Universidad Zaragoza 1542

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA DE JUNIO DE 2018
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3 puntos)* Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x+y+mz&=m \\ mx+(m-1)y+z&=2 \\ x+y+z&=1 \end{aligned}\right\}$$

a) *(1 punto)* Determine los valores del parámetro m para los que ese sistema de ecuaciones es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

b) *(1 punto)* Encuentre las soluciones de ese sistema cuando $m = 1$.

c) *(1 punto)* Considere las matrices:

$$C=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Determine el rango de la matriz producto CD.

2. *(1,5 puntos)* Determine la ecuación del plano que pasa por el punto (0, 0, 0) y contiene a la recta:

$$r:\begin{cases} 2x-y-2=0 \\ 3y-2z+4=0 \end{cases}$$

3. *(4 puntos)*

a) Considere la función:

$$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

a.1.) *(1 punto)* Determine el dominio y las asíntotas de la función $f(x)$.

a.2.) *(1 punto)* Determine los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$.

a.3.) *(1 punto)* Determine la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x = 2$.

b) *(1 punto)* Calcule:

$$\int \frac{x^2-3x+3}{x-1}\,dx$$

4. *(1,5 puntos)* Al 80 % de los alumnos de una clase les gusta el fútbol; al 40 % les gusta el balonmano y al 30% les gustan ambos deportes.

a) *(0,75 puntos)* Si se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le guste alguno de los dos deportes (uno o los dos)?

b) *(0,75 puntos)* Se eligen 10 alumnos al azar con reemplazamiento, es decir, cada vez que se elige un alumno se le pregunta por sus gustos y se repone a la clase, pudiendo ser elegido nuevamente. Calcule la probabilidad de que solo a 3 les guste el fútbol (NO es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen y sin hacer los cálculos).

OPCIÓN B

1. *(3 puntos)* Considere la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}3&0&1\\0&0&0\\1&0&3\end{pmatrix}$$

a) *(1,5 puntos)* Determine los valores del parámetro *k* para los que la matriz:

$$A-kI$$

tenga inversa, siendo *I* la matriz identidad de orden 3.

b) *(1,5 puntos)* Encuentre la matriz *X* que verifica que:

$$(A-3I)X=2I$$

siendo *I* la matriz identidad de orden 3 y *A* la matriz que aparece al comienzo del enunciado.

2. *(1,5 puntos)* Considere el plano: $\pi: 2ax+y+az=4$ y la recta:

$$r:\begin{cases}2x+y+z=2\\-x+y+2z=3\end{cases}$$

a) *(0,75 puntos)* Determine la posición del plano y la recta según los diferentes valores de *a*.

b) *(0,75 puntos)* Para *a* = 2, determine la recta que es perpendicular al plano *π* y pasa por el punto *P*(0,1, 0).

3. *(4 puntos)*

a) *(2 puntos)* Determine los valores de los parámetros *a*, *b* y *c* para que la función:

$$f(x)=a(x-1)^3+bx+c$$

a.1.) Pase por el punto (1, 1)

a.2.) En el punto (1, 1) su tangente tenga de pendiente 2.

a.3.) En el punto $x = 2$ tenga un máximo relativo.

b) *(2 puntos)* Determine el valor del límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x}\right)^{\frac{3x^2-1}{x}}$$

4. *(1,5 puntos)* En una empresa los trabajadores se clasifican en tres categorías: *A*, *B* y *C*. El 30 % de los trabajadores pertenecen a la categoría *A*; el 25 % a la categoría *B* y el resto a la categoría *C*.

Además, se sabe que de los trabajadores de la categoría *A* un 5 % habla inglés; mientras que de la categoría *B* un 20 % habla inglés y de los trabajadores de la categoría *C* un 60 % habla inglés.

c) *(0,75 puntos)* Si se elige al azar un trabajador de la empresa, ¿Cuál es la probabilidad de que hable inglés?

d) *(0,75 puntos)* Si se elige al azar un trabajador de la empresa y resulta que SI habla inglés, ¿Cuál es la probabilidad de que pertenezca a la categoría *C*?

