EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA DE JUNIO DE 2017
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3 puntos)*

a) *(2 puntos)* Clasifique el siguiente sistema de ecuaciones, según los diferentes valores de la constante real λ:

$$\begin{aligned} x + y \quad\quad &= 1 \\ \lambda x + \quad\quad z &= 0 \\ x + (1+\lambda) y + \lambda z &= \lambda + 1 \end{aligned}$$

b) *(1 punto)* Halle la solución, si existe, cuando $\lambda = 1$

2. *(2 puntos)*

a) *(1 punto)* Determine la posición relativa de las dos rectas siguientes:

$$r: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

b) *(1 punto)* Determine la distancia del punto P(0, 0, 0) a cada una de las dos rectas anteriores.

3. *(4 puntos)*

a) Considere la función de variable real *x* siguiente:

$$f(x) = x(\ln(x))^2$$

a.1) *(0,5 puntos)* Determine el dominio de la función *f(x)*.

a.2) *(1,5 puntos)* Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de esa función.

a.3) *(1 punto)* Determine, si existen, los máximos y mínimos relativos y, en ese caso, calcule el valor de la función *f(x)* en cada uno de ellos.

b) *(1 punto)* Determine el valor de la constante *k* para que se verifique que:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 + kx - 7} - \sqrt{x^2 - 2x + 5} = \frac{5}{3}$$

4. *(1 punto)* En una clase de bachillerato hay 10 chicas y 8 chicos. De ellos 3 chicas y 4 chicos juegan al ajedrez. Si escogemos un estudiante al azar, determine las siguientes probabilidades:

a) *(0,5 puntos)* Sea chica y no juegue al ajedrez.

b) *(0,5 puntos)* No juegue al ajedrez sabiendo que es chico.

OPCIÓN B

1. *(2 puntos)*

a) *(2 puntos)* Sea A una matriz de dimensión 3 x 3 y denotamos por |A| el determinante de la matriz.

a.1) *(1 punto)* Considere la matriz $B=\left(\frac{1}{2}\right)A$. Si |B| = 1, calcule el determinante de A, es decir: |A|.

a.2) *(1 punto)* Si

$$A=\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x-1 & 2 & 0 \\ 2 & x-1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determine los valores de *x* para los que se cumple que |B| = 1, siendo $B=\left(\frac{1}{2}\right)A$.

b) *(1 punto)* Determine las matrices cuadradas de dimensión 2 x 2 de la forma:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

que verifiquen que

$$MM'=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

donde M´ representa la matriz traspuesta de M.

2. *(2 puntos)*

a) *(1 punto)* Sea "*m*" una constante real. Determine la posición relativa de los planos siguientes, según los valores de "*m*":

$$\pi : mx-6y+2z=2 \qquad \pi' : \begin{cases} x = \lambda+\mu \\ y = 1-\lambda \\ z = 2-2\lambda+\mu \end{cases}$$

b) *(1 punto)* Determine el ángulo que forman las rectas:

$$r:\begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} 2x-4y-2z=0 \\ x+y+3z=-1 \end{cases}$$

3. *(4 puntos)*

a) *(2 puntos)* Encuentre dos números tales que el doble del primero más el triple del segundo sea 24 y su producto sea máximo.

b) *(2 puntos)* Determine:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{1+sen(x)}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

4. *(1 punto)* En una urna hay 10 bolas blancas y 3 negras. Se extrae una bola al azar y, sin verla ni reemplazarla, se extrae una segunda bola.

a) *(0,5 puntos)* ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola extraída sea negra?

b) *(0,5 puntos)* Sabiendo que la segunda bola ha sido negra, calcule la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra también.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. *(3 puntos)*
a) *(2 puntos)* Clasifique el siguiente sistema de ecuaciones, según los diferentes valores de la constante real λ:

$$\begin{aligned} x+y \qquad\quad &= 1 \\ \lambda x + \qquad\quad z &= 0 \\ x+(1+\lambda)y+\lambda z &= \lambda+1 \end{aligned}$$

b) *(1 punto)* Halle la solución, si existe, cuando $\lambda = 1$

a) La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & \lambda \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1+\lambda & \lambda & \lambda+1 \end{array}\right)$

