Universidad Zaragoza 1542

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE DE 2017
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3 puntos)* Sea "m" una constante real. Determine para qué valores de "m" el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$\begin{aligned} 5x+4y+2z&=0\\ 2x+3y+z&=0\\ 4x-y+m^2z&=m-1 \end{aligned}$$

2. *(2 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Estudie la posición relativa de los planos:

$$\pi : x-2y+z=1 \qquad \pi' : \begin{cases} x=2\lambda+\mu \\ y=\lambda+k\mu \\ z=1-\mu \end{cases}$$

según los diferentes valores de la constante real **k**.

b) *(0,5 puntos)* Determine el ángulo que forman esos planos cuando **k** = 3.

3. *(4 puntos)* Considere la función:

$$f(x)=\frac{x^2}{(1+x)}$$

a) *(0,5 puntos)* Determine el dominio de la función.

b) *(1,5 puntos)* Determine, si existen, sus asíntotas.

c) *(2 puntos)* Determine los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento de la función $f(x)$ así como sus máximos y mínimos relativos, si existen.

4. *(1 punto)* Se dispone de dos cajas con bolas blancas y negras. La caja *A* contiene 6 bolas blancas y 3 negras; y la caja *B* contiene 4 bolas blancas y 5 negras. Se lanza un dado y si sale par se sacan dos bolas de la caja *A*, una tras otra, sin reponer ninguna. Por su parte, si sale impar al lanzar el dado se sacan dos bolas de la caja *B*, también una tras otra, sin reponer ninguna.
¿Cuál es la probabilidad de extraer exactamente dos bolas blancas?

OPCIÓN B

1. *(3 puntos)* Sea k una constante real y considere la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & k & 3k+2\\ 1 & 0 & -k\end{pmatrix}$$

a) *(1 punto)* Estudie la existencia de inversa de la matriz A según los diferentes valores de k.
b) *(1 punto)* Si $k = 2$, calcule la inversa de A, si existe.
c) *(1 punto)* Determine el rango de la matriz A según los diferentes valores de k.

2. *(2 puntos)*
a) *(1,5 puntos)* Determine, **como intersección de dos planos**, la ecuación de la recta que es paralela a la recta:

$$r:\begin{cases}2x-3y+z=4\\ y+z=0\end{cases}$$

y pasa por el punto P:(2,1,−1).

b) *(0,5 puntos)* Determine el ángulo que forman los dos planos siguientes:

$$\pi : 2x-3y+z=4$$
$$\pi': \quad y+z=0$$

3. *(4 puntos)*
a) *(1 punto)* Determine los valores de *"a"* y *"b"* para que la función que aparece a continuación sea continua:

$$f(x)=\begin{cases}1/e^{x} & si\ \ x\le 0\\ a\cos(x)+b & si\ \ 0<x\le\pi\\ sen(x)-ax & si\ \ \pi<x\end{cases}$$

b) *(1,5 puntos)* Calcule la integral:

$$\int x^2(\ln x)^2\,dx$$

c) *(1,5 puntos)* Determine el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 1}\left(e^{(x-1)}-1\right)^{(x-1)}$$

4. *(1 punto)* En una clase de bachillerato, el 60% de los alumnos aprueban matemáticas, el 50% aprueban inglés y el 30% aprueban las dos asignaturas. Calcule la probabilidad de que un alumno elegido al azar:

a) *(0,5 puntos)* Apruebe alguna de las dos asignaturas (una o las dos).

b) *(0,5 puntos)* Apruebe Matemáticas sabiendo que ha aprobado inglés.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. *(3 puntos)* Sea "m" una constante real. Determine para qué valores de "m" el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible:

$$5x+4y+2z=0$$
$$2x+3y+z=0$$
$$4x-y+m^2z=m-1$$

La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix}5 & 4 & 2\\ 2 & 3 & 1\\ 4 & -1 & m^2\end{pmatrix}$

y la matriz ampliada es $A/B=\left(\begin{array}{ccc|c}5 & 4 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 1 & 0\\ 4 & -1 & m^2 & m-1\end{array}\right)$

Estudiamos el rango de A. Para ello calculamos su determinante y vemos cuando se anula.

$$|A|=\begin{vmatrix}5 & 4 & 2\\ 2 & 3 & 1\\ 4 & -1 & m^2\end{vmatrix}=15m^2+16-4-24-8m^2+5=7m^2-7$$

$$|A|=0\Rightarrow 7m^2-7=0\Rightarrow m^2-1=0\Rightarrow m^2=1\Rightarrow m=\sqrt{1}=\pm 1$$

Nos planteamos tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $m\neq\pm 1$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. También el rango de A/B es 3, así como el número de incógnitas. Por lo que el sistema es compatible determinado.