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. *(3 puntos)* Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x+y+mz&=m \\ mx+(m-1)y+z&=2 \\ x+y+z&=1 \end{aligned}\right\}$$

a) *(1 punto)* Determine los valores del parámetro *m* para los que ese sistema de ecuaciones es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.
b) *(1 punto)* Encuentre las soluciones de ese sistema cuando *m* = 1.
c) *(1 punto)* Considere las matrices:

$$C=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\; D=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Determine el rango de la matriz producto *CD*.

a) La matriz de los coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ m & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & m \\ m & m-1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Estudiemos sus rangos según los posibles valores de *m*.
En la matriz A, el mayor rango posible es 3:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=m-1+1+m^2-m(m-1)-m-1=$$

$$=m-\cancel{1}+\cancel{1}+\cancel{m^2}-\cancel{m^2}+\cancel{m}-\cancel{m}-1=m-1$$

El determinante se anula cuando $m-1=0 \Rightarrow m=1$. Tenemos que estudiar por separado dos situaciones distintas.

CASO 1. $m\neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el rango de A/B y el número de incógnitas. Rango(A) = Rango(A/B) = Nº incógnitas = 3.
El **sistema es compatible determinado** (Con una única solución).

CASO 2. $m=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Buscamos un menor de orden 2 con determinante no nulo.

$$m=1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tomamos el menor que resulta de quitar la fila y columna 3ª → $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. Por lo que el rango de A es 2.

$$m = 1 \Rightarrow A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Como la columna 1ª y 3ª son iguales consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 1ª → $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Por lo que el rango de A/B no es 3. Su rango es igual que el de la matriz A y es 2.

Como Rango de A = 2 = Rango de A/B ≠ 3 = Nº incógnitas entonces **el sistema es compatible indeterminado** (Con infinitas soluciones)

b) Para *m = 1* el sistema es compatible indeterminado y queda:

$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x+z=2 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}$, como la ecuación 1ª y la 3ª son iguales el sistema queda $\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x+z=2 \end{array}\right\}$.

Lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ x+z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ \boxed{x=2-z} \end{array}\right\} \Rightarrow 2-z+y+z=1 \Rightarrow \boxed{y=-1}$$

La solución es $x = 2-t;\ \ y=-1;\ \ z=t;\ \ siendo\ t \in \mathbb{R}$

c) Obtengamos la expresión de la matriz CD.

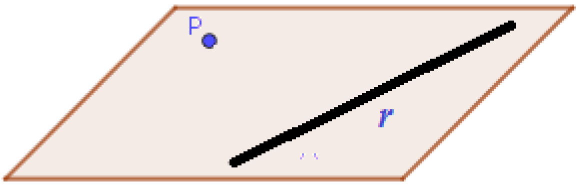
$$CD = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos observar que esta matriz tiene la 3ª fila que es nula y la 2ª fila que es la 1ª multiplicada por –1, por lo que solo hay una fila linealmente independiente y el rango de CD es 1.

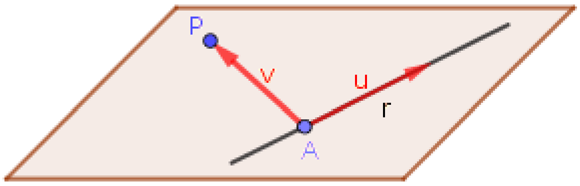
2. *(1,5 puntos)* Determine la ecuación del plano que pasa por el punto (0, 0, 0) y contiene a la recta:

$$r:\begin{cases}2x-y-2=0\\3y-2z+4=0\end{cases}$$

Nos piden hallar la ecuación del plano del dibujo.