Estudiemos sus rangos según los posibles valores de λ .
En la matriz A, el mayor rango posible es 3:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & \lambda \end{vmatrix} = 0+1-\lambda^2-1-\lambda = -\lambda^2-\lambda$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -\lambda^2-\lambda = 0 \Rightarrow -\lambda(\lambda+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ o \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

Nos planteamos tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq -1$
En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. El rango de A/B también es 3, así como el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $\lambda = 0$
En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
La matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Observamos que las fila 1ª y 3ª son iguales. Buscamos un menor de orden 2 con determinante no nulo. Consideramos el menor que resulta de quitar la fila y columna 1ª → $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. El rango de A es 2.

La matriz ampliada queda $A/B=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\0&0&1&0\\1&1&0&1\end{array}\right)$. Como la columna 1ª y 2ª son iguales considero el menor de orden 3 que resulta de quitar la 1ª columna → $\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}=1-1=0$.

El rango de A/B no es 3. El rango de A/B es 2, al igual que el rango de A y menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado.

CASO 3. $\lambda=-1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz de coeficientes queda $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$. Observamos que la fila 2ª y 3ª son proporcionales. Buscamos un menor de orden 2 con determinante no nulo. Consideramos el menor que resulta de quitar la fila y columna 3ª → $\begin{vmatrix}1&1\\-1&0\end{vmatrix}=1\neq 0$. El rango de A es 2.

La matriz ampliada queda $A/B=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\-1&0&1&0\\1&0&-1&0\end{array}\right)$. Observamos que la columna 2ª y 4ª son iguales. Considero el menor de orden 3 que resulta de quitar la 2ª columna →
$\begin{vmatrix}1&0&1\\-1&1&0\\1&-1&0\end{vmatrix}=1-1=0$. El rango de A/B no es 3. El rango de A/B es 2, al igual que el rango de A y menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado.

b) Para $\lambda=1$ el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos por la regla de Cramer:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&2&1\end{pmatrix};\quad A/B=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\1&0&1&0\\1&2&1&2\end{array}\right)\qquad x=\frac{\begin{vmatrix}1&1&0\\0&0&1\\2&2&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&2&1\end{vmatrix}}=\frac{2-2}{1-1-2}=\frac{0}{-2}=0$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&2&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&2&1\end{vmatrix}}=\frac{-2}{-2}=1\qquad z=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&2&2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&2&1\end{vmatrix}}=\frac{0}{-2}=0$$

La solución es *x = 0*; *y = 1*; *z = 0*

2. *(2 puntos)*
a) *(1 punto)* Determine la posición relativa de las dos rectas siguientes:

$$r:\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=t \end{cases} \qquad s:\begin{cases} 2x-y=0 \\ 3y-2z=0 \end{cases}$$

b) *(1 punto)* Determine la distancia del punto P(0, 0, 0) a cada una de las dos rectas anteriores.

a) Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta *s*.

$$s:\begin{cases} 2x-y=0 \\ 3y-2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=y \\ -2z=-3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2}y \\ z=\dfrac{3}{2}y \end{cases} \Rightarrow s:\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}t \\ y=t \\ z=\dfrac{3}{2}t \end{cases}$$

Un vector director de la recta *s* es $\overrightarrow{u_s}=\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}\right)$. Para evitar trabajar con fracciones tomamos como vector director el vector $\overrightarrow{v_s}=2\overrightarrow{u_s}=2\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}\right)=(1,2,3)$.

Un vector director de la recta *r* es $\overrightarrow{u_r}=(1,1,1)$.

¿Son paralelas? Comprobamos que las coordenadas de los vectores directores no son proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_s}=(1,2,3) \\ \overrightarrow{u_r}=(1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{1}\neq\frac{2}{1}\neq\frac{3}{1}$$

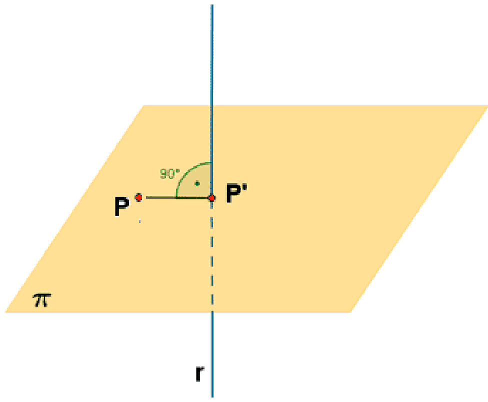
Las rectas no son paralelas y deben cortarse o cruzarse. Calculamos el producto mixto de $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{v_s}$ y $\overrightarrow{P_rQ_s}$, siendo P_r un punto de la recta *r* y Q_s un punto de *s*.