CASO 2. $m=1$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz A queda $A=\begin{pmatrix}5 & 4 & 2\\ 2 & 3 & 1\\ 4 & -1 & 1\end{pmatrix}$. Buscamos un menor de orden 2 con determinante no nulo, por ejemplo, consideramos el menor que resulta de quitar la fila y columna 3ª →

$\begin{vmatrix}5 & 4\\ 2 & 3\end{vmatrix}=15-8=7\neq 0$. El rango de A es 2.

La matriz ampliada queda $A/B=\left(\begin{array}{ccc|c}5 & 4 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 1 & 0\\ 4 & -1 & 1 & 0\end{array}\right)$, por lo que su rango es 2, igual que el de A y menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado.

CASO 3. $m=-1$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz A queda $A=\begin{pmatrix}5 & 4 & 2\\ 2 & 3 & 1\\ 4 & -1 & 1\end{pmatrix}$. Igual que en el caso 2. El rango de A es 2.

La matriz ampliada queda $A/B=\left(\begin{array}{ccc|c}5 & 4 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 1 & 0\\ 4 & -1 & 1 & -2\end{array}\right)$. Comprobamos si su rango es 3 calculando el determinante del menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 1ª →

$\begin{vmatrix}4 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ -1 & 1 & -2\end{vmatrix}=-8+12=4\neq 0$. El rango de A/B es 3.

Rango de A = 2 ≠ 3 = Rango de A/B. El sistema es incompatible.

Resumiendo: Si $m\neq\pm 1$ el sistema es compatible determinado, si $m=1$ el sistema es compatible indeterminado y si $m=-1$ el sistema es incompatible.

2. *(2 puntos)*
a) *(1,5 puntos)* Estudie la posición relativa de los planos:

$$\pi: x-2y+z=1 \qquad \pi': \begin{cases} x=2\lambda+\mu \\ y=\lambda+k\mu \\ z=1-\mu \end{cases}$$

según los diferentes valores de la constante real **k**.
b) *(0,5 puntos)* Determine el ángulo que forman esos planos cuando **k** = 3.

a) El vector normal del plano $\pi: x-2y+z=1$ es $\vec{n}=(1,-2,1)$.

El vector normal del plano $\pi': \begin{cases} x=2\lambda+\mu \\ y=\lambda+k\mu \\ z=1-\mu \end{cases}$ es el producto vectorial de sus vectores directores $\vec{u}=(2,1,0)$ y $\vec{v}=(1,k,-1)$. Obtenemos sus coordenadas.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}=(2,1,0) \\ \vec{v}=(1,k,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{n'}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & k & -1 \end{vmatrix}=-\vec{i}+2k\vec{k}-\vec{k}+2\vec{j}=-\vec{i}+2\vec{j}+(2k-1)\vec{k}=(-1,2,2k-1)$$

Si los vectores normales de los planos tienen coordenadas proporcionales los planos serán paralelos o coincidentes. En caso contrario serán secantes.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}=(1,-2,1) \\ \vec{n'}=(-1,2,2k-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{-1}=\frac{-2}{2}=\frac{1}{2k-1} \Rightarrow -1=\frac{1}{2k-1} \Rightarrow 1-2k=1 \Rightarrow 2k=0 \Rightarrow k=0$$

Si $k \neq 0$ las coordenadas de los vectores normales no son proporcionales y los planos son secantes.