Para ello determinamos un vector director y un punto A de la recta.
A partir de ello hallamos el vector $\vec{v}=\overrightarrow{AP}$ que une el punto A y el P(0, 0, 0).



$$r:\begin{cases}2x-y-2=0\\3y-2z+4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\boxed{y=2x-2}\\3y-2z+4=0\end{cases}\Rightarrow 3(2x-2)-2z+4=0\Rightarrow 6x-6-2z+4=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x-2z-2=0\Rightarrow 3x-z-1=0\Rightarrow\boxed{z=3x-1}\Rightarrow r:\begin{cases}x=t\\y=-2+2t\\z=-1+3t\end{cases}$$

Por lo que un vector director de la recta es $\vec{u}=(1,2,3)$ y un punto A de la recta es $A(0,-2,-1)$.

El vector $\vec{v}=\overrightarrow{AP}$ tendrá coordenadas $\vec{v}=\overrightarrow{AP}=(0,0,0)-(0,-2,-1)=(0,2,1)$

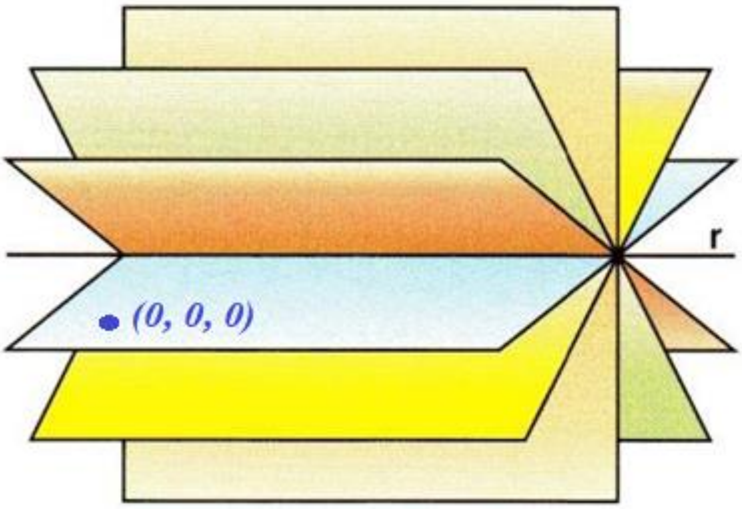
El plano pedido es el que pasa por P(0, 0, 0) y tiene como vectores directores $\vec{u}=(1,2,3)$ y $\vec{v}=\overrightarrow{AP}=(0,2,1)$. Obtenemos su ecuación.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(1,2,3)\\\vec{v}=\overrightarrow{AP}=(0,2,1)\\P(0,0,0)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow\pi:\begin{vmatrix}1&2&3\\0&2&1\\x-0&y-0&z-0\end{vmatrix}=0\Rightarrow 2z+2x-6x-y=0\Rightarrow\boxed{\pi:-4x-y+2z=0}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

La ecuación del haz de planos (conjunto de los planos que contienen a una recta) es:

$$2x-y-2+\lambda(3y-2z+4)=0$$



Seleccionemos de entre todos ellos el que pasa por el punto (0, 0, 0):

$$\left.\begin{array}{l}\pi: 2x-y-2+\lambda(3y-2z+4)=0 \\ (0,0,0)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow 2\cdot 0-0-2+\lambda(3\cdot 0-2\cdot 0+4)=0\Rightarrow -2+4\lambda=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1+2\lambda=0\Rightarrow \boxed{\lambda=\frac{1}{2}}$$

Luego el plano buscado es:

$$\left.\begin{array}{r}\pi: 2x-y-2+\lambda(3y-2z+4)=0 \\ \lambda=\frac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow 2x-y-2+\frac{1}{2}(3y-2z+4)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x-2y-4+3y-2z+4=0\Rightarrow \boxed{\pi: 4x+y-2z=0}$$

3. *(4 puntos)*
a) Considere la función:

$$f\left(x\right)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

a.1.) *(1 punto)* Determine el dominio y las asíntotas de la función $f(x)$.
a.2.) *(1 punto)* Determine los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$.
a.3.) *(1 punto)* Determine la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x = 2$.

b) *(1 punto)* Calcule:

$$\int \frac{x^2-3x+3}{x-1}dx$$

a.1.) Se trata de una función racional cuyo dominio es $\mathbb{R}$ menos los valores de x que anulen al denominador. El denominador es una función irracional pero como $x^2+1>0$ para todo valor de x tenemos que el dominio es todo $\mathbb{R}$.

