pide:

(a) ¿Cuántos lotes de cada tipo han de ofrecer para hacer máximos los beneficios? **(3 puntos)**

(b) ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos? **(0,5 puntos)**

Justificar las respuestas.

PROBLEMA 2

En el estudio realizado recientemente sobre cambio climático, por el grupo intergubernamental de expertos, se expusieron datos sobre la disminución del hielo ártico en los océanos. Una función que ajusta esos valores desde el año 1900 es la siguiente:

$$E(t)=\begin{cases} -1,6t^2+At+9656 & si \quad 0\le t\le 60 \\ 16400-Bt & si \quad 60<t\le 110 \end{cases}$$

donde E es la extensión de hielo ártico en los océanos en millones de km^2 y t el año de estudio. Se sabe que la función es continua y tiene un máximo en el año 1937 (t=37).

(a) Determinar las constantes A y B. Justificar la respuesta. **(2 puntos)**

(b) Representar gráficamente la extensión de hielo ártico en los océanos en función del tiempo. **(1 punto)**

PROBLEMA 3

Un fotógrafo aficionado hace copia de seguridad de sus imágenes en espacios virtuales. Tiene contratados tres servicios premium: Dropbox, Onedrive y Box. Por razones de espacio, cada imagen la incluye solamente en uno de ellos. En Dropbox tiene el 40 % de sus imágenes, el 30 % en Onedrive y el resto en Box. Cada imagen está etiquetada en uno de dos tipos posibles: 'Retratos' o 'Paisajes'. En Dropbox, el 25 % son retratos, en Onedrive el 60 % y en Box, el 90 %. El resto son paisajes.

(a) Si escoge una imagen al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea retrato? **(1 punto)**

(b) Si escoge una imagen al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea paisaje y esté en Box? **(1 punto)**

(c) Si escoge una imagen al azar y es paisaje, ¿cuál es la probabilidad de que esté en Onedrive? **(1.5 puntos)**

Justificar las respuestas.

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura
Curso 2017-2018

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

OPCIÓN B

PROBLEMA 1
Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Determinar la matriz ***X*** solución de la ecuación matricial $A.X + A^2 = 2A$. **(2 puntos)**
(b) Hallar la matriz inversa de *A*. **(1.5 puntos)**
Justificar las respuestas.

PROBLEMA 2
En una urbanización se ha verificado durante un control que el consumo de agua en metros cúbicos, entre las 14 y las 21 horas, varía de acuerdo con la función:

$$C(t) = -4t^3 + 210t^2 - 3600t + 20400, \quad 14 \le t \le 21$$

Siendo *C* el agua consumida en metros cúbicos y *t* la hora de realización del control.

Se pide, justificando las respuestas:

(a) Determinar las horas de máximo y mínimo consumo de agua. **(1.5 puntos)**
(b) Hallar los valores de dichos consumos máximo y mínimo. **(0.5 puntos)**
(c) Calcular el área encerrada por la curva *C* y el eje de abscisas entre las 15 y las 20 horas. **(1 punto)**

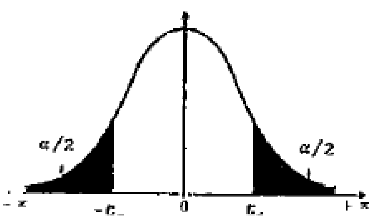
PROBLEMA 3
En una ciudad se desea estimar la proporción de hogares que reciclan sus envases de plástico. La ciudad está dividida en cuatro barrios (A, B, C y D) con 800, 2000, 1200 y 1000 hogares respectivamente. Se selecciona mediante muestreo estratificado con afijación proporcional una muestra de 400 hogares.

(a) ¿Cuántos hogares de cada uno de los barrios se incluirán en la muestra? **(0.5 puntos)**

(b) Si en el barrio B, 64 hogares de la muestra reciclan, ¿cuál es la estimación de hogares que reciclan en ese barrio? **(0.5 puntos)**

(c) Proporcionar un intervalo de confianza al 95 % para la estimación puntual anterior. **(2.5 puntos)**

Justificar las respuestas.



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

SOLUCIONES

OPCIÓN A

PROBLEMA 1
Con el fin de incentivar sus ventas, un vivero de árboles frutales ofrece dos tipos de lotes: el lote A formado por 1 limonero, 1 naranjo y 1 manzano y el lote B por 2 limoneros y 1 manzano. Cada lote A lo produce un beneficio de 30 euros y cada lote B un beneficio de 40 euros. Sabiendo que dispone como máximo de 1600 limoneros, 800 naranjos y 1000 manzanos, se pide:
(a) ¿Cuántos lotes de cada tipo han de ofrecer para hacer máximos los beneficios? **(3 puntos)**
(b) ¿Cuáles serán dichos beneficios máximos? **(0,5 puntos)**
Justificar las respuestas.