Si $k = 0$ las coordenadas de los vectores normales son proporcionales y los planos son coincidentes o paralelos. Vemos cual de estas situaciones se cumple comprobando si el punto P(0, 0, 1) perteneciente al plano π´ pertenece al plano π.

$$\left.\begin{array}{l} \pi: x-2y+z=1 \\ ¿P(0,\ 0,\ 1)\in\pi? \end{array}\right\} \Rightarrow ¿0-2\cdot 0+1=1? \ \text{¡¡Se cumple!!}$$

El punto P pertenece al plano π y por tanto los planos son coincidentes.

Resumiendo: Si $k \neq 0$ los planos son secantes y si $k = 0$ los planos son coincidentes.

b) Para $k = 3$ los planos son secantes y averiguamos el ángulo que forman estudiando el ángulo que forman sus vectores normales.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}=(1,-2,1) \\ \vec{n'}=(-1,2,5) \end{array}\right\} \Rightarrow \cos(\pi,\pi')=\cos(\vec{n},\vec{n'})=\frac{\vec{n}\cdot\vec{n'}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{n'}|}=\frac{(1,-2,1)(-1,2,5)}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+2^2+5^2}}$$

$$\cos(\pi,\pi')=\frac{-1-4+5}{\sqrt{6}\sqrt{30}}=\frac{0}{\sqrt{180}}=0 \Rightarrow \boxed{(\pi,\pi')=90^{\circ}}$$

3. *(4 puntos)* Considere la función:

$$f(x)=\frac{x^2}{(1+x)}$$

a) *(0,5 puntos)* Determine el dominio de la función.

b) *(1,5 puntos)* Determine, si existen, sus asíntotas.

c) *(2 puntos)* Determine los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento de la función $f(x)$ así como sus máximos y mínimos relativos, si existen.

a) $f(x)=\frac{x^2}{(1+x)}$ es una función racional. Su dominio está formado por todos los valores reales que no anulen el denominador. Dominio *f(x)* = $\mathbb{R}-\{-1\}$

b) **Asíntotas verticales**. $x=a$

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^2}{(1+x)}=\frac{(-1)^2}{1-1}=\frac{1}{0}=\infty$$

$x=-1$ es asíntota vertical de la función.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{1+x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to +\infty} x=+\infty$$

No tiene asíntotas horizontales

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{1+x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{1+x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}-x-\cancel{x^2}}{1+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{1+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x}=-1$$

$y=x-1$ es asíntota oblicua de la función.

c) Utilizamos la derivada.

$$f(x)=\frac{x^2}{(1+x)}\Rightarrow f'(x)=\frac{2x(1+x)-1\cdot x^2}{(1+x)^2}=\frac{2x+2x^2-x^2}{(1+x)^2}=\frac{2x+x^2}{(1+x)^2}$$

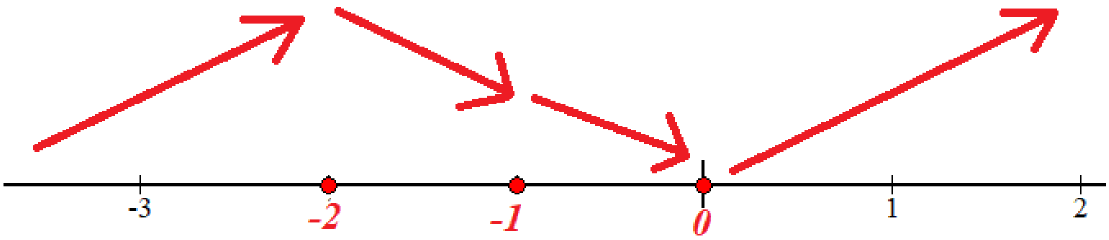
$$f'(x)=0\Rightarrow \frac{2x+x^2}{(1+x)^2}=0\Rightarrow 2x+x^2=0\Rightarrow x(2+x)=0\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ o \\ x=-2\end{cases}$$

Tenemos dos valores críticos de la función: *x = 0* y *x = –2*.
Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores e incluimos $x=-1$ por estar excluido del dominio.

- En $(-\infty,-2)$ tomamos *x = –3* y la derivada vale $f'(-3)=\frac{-6+(-3)^2}{(1-3)^2}=\frac{3}{4}>0$. La función crece en $(-\infty,-2)$.