Asíntotas verticales. $x=a$

No tiene, pues el dominio son todos los números reales.

Asíntotas horizontales. $y=b$

$$b=\lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{+\infty}{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$$

$y=1$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$

$$b=\lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{-\infty}{+\infty}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x}=-1$$

$y=-1$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

No tiene, pues tiene asíntota horizontal.

a.2.) Utilizamos la derivada primera.

$$f\left(x\right)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow f'\left(x\right)=\frac{1\cdot\sqrt{x^2+1}-\left(x+1\right)\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=\frac{\sqrt{x^2+1}-\left(x+1\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$f'\left(x\right)=\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2+1}-\left(x^2+x\right)}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2-x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$f'\left(x\right)=\frac{x^2+1-x^2-x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}=\frac{1-x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{1-x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}=0 \Rightarrow 1-x=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

Para comprobar si es máximo o mínimo estudiamos el cambio de signo de la derivada primera antes y después de $x = 1$.

- En $(-\infty,1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0)=\frac{1-0}{\left(0^2+1\right)\sqrt{0^2+1}}=1>0$, La función crece en $(-\infty,1)$
- En $(1,+\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2)=\frac{1-2}{\left(2^2+1\right)\sqrt{2^2+1}}=-\frac{1}{5\sqrt{5}}<0$, La función decrece en $(1,+\infty)$

Por lo que la función presenta un máximo relativo en $x = 1$.

a.3.) La recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x = 2$ tiene ecuación:

$$y-f(2)=f'(2)(x-2)$$

Calculamos el valor de la función y de la derivada en $x = 2$ y lo reemplazamos en la ecuación.

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=\frac{2+1}{\sqrt{2^2+1}}=\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5} \\ f'(2)=-\frac{1}{5\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{25} \\ y-f(2)=f'(2)(x-2) \end{array}\right\} \Rightarrow y-\frac{3\sqrt{5}}{5}=-\frac{\sqrt{5}}{25}(x-2) \Rightarrow y-\frac{3\sqrt{5}}{5}=-\frac{\sqrt{5}}{25}x+\frac{2\sqrt{5}}{25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=-\frac{\sqrt{5}}{25}x+\frac{2\sqrt{5}}{25}+\frac{3\sqrt{5}}{5} \Rightarrow y=-\frac{\sqrt{5}}{25}x+\frac{2\sqrt{5}}{25}+\frac{15\sqrt{5}}{25} \Rightarrow \boxed{y=-\frac{\sqrt{5}}{25}x+\frac{17\sqrt{5}}{25}}$$

b)

$$\int \frac{x^2-3x+3}{x-1}dx = \boxed{\begin{array}{rrr|l} x^2 & -3x & +3 & x-1 \\ \cline{4-4} -x^2 & +x & & x-2 \\ \cline{1-2} & -2x & +3 & \\ & 2x & -2 & \\ \cline{2-3} & & 1 & \end{array}} = \int x-2+\frac{1}{x-1}dx = \boxed{\frac{x^2}{2}-2x+\ln|x-1|+K}$$

4. *(1,5 puntos)* Al 80 % de los alumnos de una clase les gusta el fútbol; al 40 % les gusta el balonmano y al 30% les gustan ambos deportes.
a) *(0,75 puntos)* Si se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le guste alguno de los dos deportes (uno o los dos)?
b) *(0,75 puntos)* Se eligen 10 alumnos al azar con reemplazamiento, es decir, cada vez que se elige un alumno se le pregunta por sus gustos y se repone a la clase, pudiendo ser elegido nuevamente. Calcule la probabilidad de que solo a 3 les guste el fútbol (NO es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen y sin hacer los cálculos).

a) Realizamos una tabla de contingencia.