$$\left.\begin{array}{l} P_r(1,1,0) \\ Q_s(0,0,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_rQ_s}=(0,0,0)-(1,1,0)=(-1,-1,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_s}=(1,2,3) \\ \overrightarrow{u_r}=(1,1,1) \\ \overrightarrow{P_rQ_s}=(-1,-1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{P_rQ_s}\right]=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0-3-1+2-0+3=1\neq 0$$

Al ser su producto mixto no nulo sabemos que las rectas se cruzan.

b) Para calcular la distancia desde el punto P a la recta *r* calcularemos el plano π perpendicular a *r* que pasa por P. Obtenemos el punto P´ de corte de plano y recta y la distancia de P a *r* será la distancia de P a P´.



Obtenemos la ecuación del plano π.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}=\overrightarrow{u_r}=(1,1,1)\\ P(0,0,0)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\pi: x+y+z+k=0\\ P(0,0,0)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow 0+0+0+k=0\Rightarrow k=0\Rightarrow \pi: x+y+z=0$$

Obtenemos las coordenadas del punto P´.

$$\left.\begin{array}{l}\pi: x+y+z=0\\ r:\begin{cases}x=1+t\\ y=1+t\\ z=t\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow 1+t+1+t+t=0\Rightarrow 3t=-2\Rightarrow t=\frac{-2}{3}\Rightarrow\begin{cases}x=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\\ y=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\\ z=\frac{-2}{3}\end{cases}\Rightarrow P´\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{-2}{3}\right)$$

Calculamos la distancia de P a *r*.

$$\left.\begin{array}{l}P´\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{-2}{3}\right)\\ P(0,0,0)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{PP´}=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{-2}{3}\right)-(0,0,0)=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{-2}{3}\right)$$

$$d(P,r)=d(P,P´)=\left|\overrightarrow{PP´}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{-2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}}=\boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}u}$$

La distancia del punto P a la recta *r* es $\frac{\sqrt{6}}{3}u$

El punto P(0, 0, 0) es el punto Q_s utilizado en el apartado a) y pertenece a la recta *s*. Por ello la distancia de P a *s* es 0.

3. *(4 puntos)*

a) Considere la función de variable real x siguiente:

$$f(x) = x(\ln(x))^2$$

a.1) *(0,5 puntos)* Determine el dominio de la función *f(x)*.

a.2) *(1,5 puntos)* Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de esa función.

a.3) *(1 punto)* Determine, si existen, los máximos y mínimos relativos y, en ese caso, calcule el valor de la función *f(x)* en cada uno de ellos.

b) *(1 punto)* Determine el valor de la constante k para que se verifique que:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+kx-7} - \sqrt{x^2-2x+5} = \frac{5}{3}$$

a.1) Se trata del producto de dos funciones continuas cuyo dominio es el dominio de la función logaritmo neperiano. Dominio de *f(x)* es $(0,+\infty)$

a.2) Utilizamos la derivada.

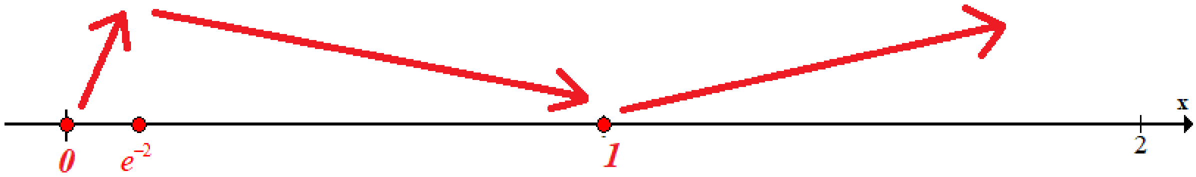
$$f(x) = x(\ln(x))^2 \Rightarrow f'(x) = (\ln(x))^2 + x\cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = (\ln(x))^2 + 2\ln x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (\ln(x))^2 + 2\ln x = 0 \Rightarrow \ln x(\ln x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \ln x = 0 \to x = e^0 = 1 \\ \ln x + 2 = 0 \to \ln x = -2 \to x = e^{-2} \end{cases}$$