- En $(-2,-1)$ tomamos $x = -1.5$ y la derivada vale $f'(-1.5) = \frac{-3+(-1.5)^2}{(1-1.5)^2} = \frac{-0.75}{0.25} < 0$. La función decrece en $(-2,-1)$.
- En $(-1,0)$ tomamos $x = -0.5$ y la derivada vale $f'(-0.5) = \frac{-1+(-0.5)^2}{(1-0.5)^2} = \frac{-0.75}{0.25} < 0$. La función decrece en $(-1,0)$.
- En $(0,+\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{2+1^2}{(1+1)^2} = \frac{3}{4} > 0$. La función crece en $(0,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente



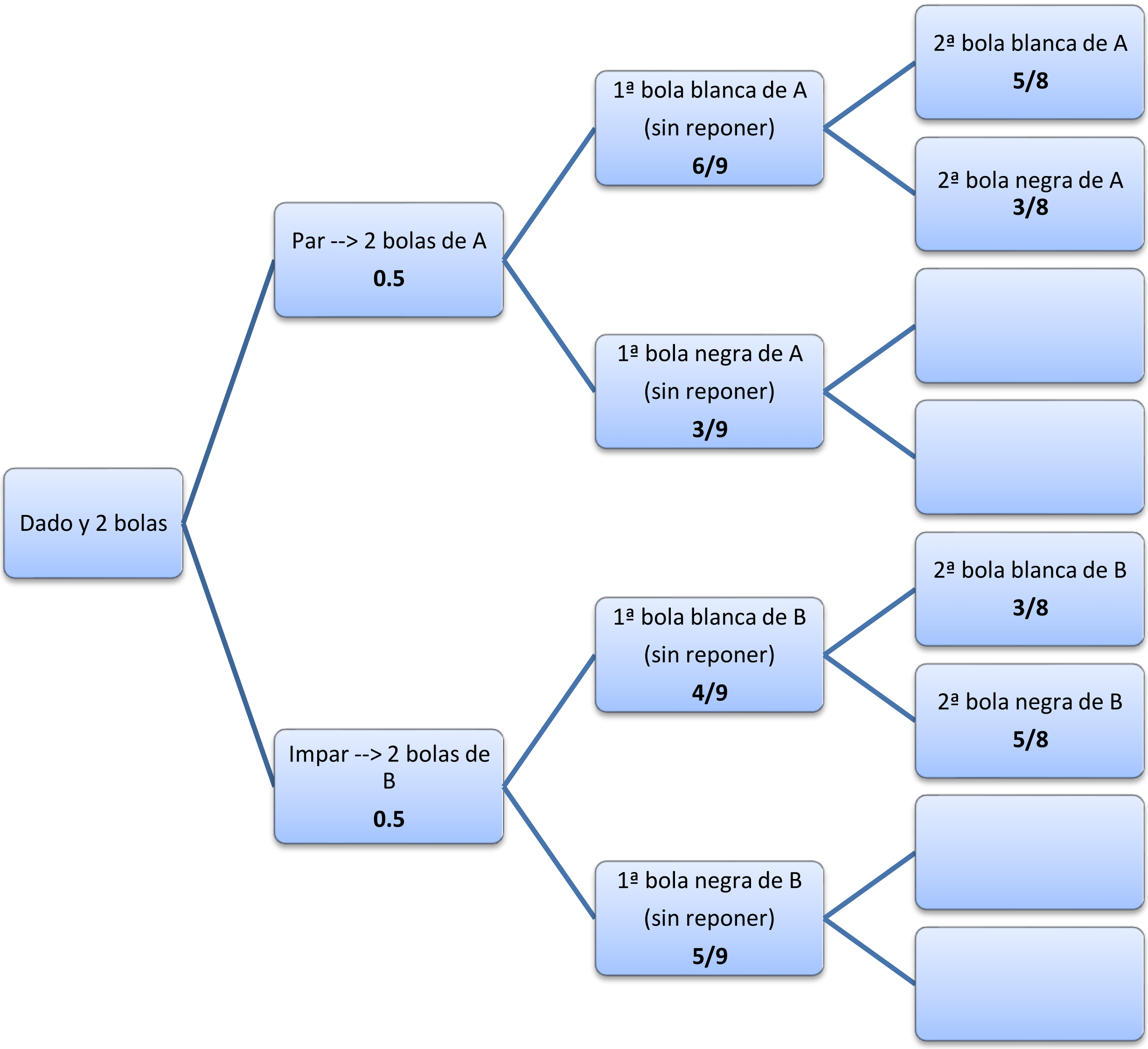
La función crece en $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ y decrece en $(-2,-1)\cup(-1,0)$.