	Le gusta el balonmano	No le gusta el balonmano	
Le gusta el fútbol	**30**		**80**
No le gusta el fútbol			
	40		**100**

Completamos la tabla.

	Le gusta el balonmano	No le gusta el balonmano	
Le gusta el fútbol	**30**	**50**	**80**
No le gusta el fútbol	**10**	**10**	**20**
	40	**60**	**100**

Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(\text{Le guste alguno de los dos deportes}) = \frac{30+50+10}{100} = \boxed{0.9}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

Si llamamos F al suceso "Le gusta el fútbol" y B = "Le gusta el balonmano" tenemos que las probabilidades que nos proporcionan en el problema son:

$P(F) = 0.80$; $P(B) = 0.40$; $P(B\cap F) = 0.30$

Nos piden calcular $P(B\cup F)$.

$$P(B\cup F) = P(B)+P(F)-P(B\cap F) = 0.80+0.40-0.30 = \boxed{0.90}$$

b) Si llamamos X a la variable que cuenta el numero de personas a las que les gusta el fútbol tras la elección de 10 personas (sin reemplazamiento) esta es una variable binomial de parámetros $n = 10$ y $p = 0.8$. $X = B(10, 0.8)$

Nos piden calcular la probabilidad $P(X = 3)$

$$P(X=3) = \binom{10}{3} 0.8^3 \cdot 0.2^7 = \frac{10!}{3!\cdot(10-3)!} 0.8^3 \cdot 0.2^7 = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2} 0.8^3 \cdot 0.2^7 = 120\cdot 0.8^3 \cdot 0.2^7$$

$$P(X=3) = \boxed{0.0008}$$

OPCIÓN B

1. *(3 puntos)* Considere la matriz:

$$A=\begin{pmatrix}3&0&1\\0&0&0\\1&0&3\end{pmatrix}$$

a) *(1,5 puntos)* Determine los valores del parámetro k para los que la matriz:

$$A-kI$$

tenga inversa, siendo I la matriz identidad de orden 3.

b) *(1,5 puntos)* Encuentre la matriz X que verifica que:

$$(A-3I)X=2I$$

siendo I la matriz identidad de orden 3 y A la matriz que aparece al comienzo del enunciado.

a)

$$A-kI=\begin{pmatrix}3&0&1\\0&0&0\\1&0&3\end{pmatrix}-k\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&1\\0&0&0\\1&0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}k&0&0\\0&k&0\\0&0&k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-k&0&1\\0&-k&0\\1&0&3-k\end{pmatrix}$$

Para que tenga inversa su determinante debe ser no nulo. Averiguamos cuando se anula.

$$|A-kI|=\begin{vmatrix}3-k&0&1\\0&-k&0\\1&0&3-k\end{vmatrix}=(3-k)(-k)(3-k)+k=-k(3-k)^2+k=-k\left(9+k^2-6k\right)+k=$$

$$=-9k-k^3+6k^2+k=-k^3+6k^2-8k=k\left(-k^2+6k-8\right)$$

$$|A-kI|=0\Rightarrow k\left(-k^2+6k-8\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}k=0\\ -k^2+6k-8=0\Rightarrow k=\dfrac{-6\pm\sqrt{6^2-4(-1)(-8)}}{2(-1)}=\dfrac{-6\pm\sqrt{4}}{-2}=\begin{cases}\dfrac{-6+2}{-2}=2\\ \dfrac{-6-2}{-2}=4\end{cases}\end{cases}$$

El determinante se anula para $k=0$, $k=2$ o $k=4$.