(a) Llamemos x = número de lotes A e y = número de lotes B.

La función a maximizar es el beneficio: $B(x,y)=30x+40y$

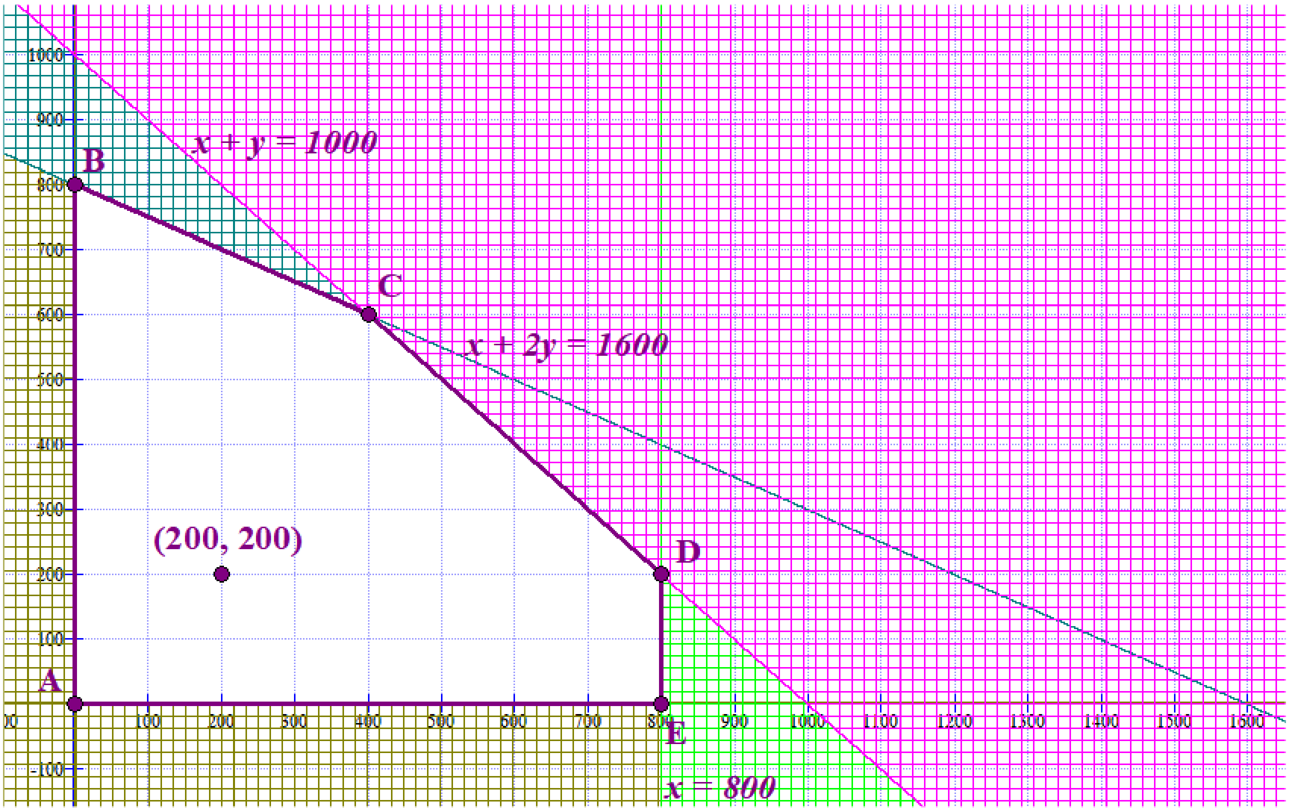
Las restricciones de la situación planteada son:

$$\left.\begin{array}{l} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ \textit{Dispone como máximo de } 1600 \text{ lim}\textit{oneros} \rightarrow x+2y\leq 1600 \\ \textit{Dispone como máximo de } 800 \textit{ naranjos} \rightarrow x\leq 800 \\ \textit{Dispone como máximo de } 1000 \textit{ manzanos} \rightarrow x+y\leq 1000 \end{array}\right\}$$

Dibujamos la región factible. Hacemos una tabla de valores para cada recta asociada a las restricciones.