La función presenta un máximo en $x = -2$. Como $f(-2) = \frac{(-2)^2}{(1-2)} = \frac{4}{-1} = -4$, el máximo relativo tiene coordenadas $(-2, -4)$.

La función presenta un mínimo en $x = 0$. Como $f(0) = \frac{0^2}{(1+0)} = 0$, el mínimo relativo tiene coordenadas $(0, 0)$.

4. *(1 punto)* Se dispone de dos cajas con bolas blancas y negras. La caja *A* contiene 6 bolas blancas y 3 negras; y la caja *B* contiene 4 bolas blancas y 5 negras. Se lanza un dado y si sale par se sacan dos bolas de la caja *A*, una tras otra, sin reponer ninguna. Por su parte, si sale impar al lanzar el dado se sacan dos bolas de la caja *B*, también una tras otra, sin reponer ninguna.
¿Cuál es la probabilidad de extraer exactamente dos bolas blancas?

Realizamos un diagrama de árbol.



Llamamos P = "sale par al lanzar el dado", I = "sale impar al lanzar el dado", B_1 = "la primera bola extraída es blanca", N_1 = "la primera bola extraída es negra", B_2 = "la segunda bola es blanca y N_2 = "la segunda bola es negra".

El suceso del cual nos piden calcular su probabilidad solo ocurre en dos de las ramas del árbol.

$$P(\text{Sacar exactamente 2 bolas blancas}) =$$
$$= P(P)P(B_1/P)P(B_2/B_1) + P(I)P(B_1/I)P(B_2/B_1)$$
$$= 0.5\cdot\frac{6}{9}\cdot\frac{5}{8} + 0.5\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8} = \frac{15}{72} + \frac{6}{72} = \frac{21}{72} = \boxed{\frac{7}{24} \approx 0.2917}$$

OPCIÓN B

1. *(3 puntos)* Sea k una constante real y considere la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & k & 3k+2\\ 1 & 0 & -k\end{pmatrix}$$

a) *(1 punto)* Estudie la existencia de inversa de la matriz A según los diferentes valores de k.
b) *(1 punto*) Si k = 2, calcule la inversa de A, si existe.
c) *(1 punto)* Determine el rango de la matriz A según los diferentes valores de k.

a) La condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada tenga inversa es que su determinante sea distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & k & 3k+2\\ 1 & 0 & -k\end{vmatrix}=-k^2-4k$$

$$|A|=0\Rightarrow -k^2-4k=0\Rightarrow -k\left(k+4\right)=0\Rightarrow\begin{cases}k=0\\ o\\ k=-4\end{cases}$$

La matriz A tiene inversa cuando k es distinto de 0 y de –4.

b) Si $k = 2$ la matriz tiene inversa.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & 2 & 8\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 4\\ 0 & 2 & 8\\ 1 & 0 & -2\end{vmatrix}=-4-8=-12\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 4 & 8 & -2\end{pmatrix}}{-12}=\frac{-1}{12}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 0\\ 8 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 0\\ 4 & -2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & 2\\ 4 & 8\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & 1\\ 8 & -2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 1\\ 4 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 4 & 8\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=\frac{-1}{12}\begin{pmatrix}-4 & 0 & -8\\ 8 & -6 & -8\\ -2 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3 & 0 & 2/3\\ -2/3 & 1/2 & 2/3\\ 1/6 & 0 & -1/6\end{pmatrix}}$$

c) Hemos visto que cuando k es distinto de 0 y de –4 el determinante de A es no nulo, por lo que su rango es 3.

Veamos que ocurre cuando k vale 0 o cuando vale –4.