Existe la inversa para cualquier valor de k distinto de 0, 2 y 4.

b) La matriz $A-3I$ de la ecuación matricial $(A-3I)X=2I$ tiene inversa, pues $k=3$. Calculamos su inversa.

$$A-3I=\begin{pmatrix}3-3 & 0 & 1\\ 0 & -3 & 0\\ 1 & 0 & 3-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -3 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\left|A-3I\right|=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -3 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=3\neq 0$$

$$\left(A-3I\right)^{-1}=\frac{Adj\left(A-3I\right)^{T}}{\left|A-3I\right|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -3 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}}{3}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}-3 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & -3\\ 1 & 0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}0 & 1\\ -3 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & -3\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\left(A-3I\right)^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0 & 0 & 3\\ 0 & -1 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1/3 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Despejamos en la ecuación matricial y obtenemos la expresión de la matriz X.

$$\left(A-3I\right)X=2I\Rightarrow X=\left(A-3I\right)^{-1}2I=2\left(A-3I\right)^{-1}$$

$$\boxed{X=2\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1/3 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & -2/3 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}}$$

2. *(1,5 puntos)* Considere el plano: $\pi : 2ax + y + az = 4$ y la recta:

$$r : \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ -x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

a) *(0,75 puntos)* Determine la posición del plano y la recta según los diferentes valores de a.
b) *(0,75 puntos)* Para a = 2, determine la recta que es perpendicular al plano π y pasa por el punto $P(0,1, 0)$.

a) La recta y el plano pueden ser secantes (se cortan en un punto), paralelos (no tienen puntos comunes) o la recta puede estar contenida en el plano (todos los puntos de la recta pertenecen al plano).
Si consideramos el sistema formado por las dos ecuaciones que definen a la recta y la ecuación del plano, el sistema de tres ecuaciones así formado puede ser compatible determinado (recta y plano secantes), incompatible (recta y plano paralelos) o compatible indeterminado (recta contenida en el plano).
Por lo que el problema se reduce a discutir el sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \pi : 2ax + y + az = 4 \\ r : \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ -x + y + 2z = 3 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2ax + y + az = 4 \\ 2x + y + z = 2 \\ -x + y + 2z = 3 \end{array}\right\}$$

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & a \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2a & 1 & a \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4a - 1 + 2a + a - 4 - 2a = 5a - 5$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 5a - 5 = 0 \Rightarrow a = 1$$

Consideramos dos situaciones diferentes.

CASO 1. Si $a \neq 1$.
En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, por lo que el rango de la matriz ampliada $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2a & 1 & a & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$ también es 3 e igual que el número de incógnitas.
El sistema tiene una única solución que será el punto de corte de recta y plano.

Si $a \neq 1$ la recta y el plano son secantes.

CASO 2. Si $a = 1$
En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
La matriz de coeficientes queda $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Buscamos un menor de orden 2 con determinante no nulo. Consideramos el menor que resulta de quitar la columna y fila 1ª → $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2-1=1\neq 0$. El rango de A es 2.

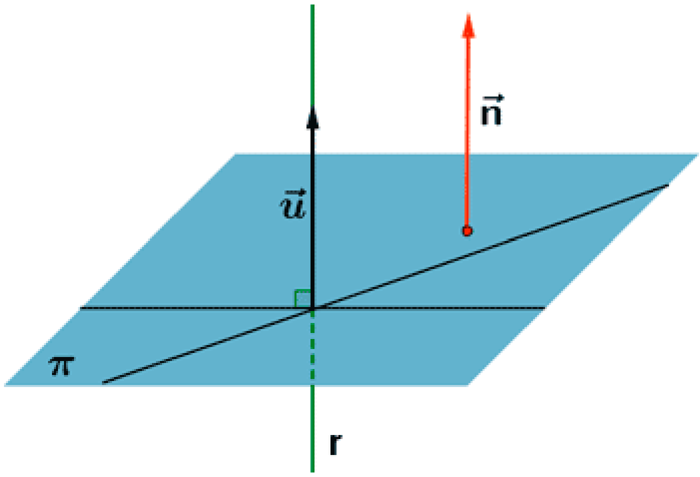
La matriz ampliada queda $A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$ estudiamos si su rango es 3, para ello consideramos el menor que resulta de quitar la columna 1ª →

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3+2+8-4-3-4=13-11=2\neq 0$. El rango de A/B es 3.