x	$y=\frac{1600-x}{2}$
0	800
1600	0
400	600

x	$y=1000-x$
0	1000
1000	0
400	600



La región factible es la zona blanca del dibujo. Ya que el punto (200, 200) cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 200 \geq 0 \\ 200 \geq 0 \\ 200 + 400 \leq 1600 \\ 200 \leq 800 \\ 200 + 200 \leq 1000 \end{array}\right\}$$

Los vértices de esta región tienen coordenadas:
A(0,0); B(0, 800); C(400, 600); D(800, 200); E(800, 0)

Valorando el beneficio, $B(x,y) = 30x + 40y$, en dichos vértices obtendremos el punto donde es máximo.

A(0,0) → $B(0,0) = 0$

B(0, 800) → $B(0,800) = 0 + 32000 = 32000$

C(400, 600) → $B(400,600) = 12000 + 24000 = 36000$

D(800, 200) → $B(800,200) = 24000 + 8000 = 32000$

E(800, 0) → $B(800,0) = 24000$

El máximo beneficio es 36000 € en el punto C, que se obtiene con 400 lotes A y 600 lotes B.

(b) Es de 36000 €

PROBLEMA 2

En el estudio realizado recientemente sobre cambio climático, por el grupo intergubernamental de expertos, se expusieron datos sobre la disminución del hielo ártico en los océanos. Una función que ajusta esos valores desde el año 1900 es la siguiente:

$$E(t)=\begin{cases}-1,6t^2+At+9656 & si \quad 0\le t\le 60\\ 16400-Bt & si \quad 60<t\le 110\end{cases}$$

donde *E* es la extensión de hielo ártico en los océanos en millones de km^2 y *t* el año de estudio. Se sabe que la función es continua y tiene un máximo en el año 1937 (t=37).

(a) Determinar las constantes *A* y *B*. Justificar la respuesta. **(2 puntos)**

(b) Representar gráficamente la extensión de hielo ártico en los océanos en función del tiempo. **(1 punto)**

(a) La función E(t) tiene un máximo en t = 37. La derivada primera se anula en t = 37 y es negativa la derivada segunda.

$$E(t)=-1,6t^2+At+9656 \quad si \quad 0\le t\le 60$$

$$E'(t)=-3,2t+A$$

$$E'(37)=0\Rightarrow -3,2\cdot 37+A=0\Rightarrow \boxed{A=118,4}$$

También se cumple: $E''(t)=-3,2<0$

La función es continua en t = 60, se debe cumplir:

- Existe $E(60)=-1,6\cdot 60^2+118,4\cdot 60+9656=11000$
- Existe $\lim_{t\to 60^-}E(t)=\lim_{t\to 60^-}-1,6t^2+118,4t+9656=11000$
- Existe $\lim_{t\to 60^+}E(t)=\lim_{t\to 60^+}16400-Bt=16400-60B$
- Debe ser iguales → $16400-60B=11000\Rightarrow -60B=-5400\Rightarrow \boxed{B=\frac{5400}{60}=90}$

Los valores buscados son A = 118,4 y B = 90.

La función queda $E(t)=\begin{cases}-1,6t^2+118,4t+9656 & si \quad 0\le t\le 60\\ 16400-90t & si \quad 60<t\le 110\end{cases}$

(b)

La función es $E(t)=\begin{cases}-1,6t^2+118,4t+9656 & si \quad 0\le t\le 60\\ 16400-90t & si \quad 60<t\le 110\end{cases}$