Si $k = 0$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Su determinante es nulo y su rango no es 3.

¿Su rango es 2? Busco un menor de orden 2 con determinante no nulo. Como tiene la 2ª columna con todo ceros considero el menor de orden 2 que resulta de quitar esta 2ª columna y la fila 3ª → $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Su rango es 2.

Si $k = -4$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & -10 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$**.** Su determinante es nulo y su rango no es 3.

¿Su rango es 2? Busco un menor de orden 2 con determinante no nulo. Considero el menor de orden 2 que resulta de quitar la columna y la fila 3ª → $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$. Su rango es 2

2. *(2 puntos)*
a) *(1,5 puntos)* Determine, **como intersección de dos planos**, la ecuación de la recta que es paralela a la recta:

$$r:\begin{cases}2x-3y+z=4\\ y+z=0\end{cases}$$

y pasa por el punto P:(2,1,−1).

b) *(0,5 puntos)* Determine el ángulo que forman los dos planos siguientes:

$$\pi: 2x-3y+z=4$$
$$\pi': \quad y+z=0$$

a) Como la recta *r* está dada como la intersección de 2 planos otra recta *s* paralela a ella será la intersección de dos planos paralelos a los dados.

$$\left.\begin{matrix} r:\begin{cases}2x-3y+z=4\\ y+z=0\end{cases}\\ s\parallel r\end{matrix}\right\}\Rightarrow s:\begin{cases}2x-3y+z+k=0\\ y+z+k'=0\end{cases}$$

Como la recta *s* pasa por el punto P:(2,1,−1) debe cumplir las ecuaciones de la recta.

$$\left.\begin{matrix} s:\begin{cases}2x-3y+z+k=0\\ y+z+k'=0\end{cases}\\ P(2,1,-1)\in s\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{cases}4-3-1+k=0\\ 1-1+k'=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=0\\ k'=0\end{cases}\Rightarrow \boxed{s:\begin{cases}2x-3y+z=0\\ y+z=0\end{cases}}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Necesitamos un punto y un vector director de la recta *r*. El punto es el dado, P(2, 2, –1) , y como vector director nos sirve cualquiera de los vectores directores de la recta *r*.

Para obtenerlo hacemos el producto vectorial de los vectores normales de los planos que definen la recta.

$$r:\begin{cases}2x-3y+z=4\\ y+z=0\end{cases}\Rightarrow \vec{v_r}=(2,-3,1)\times(0,1,1)=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=-3i+2k-2j-i=-4i-2j+2k$$

$$\left.\begin{matrix}\vec{v_s}=\vec{v_r}=(-4,-2,2)\\ P(2,1,-1)\in s\end{matrix}\right\}\Rightarrow s:\frac{x-2}{-4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x-2}{-4}=\dfrac{y-1}{-2}\to -2x+4=-4y+4\to -2x+4y=0\to x-2y=0\\[2ex] \dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+1}{2}\to 2y-2=-2z-2\to 2y+2z=0\to y+z=0\end{cases}$$

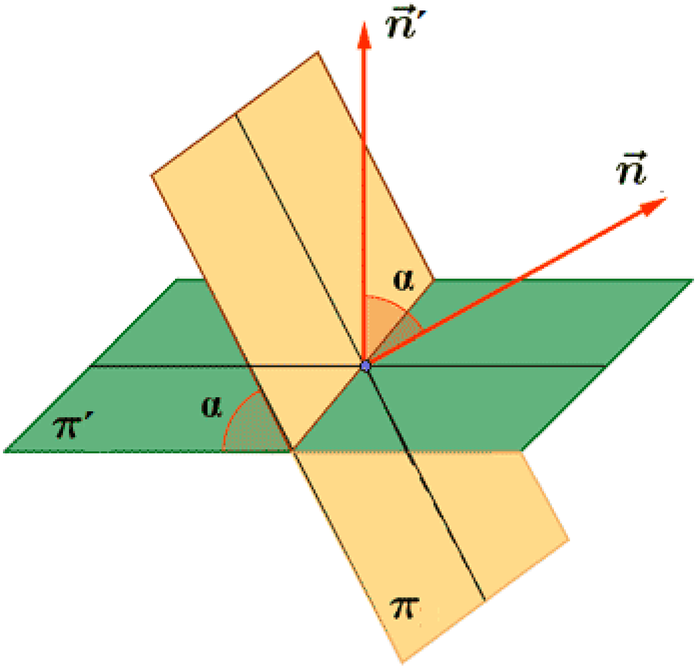
$$\boxed{s:\begin{cases}x-2y=0\\ y+z=0\end{cases}}$$

b) El ángulo que forman los planos es el ángulo que forman sus vectores normales.