Existen dos puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En $(0,e^{-2})$ tomamos $x = e^{-3}$ y la derivada vale $f'(e^{-3}) = (\ln(e^{-3}))^2 + 2\ln e^{-3} = 9-6 = 3 > 0$. La función crece en $(0,e^{-2})$.
- En $(e^{-2},1)$ tomamos $x = e^{-1}$ y la derivada vale $f'(e^{-1}) = (\ln(e^{-1}))^2 + 2\ln e^{-1} = 1-2 = -1 < 0$. La función decrece en $(e^{-2},1)$.
- En $(1,+\infty)$ tomamos $x = e$ y la derivada vale $f'(x) = (\ln(e))^2 + 2\ln e = 1+2 = 3 > 0$. La función crece en $(1,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en $(0,e^{-2}) \cup (1,+\infty)$ y decrece en $(e^{-2},1)$.

a.3) Observando el esquema anterior la función presenta un máximo relativo en $x = e^{-2}$, como $f(e^{-2}) = e^{-2}(\ln(e^{-2}))^2 = e^{-2}(-2)^2 = 4e^{-2}$ el máximo relativo tiene coordenadas $(e^{-2}, 4e^{-2})$.

La función tiene un mínimo relativo en $x = 1$, como $f(1)=1\cdot(\ln(1))^2=(0)^2=0$ el mínimo relativo tiene coordenadas (1, 0).

b)

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+kx-7}-\sqrt{x^2-2x+5}=\infty-\infty=\text{Indeterminación}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+kx-7}-\sqrt{x^2-2x+5}\right)\left(\sqrt{x^2+kx-7}+\sqrt{x^2-2x+5}\right)}{\sqrt{x^2+kx-7}+\sqrt{x^2-2x+5}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+kx-7}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-2x+5}\right)^2}{\sqrt{x^2+kx-7}+\sqrt{x^2-2x+5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+kx-7-\left(x^2-2x+5\right)}{\sqrt{x^2+kx-7}+\sqrt{x^2-2x+5}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+kx-7-\cancel{x^2}+2x-5}{\sqrt{x^2+kx-7}+\sqrt{x^2-2x+5}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(k+2)x-12}{\sqrt{x^2+kx-7}+\sqrt{x^2-2x+5}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{(k+2)x}{x}-\frac{12}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{kx}{x^2}-\frac{7}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{5}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{k+2-\frac{12}{x}}{\sqrt{1+\frac{k}{x}-\frac{7}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}}=$$

$$=\frac{k+2-0}{\sqrt{1+0-0}+\sqrt{1-0+0}}=\frac{k+2}{2}=\frac{5}{3}\Rightarrow 3k+6=10\Rightarrow 3k=4\Rightarrow\boxed{k=\frac{4}{3}}$$

4. *(1 punto)* En una clase de bachillerato hay 10 chicas y 8 chicos. De ellos 3 chicas y 4 chicos juegan al ajedrez. Si escogemos un estudiante al azar, determine las siguientes probabilidades:
a) *(0,5 puntos)* Sea chica y no juegue al ajedrez.
b) *(0,5 puntos)* No juegue al ajedrez sabiendo que es chico.

Realizamos una tabla de contingencia.

	Juegan al ajedrez	No juegan al ajedrez	
Chicos	4		8
Chicas	3		10
			18

Completamos la tabla.