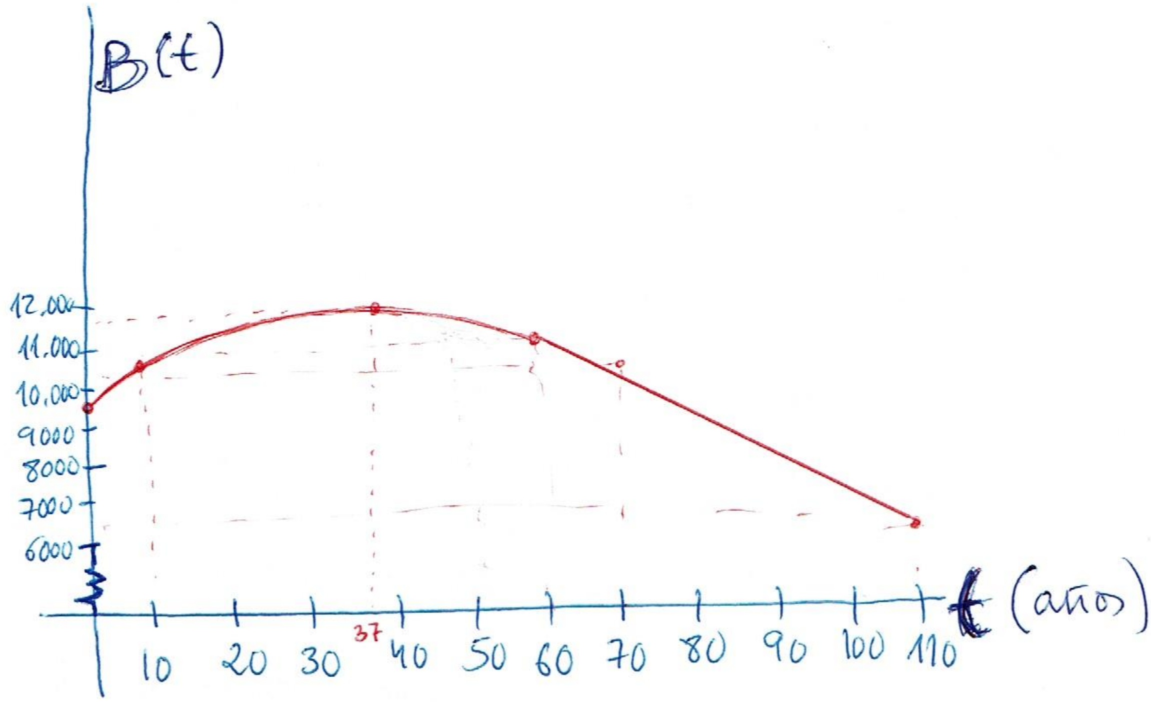
Esta es una función a trozos que es un trozo de parábola y un trozo de recta.

Obtengamos una tabla de valores.

t	$E(t)=-1,6t^2+118,4t+9656 \quad si \quad 0\le t\le 60$
0	9656
10	10680
37	11847,4
60	11000

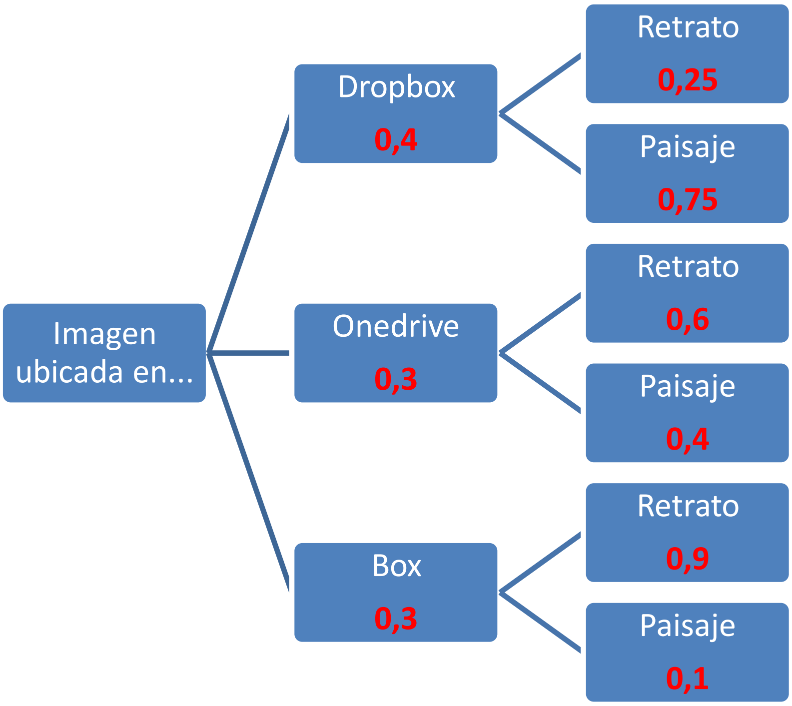
t	$E(t)=16400-90t \quad si \quad 60<t\le 110$
70	10100
110	6500
60	11000

El vértice de la parábola está en t = 37. Y la función es continua.