$$\left.\begin{array}{l}\pi : 2x-3y+z=4 \Rightarrow \vec{n}=(2,-3,1) \\ \pi' : \qquad y+z=0 \Rightarrow \vec{n'}=(0,1,1)\end{array}\right\} \Rightarrow \cos(\pi,\pi')=\cos(\vec{n},\vec{n'})=\frac{\vec{n}\cdot\vec{n'}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{n'}|}$$

$$\cos(\pi,\pi')=\frac{(2,-3,1)(0,1,1)}{\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}\cdot\sqrt{0^2+1^2+1^2}}=\frac{0-3+1}{\sqrt{14}\sqrt{2}}=\frac{-2}{\sqrt{28}} \Rightarrow (\pi,\pi')=112^{\circ}$$

Como el ángulo obtenido es obtuso considero que el ángulo que forman los planos es el ángulo agudo de 180º – 112º = 68º.



3. *(4 puntos)*
a) *(1 punto)* Determine los valores de *"a"* y *"b"* para que la función que aparece a continuación sea continua:

$$f(x)=\begin{cases} 1/e^x & si \;\; x\le 0 \\ a\cos(x)+b & si \;\; 0<x\le \pi \\ sen(x)-ax & si \;\; \pi<x \end{cases}$$

b) *(1,5 puntos)* Calcule la integral:

$$\int x^2(\ln x)^2\,dx$$

c) *(1,5 puntos)* Determine el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 1}\left(e^{(x-1)}-1\right)^{(x-1)}$$

a) Las tres funciones que definen la función son continuas en los intervalos en que están definidas. Debemos exigir entonces que la función sea continua en $x = 0$ y en $x = \pi$, y para que esto ocurra debe cumplirse:

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=1/e^0=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 1/e^x=1/e^0=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} a\cos(x)+b=a\cos(0)+b=a+b \\ f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \end{array}\right\}\Rightarrow a+b=1$$

$$\left.\begin{array}{l} f(\pi)=a\cos(\pi)+b=-a+b \\ \lim\limits_{x\to \pi^-} f(x)=\lim\limits_{x\to \pi^-} a\cos(x)+b=-a+b \\ \lim\limits_{x\to \pi^+} f(x)=\lim\limits_{x\to \pi^+} sen(x)-ax=sen(\pi)-a\cdot\pi=-\pi a \\ f(\pi)=\lim\limits_{x\to \pi^-} f(x)=\lim\limits_{x\to \pi^+} f(x) \end{array}\right\}\Rightarrow -a+b=-\pi a$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} a+b=1 \\ -a+b=-\pi a \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=1-a \\ -a+b=-\pi a \end{array}\right\}\Rightarrow -a+1-a=-\pi a\Rightarrow 1=-\pi a+2a\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1=a(-\pi+2)\Rightarrow \boxed{a=\frac{1}{-\pi+2}}\Rightarrow b=1-\frac{1}{-\pi+2}=\frac{-\pi+2-1}{-\pi+2}\Rightarrow \boxed{b=\frac{-\pi+1}{-\pi+2}}$$

b) Utilizamos la integración por partes.