	Juegan al ajedrez	No juegan al ajedrez	
Chicos	4	4	8
Chicas	3	7	10
	7	11	18

a) Llamamos C al suceso "Elegir chica", por lo que $\overline{C}$ es el suceso "Elegir chico". Llamamos A al suceso "juega al ajedrez".
Aplicamos la regla de Laplace para el cálculo de la probabilidad pedida.

$$P\left(C \cap \overline{A}\right) = \frac{\text{Nº de chicas que no juegan al ajedrez}}{\text{Nº total de alumnos}} = \boxed{\frac{7}{18} \approx 0.3889}$$

b) Aplicamos la regla de Laplace para el cálculo de la probabilidad pedida.

$$P\left(\overline{A}/\overline{C}\right) = \frac{\text{Nº de chicos que no juegan al ajedrez}}{\text{Nº de chicos}} = \frac{4}{8} = \boxed{0.5}$$

OPCIÓN B

1. *(2 puntos)*
a) *(2 puntos)* Sea A una matriz de dimensión 3 x 3 y denotamos por |A| el determinante de la matriz.
a.1) *(1 punto)* Considere la matriz $B=\left(\frac{1}{2}\right)A$. Si |B| = 1, calcule el determinante de A, es decir: |A|.
a.2) *(1 punto)* Si

$$A=\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x-1 & 2 & 0 \\ 2 & x-1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determine los valores de *x* para los que se cumple que |B| = 1, siendo $B=\left(\frac{1}{2}\right)A$.
b) *(1 punto*) Determine las matrices cuadradas de dimensión 2 x 2 de la forma:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

que verifiquen que

$$MM'=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

donde M´ representa la matriz traspuesta de M.

a.1) $|B|=1 \Rightarrow \left|\left(\frac{1}{2}\right)A\right|=1 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} A \text{ es una matriz 3x3} \\ \left|\frac{1}{2}A\right|=\left(\frac{1}{2}\right)^3|A| \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3|A|=1 \Rightarrow \frac{1}{8}|A|=1 \Rightarrow \boxed{|A|=8}$

a.2)

$$B=\left(\frac{1}{2}\right)A \Rightarrow |B|=\frac{1}{8}\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x-1 & 2 & 0 \\ 2 & x-1 & 2 \end{vmatrix}=\frac{1}{8}\left(4x+0+(x-1)^2-4-2x+2\right)$$

$$|B|=\frac{1}{8}\left(4x+x^2+1-2x-4-2x+2\right)=\frac{1}{8}\left(x^2-1\right)$$

$$|B|=1 \Rightarrow \frac{1}{8}\left(x^2-1\right)=1 \Rightarrow x^2-1=8 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt{9}=\pm 3}$$

b) $M=\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & y \end{pmatrix}$

$$MM'=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1+x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1+x^2=1 \\ xy=0 \\ y^2=4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2=0 \Rightarrow x=0 \\ xy=0 \\ y=\sqrt{4}=\pm 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=0;\ y=\pm 2}$$

2. *(2 puntos)*
a) *(1 punto)* Sea "m" una constante real. Determine la posición relativa de los planos siguientes, según los valores de "m":

$$\pi : mx - 6y + 2z = 2 \qquad \pi' : \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 - 2\lambda + \mu \end{cases}$$

b) *(1 punto)* Determine el ángulo que forman las rectas:

$$r : \begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} 2x - 4y - 2z = 0 \\ x + y + 3z = -1 \end{cases}$$

a) Los dos planos pueden ser secantes, paralelos o coincidentes.
Obtenemos los vectores normales de ambos planos.

$$\pi : mx - 6y + 2z = 2 \Rightarrow \vec{n} = (m, -6, 2)$$

$$\pi' : \begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 - 2\lambda + \mu \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{u} = (1, -1, -2) \\ \vec{v} = (1, 0, 1) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{n'} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -i - 2j + k - j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{n'} = -i - 3j + k = (-1, -3, 1)$$

Para que sean paralelos sus vectores normales deben tener coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n} = (m, -6, 2) \\ \vec{n'} = (-1, -3, 1) \\ \pi \parallel \pi' \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{m}{-1} = \frac{-6}{-3} = \frac{2}{1} \Rightarrow -m = 2 \Rightarrow m = -2$$

Si $m = -2$ los planos son paralelos o coincidentes.
Tomamos un punto del plano π´. Por ejemplo P(0, 1, 2). Comprobamos si pertenece o no al plano π.

$$\left.\begin{array}{l} \pi : -2x - 6y + 2z = 2 \\ P(0,1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow ¿0 - 6 + 4 = 0? \text{ ¡¡No se cumple!!}$$

Como el punto P del plano π´ no pertenece al plano π los planos son paralelos.