PROBLEMA 3
Un fotógrafo aficionado hace copia de seguridad de sus imágenes en espacios virtuales. Tiene contratados tres servicios premium: Dropbox, Onedrive y Box. Por razones de espacio, cada imagen la incluye solamente en uno de ellos. En Dropbox tiene el 40 % de sus imágenes, el 30 % en Onedrive y el resto en Box. Cada imagen está etiquetada en uno de dos tipos posibles: 'Retratos' o 'Paisajes'. En Dropbox, el 25 % son retratos, en Onedrive el 60 % y en Box, el 90 %. El resto son paisajes.
(a) Si escoge una imagen al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea retrato? **(1 punto)**
(b) Si escoge una imagen al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea paisaje y esté en Box? **(1 punto)**
(c) Si escoge una imagen al azar y es paisaje, ¿cuál es la probabilidad de que esté en Onedrive? **(1.5 puntos)**
Justificar las respuestas.

El diagrama de árbol asociado al problema es:



(a)

$$P(\text{Retrato}) = P(\text{Esté en Dropbox y sea retrato}) + P(\text{Esté en Onedrive y sea retrato}) +$$
$$+P(\text{Esté en Box y sea retrato}) = P(\text{Esté en Dropbox})P(\text{Sea retrato / Esta en Dropbox}) +$$
$$+P(\text{Esté en Onedrive})P(\text{Sea retrato / Esta en Onedrive}) +$$
$$+P(\text{Esté en Box})P(\text{Sea retrato / Esta en Box}) =$$
$$= 0,4 \cdot 0,25 + 0,3 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,9 = 0,1 + 0,18 + 0,27 = \boxed{0,55}$$

(b)

$$P(\text{Sea paisaje y esté en Box}) = P(\text{Esté en Box})P(\text{Sea paisaje / Está en Box}) = 0,3 \cdot 0,1 = \boxed{0,03}$$

(c)

$$P(\text{Esté en Onedrive / Es paisaje}) = \frac{P(\text{Esté en Onedrive y es paisaje})}{P(\text{Es paisaje})} =$$
$$= \frac{0,3 \cdot 0,4}{1 - P(\text{Es retrato})} = \frac{0,12}{1-0,55} = \frac{0,12}{0,45} = \frac{12}{45} = \frac{4}{15} = \boxed{0,266}$$

OPCIÓN B

PROBLEMA 1
Sea la matriz

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

(a) Determinar la matriz ***X*** solución de la ecuación matricial $A.X+A^2=2A$. **(2 puntos)**
(b) Hallar la matriz inversa de *A*. **(1.5 puntos)**
Justificar las respuestas.

(a) Comprobamos si la matriz A tiene inversa.

$$|A|=\begin{vmatrix}-1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}=0-4+0-(0+0-2)=-2\neq 0$$

Como el determinante es distinto de cero existe A^{-1}.
Podemos utilizar la inversa de A para despejar en la ecuación planteada.

$$A.X+A^2=2A\Rightarrow A^{-1}A.X+A^{-1}A\cdot A=A^{-1}2A\Rightarrow X+A=2Id$$

$$X=2Id-A$$

$$X=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 2\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

(b) Como el determinante de A es distinto de cero, sabemos que existe la inversa. La calculamos con la fórmula:

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ -1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}}{-2}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & 0 & -2\\ 4 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -2 & 0 & -1\\ -1 & 1/2 & -1/2\end{pmatrix}}$$

PROBLEMA 2
En una urbanización se ha verificado durante un control que el consumo de agua en metros cúbicos, entre las 14 y las 21 horas, varía de acuerdo con la función:

$$C(t) = -4t^3 + 210t^2 - 3600t + 20400, \quad 14 \le t \le 21$$

Siendo C el agua consumida en metros cúbicos y t la hora de realización del control.
Se pide, justificando las respuestas:
(a) Determinar las horas de máximo y mínimo consumo de agua. **(1.5 puntos)**
(b) Hallar los valores de dichos consumos máximo y mínimo. **(0.5 puntos)**
(c) Calcular el área encerrada por la curva C y el eje de abscisas entre las 15 y las 20 horas. **(1 punto)**

(a) Utilizamos la derivada de $C(t) = -4t^3 + 210t^2 - 3600t + 20400, \quad 14 \le t \le 21$ para determinar los puntos críticos.

$$C(t) = -4t^3 + 210t^2 - 3600t + 20400 \Rightarrow C'(t) = -12t^2 + 420t - 3600$$

$$C'(t) = 0 \Rightarrow -12t^2 + 420t - 3600 = 0 \Rightarrow -t^2 + 35t - 300 = 0$$

$$t = \frac{-35 \pm \sqrt{1225 - 1200}}{-2} = \frac{-35 \pm 5}{-2} = \begin{cases} t_1 = \dfrac{-35+5}{-2} = 15 \\ t_2 = \dfrac{-35-5}{-2} = 20 \end{cases}$$

Sustituimos estos dos valores en la derivada segunda.

$$C'(t) = -12t^2 + 420t - 3600 \Rightarrow C''(t) = -24t + 420$$

$$\begin{cases} t_1 = 15 \to C''(15) = -360 + 420 = 60 > 0 \Rightarrow t_1 = 15 \text{ es un mínimo} \\ t_2 = 20 \to C''(20) = -480 + 420 = -60 < 0 \Rightarrow t_2 = 20 \text{ es un máximo} \end{cases}$$

Se alcanza un consumo mínimo de agua a las 15 horas y máximo consumo a las 20 horas.