$$\int x^2(\ln x)^2\,dx=\left\{\begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u=(\ln x)^2\to du=2\ln x\dfrac{1}{x}dx \\ dv=x^2dx\to v=\int x^2dx=\dfrac{x^3}{3} \end{array}\right\}=\frac{x^3}{3}(\ln x)^2-\int\frac{x^3}{3}2\ln x\frac{1}{x}dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}(\ln x)^2-\frac{2}{3}\int x^2\ln x dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=\ln x\rightarrow du=\frac{1}{x}dx\\ dv=x^2dx\rightarrow v=\int x^2dx=\frac{x^3}{3}\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{x^3}{3}(\ln x)^2-\frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{x^3}{3}\frac{1}{x}dx\right]=\frac{x^3}{3}(\ln x)^2-\frac{2x^3}{9}\ln x+\frac{2}{3}\int\frac{x^3}{3}\frac{1}{x}dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}(\ln x)^2-\frac{2x^3}{9}\ln x+\frac{2}{9}\int x^2dx=\frac{x^3}{3}(\ln x)^2-\frac{2x^3}{9}\ln x+\frac{2}{9}\frac{x^3}{3}=\boxed{\frac{x^3}{3}(\ln x)^2-\frac{2x^3}{9}\ln x+\frac{2x^3}{27}+K}$$

c) $\lim_{x\to 1}\left(e^{(x-1)}-1\right)^{(x-1)}=\left(e^{(1-1)}-1\right)^{(1-1)}=0^0=\text{Indeterminación}$

Utilizamos el logaritmo neperiano para transformar la expresión del límite en un producto.

$$L=\lim_{x\to 1}\left(e^{(x-1)}-1\right)^{(x-1)}\Rightarrow \ln L=\ln\left(\lim_{x\to 1}\left(e^{(x-1)}-1\right)^{(x-1)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\ln\left(e^{(x-1)}-1\right)^{(x-1)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left((x-1)\ln\left(e^{(x-1)}-1\right)\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\ln\left(e^{(x-1)}-1\right)}{\frac{1}{x-1}}\right)=\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminación(L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{e^{(x-1)}}{e^{(x-1)}-1}}{\frac{-1}{(x-1)^2}}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{e^{(x-1)}(x-1)^2}{1-e^{(x-1)}}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación(L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{e^{(x-1)}(x-1)^2+e^{(x-1)}2(x-1)}{-e^{(x-1)}}=\lim_{x\to 1}\frac{e^{(x-1)}\left(x^2+1-2x\right)+e^{(x-1)}(2x-2)}{-e^{(x-1)}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{e^{(x-1)}\left(x^2+1-\cancel{2x}+\cancel{2x}-2\right)}{-e^{(x-1)}}=\lim_{x\to 1}\frac{e^{(x-1)}\left(x^2-1\right)}{-e^{(x-1)}}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2-1\right)}{-1}=\lim_{x\to 1}\left(1-x^2\right)=1-1^2=\boxed{0}$$

Ahora despejamos en la expresión $\ln L=0\Rightarrow L=e^0=1$

$$\boxed{\lim_{x\to 1}\left(e^{(x-1)}-1\right)^{(x-1)}=1}$$

4. *(1 punto)* En una clase de bachillerato, el 60% de los alumnos aprueban matemáticas, el 50% aprueban inglés y el 30% aprueban las dos asignaturas. Calcule la probabilidad de que un alumno elegido al azar:

a) *(0,5 puntos)* Apruebe alguna de las dos asignaturas (una o las dos).

b) *(0,5 puntos)* Apruebe Matemáticas sabiendo que ha aprobado inglés.

Hacemos una tabla de contingencia para obtener todos los datos relativos al problema.

	Aprueban inglés	No aprueban inglés	
Aprueban matemáticas	**30**		**60**
No aprueban matemáticas			
	50		**100**

Completamos la tabla.

	Aprueban inglés	No aprueban inglés	
Aprueban matemáticas	**30**	**30**	**60**
No aprueban matemáticas	**20**	**20**	**40**
	50	**50**	**100**

a) Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(\text{Apruebe alguna de las materias}) = \frac{\text{Nº alumnos que aprueban alguna de las materias}}{\text{Nº total de alumnos}} =$$

$$= \frac{30+30+20}{100} = \frac{80}{100} = \boxed{0.8}$$

b) Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(\textit{Apruebe Matemáticas sabiendo que ha aprobado inglés}) =$$

$$= \frac{\text{Nº de alumnos que aprobando inglés también aprueban matemáticas}}{\text{Nº de alumnos que aprueban inglés}} = \frac{30}{50} = \boxed{0.6}$$