Si $m \neq -2$ los vectores normales no tienen coordenadas proporcionales y no tienen la misma dirección, por lo que los planos son secantes.

b) El ángulo que forman las rectas es el formado por sus vectores directores.

$$r : \begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - z \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \vec{u_r} = (-1, 0, 1)$$

$$s:\begin{cases}2x-4y-2z=0\\x+y+3z=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-2y-z=0\\x+y+3z=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2y+z\\x+y+3z=-1\end{cases}\Rightarrow 2y+z+y+3z=-1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3y+4z=-1\Rightarrow 3y=-1-4z\Rightarrow y=-\frac{1}{3}-\frac{4}{3}z\Rightarrow x=2\left(-\frac{1}{3}-\frac{4}{3}z\right)+z\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=-\frac{2}{3}-\frac{8}{3}z+z=-\frac{2}{3}-\frac{5}{3}z\Rightarrow s:\begin{cases}x=-\frac{2}{3}-\frac{5}{3}t\\y=-\frac{1}{3}-\frac{4}{3}t\\z=t\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{u_s}=\left(-\frac{5}{3},-\frac{4}{3},1\right)$$

Tomamos como vectores directores $\overrightarrow{u_r}=(-1,0,1)$ y $\overrightarrow{v_s}=3\overrightarrow{u_s}=(-5,-4,3)$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(-1,0,1)\\\overrightarrow{v_s}=(-5,-4,3)\end{array}\right\}\Rightarrow\cos(r,s)=\cos\left(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{v_s}\right)=\frac{\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{v_s}}{\left|\overrightarrow{u_r}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v_s}\right|}\Rightarrow$$

$$\cos(r,s)=\frac{(-1,0,1)(-5,-4,3)}{\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{(-5)^2+(-4)^2+3^2}}=\frac{5+3}{\sqrt{2}\sqrt{50}}=0.8\Rightarrow\boxed{\acute{a}ngulo(r,s)\approx 36^{\circ}}$$

3. *(4 puntos)*
a) *(2 puntos)* Encuentre dos números tales que el doble del primero más el triple del segundo sea 24 y su producto sea máximo.
b) *(2 puntos)* Determine:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{1+sen(x)}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

a) Sean x e y los números buscados. Debe cumplirse: $2x+3y=24$.
Despejamos "y" en la ecuación.

$$2x+3y=24 \Rightarrow 3y=24-2x \Rightarrow y=\frac{24-2x}{3}$$

La función a maximizar es $f(x,y)=xy$. Sustituimos el valor de "y".

$$\left.\begin{array}{l} f(x,y)=xy \\ y=\dfrac{24-2x}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=x\frac{24-2x}{3}=\frac{24x-2x^2}{3}=8x-\frac{2}{3}x^2$$

Utilizamos la derivada para obtener el máximo de la función.

$$f(x)=8x-\frac{2}{3}x^2 \Rightarrow f'(x)=8-\frac{4}{3}x$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 8-\frac{4}{3}x=0 \Rightarrow \frac{4}{3}x=8 \Rightarrow 4x=24 \Rightarrow x=\frac{24}{4}=6$$

En $x = 6$ hay un punto crítico, sustituimos en la segunda derivada para comprobar que es máximo.

$$f'(x)=8-\frac{4}{3}x \Rightarrow f''(x)=-\frac{4}{3} \Rightarrow f''(6)=-\frac{4}{3}<0$$

En $x = 6$ hay un máximo relativo. El otro número lo obtenemos sustituyendo en $y=\frac{24-12}{3}=4$.

Los números buscados son 6 y 4.

b)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{1+sen(x)}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\left(\frac{0+1}{1+sen(0)}\right)^{\frac{1}{0^2}}=1^{+\infty}=\text{Indeterminación}(n^o\ e)=$$