(b) Sustituimos en la función C(t)

$$t_1 = 15 \to C(15) = -4 \cdot 15^3 + 210 \cdot 15^2 - 3600 \cdot 15 + 20400 = 150 \text{ es el consumo mínimo}$$

$$t_2 = 20 \to C(20) = -4 \cdot 20^3 + 210 \cdot 20^2 - 3600 \cdot 20 + 20400 = 400 \text{ es el consumo máximo}$$

(c) La función no corta el eje OX entre 15 y 20. El área pedida es una integral definida.

$$\text{Área} = \int_{15}^{20} -4t^3 + 210t^2 - 3600t + 20400\,dt = \left[-t^4 + 70t^3 - 1800t^2 + 20400t\right]_{15}^{20} =$$

$$= \left[-20^4 + 70 \cdot 20^3 - 1800 \cdot 20^2 + 20400 \cdot 20\right] - \left[-15^4 + 70 \cdot 15^3 - 1800 \cdot 15^2 + 20400 \cdot 15\right] =$$

$$= 1375\,u^2$$

PROBLEMA 3
En una ciudad se desea estimar la proporción de hogares que reciclan sus envases de plástico. La ciudad está dividida en cuatro barrios (A, B, C y D) con 800, 2000, 1200 y 1000 hogares respectivamente. Se selecciona mediante muestreo estratificado con afijación proporcional una muestra de 400 hogares.

(a) ¿Cuántos hogares de cada uno de los barrios se incluirán en la muestra? **(0.5 puntos)**

(b) Si en el barrio B, 64 hogares de la muestra reciclan, ¿cuál es la estimación de hogares que reciclan en ese barrio? **(0.5 puntos)**

(c) Proporcionar un intervalo de confianza al 95 % para la estimación puntual anterior. **(2.5 puntos)**

(a) Expresamos en una tabla todos los datos

	Barrio A	Barrio B	Barrio C	Barrio D	TOTAL
Hogares	800	2000	1200	1000	5000
Muestra	a	b	c	d	400

Expresamos la proporcionalidad:

$$\frac{800}{a}=\frac{2000}{b}=\frac{1200}{c}=\frac{1000}{d}=\frac{5000}{400}$$

Para calcular cualquiera de las incógnitas, buscamos una proporción donde conozcamos 3 de los 4 datos:

$$\frac{800}{a}=\frac{5000}{400}\Rightarrow 320000=5000a\Rightarrow a=\frac{320000}{5000}=64$$

$$\frac{2000}{b}=\frac{5000}{400}\Rightarrow 800000=5000b\Rightarrow b=\frac{800000}{5000}=160$$

$$\frac{1200}{c}=\frac{5000}{400}\Rightarrow 480000=5000c\Rightarrow c=\frac{480000}{5000}=96$$

$$\frac{1000}{d}=\frac{5000}{400}\Rightarrow 400000=5000d\Rightarrow d=\frac{400000}{5000}=80$$

Por tanto, en la muestra tomaríamos 64 hogares del barrio A, 160 del barrio B, 96 del barrio C y 80 del barrio D.

(b) $\frac{64}{160}=0,4=40\%$. Reciclan unos 0,4 · 2000 = 800 hogares

(c)

$$1-\alpha=0,95\rightarrow\alpha=0,05\rightarrow\frac{\alpha}{2}=0,025\rightarrow 1-\frac{\alpha}{2}=0,975\rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=1,96$$

El Error es $z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}=1,96\cdot\sqrt{\frac{0,4\cdot 0,6}{64}}=0,12$

El intervalo de confianza es $\left(p-Error,\ \ p+Error\right)=\left(0,4-0,12,\quad 0,4+0,12\right)=\left(0,28,\ 0,52\right)$

Reciclan entre 0,28 · 2000 = 560 y 0,52 ·2000 = 1040 hogares.