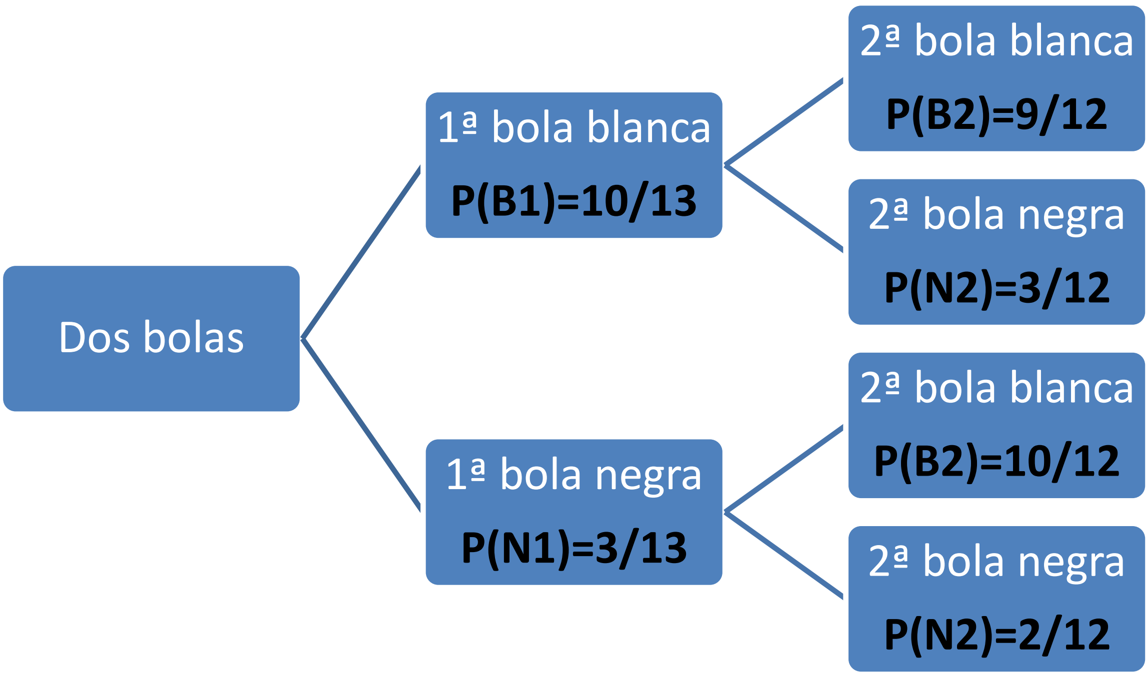
$$=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{x+1}{1+sen(x)}-1\right)}=\ldots$$ Calculamos el límite del exponente.

$$\boxed{\begin{array}{l}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{x+1-1-senx}{1+sen(x)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{x-senx}{1+senx}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-senx}{x^2+x^2senx}=\frac{0}{0}=\\ \\ =\text{Indeterminación(L´Hôpital)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x+2xsenx+x^2\cos x}=\frac{0}{0}=\\ \\ =\text{Indeterminación(L´Hôpital)}=\lim_{x\to 0}\frac{senx}{2+2senx+2x\cos x+2x\cos x-x^2senx}=\frac{0}{2}=0\end{array}}$$

Sustituimos en el límite inicial$\ldots=e^0=\boxed{1}$

4. *(1 punto)* En una urna hay 10 bolas blancas y 3 negras. Se extrae una bola al azar y, sin verla ni reemplazarla, se extrae una segunda bola.
a) *(0,5 puntos)* ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola extraída sea negra?
b) *(0,5 puntos)* Sabiendo que la segunda bola ha sido negra, calcule la probabilidad de que la primera bola extraída fuera negra también.

Realizamos un diagrama de árbol.
Llamamos B_1 al suceso "la primera bola extraída es blanca", N_1 al suceso "la primera bola extraída es negra", B_2 "la segunda bola extraída es blanca" y N_2 "la segunda bola extraída es negra".



a) Aplicando el teorema de la probabilidad total.

$$P(N_2)=P(B_1)P(N_2/B_1)+P(N_1)P(N_2/N_1)=\frac{10}{13}\cdot\frac{3}{12}+\frac{3}{13}\cdot\frac{2}{12}=\frac{36}{156}=\boxed{\frac{3}{13}\approx 0.23}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(N_1/N_2)=\frac{P(N_1\cap N_2)}{P(N_2)}=\frac{P(N_1)P(N_2/N_1)}{P(N_2)}=\frac{\frac{3}{13}\cdot\frac{2}{12}}{\frac{3}{13}}=\boxed{\frac{1}{6}\approx 0.1667}$$