El rango de la matriz ampliada y la de coeficientes son distintos y el sistema no tiene solución, por lo que recta y plano no se cortan en ningún punto y son paralelos.

Si $a=1$ la recta y el plano son paralelos.

b) Para a = 2 el plano tiene ecuación $\pi : 4x+y+2z=4$. Nos piden hallar una recta perpendicular al plano por lo que su vector director es el normal del plano $\vec{v_r}=\vec{n}=(4,1,2)$.



Además pasa por el punto P(0,1, 0) por lo que la ecuación de la recta es:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v_r}=\vec{n}=(4,1,2) \\ P(0,1,0)\in r \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{r:\begin{cases} x=4\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=2\lambda \end{cases}}$$

3. *(4 puntos)*
a) *(2 puntos)* Determine los valores de los parámetros a, b y c para que la función:

$$f(x)=a\left(x-1\right)^3+bx+c$$

a.1.) Pase por el punto (1, 1)
a.2.) En el punto (1, 1) su tangente tenga de pendiente 2.
a.3.) En el punto $x = 2$ tenga un máximo relativo.
b) *(2 puntos)* Determine el valor del límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x}\right)^{\frac{3x^2-1}{x}}$$

a) Pasa por el punto (1, 1).

$$\left.\begin{array}{l} Pasa\ por\ (1,1)\rightarrow f(1)=1 \\ f(x)=a\left(x-1\right)^3+bx+c \end{array}\right\}\Rightarrow f(1)=a\left(1-1\right)^3+b\cdot 1+c=1\Rightarrow \boxed{b+c=1}$$

En el punto (1, 1) su tangente tenga de pendiente 2. Esto implica que la derivada de la función en $x=1$ vale 2.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=a\left(x-1\right)^3+bx+c\Rightarrow f\,'(x)=3a\left(x-1\right)^2+b \\ f\,'(1)=2 \end{array}\right\}\Rightarrow f\,'(1)=3a\left(1-1\right)^2+b=2\Rightarrow \boxed{b=2}$$

Sustituyendo en la primera ecuación obtenida tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} b+c=1 \\ b=2 \end{array}\right\}\Rightarrow 2+c=1\Rightarrow \boxed{c=-1}$$

La función queda $f(x)=a\left(x-1\right)^3+2x-1$

Si en el punto $x = 2$ tiene un máximo relativo significa que su derivada primera se anula para $x=2$.

$$\left.\begin{array}{l} f\,'(x)=3a\left(x-1\right)^2+2 \\ f\,'(2)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow 3a\left(2-1\right)^2+2=0\Rightarrow 3a+2=0\Rightarrow \boxed{a=-\frac{2}{3}}$$

Los valores buscados son $a=-\dfrac{2}{3}$, $b=2$ y $c=-1$

b)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x}\right)^{\frac{3x^2-1}{x}}=1^{+\infty}=\text{Indeterminación}=$$

$$=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x}-1\right)\left(\frac{3x^2-1}{x}\right)}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{x^2}-3x+2-\cancel{x^2}+2x}{x^2-2x}\right)\left(\frac{3x^2-1}{x}\right)}=$$

$$=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x+2}{x^2-2x}\right)\left(\frac{3x^2-1}{x}\right)}=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^3+x+6x^2-2}{x^3-2x^2}}=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^3}{x^3}}=\boxed{e^{-3}}$$

4. *(1,5 puntos)* En una empresa los trabajadores se clasifican en tres categorías: A, B y C. El 30 % de los trabajadores pertenecen a la categoría A; el 25 % a la categoría B y el resto a la categoría C. Además, se sabe que de los trabajadores de la categoría A un 5 % habla inglés; mientras que de la categoría B un 20 % habla inglés y de los trabajadores de la categoría C un 60 % habla inglés.
a) *(0,75 puntos)* Si se elige al azar un trabajador de la empresa, ¿Cuál es la probabilidad de que hable inglés?
b) *(0,75 puntos)* Si se elige al azar un trabajador de la empresa y resulta que SI habla inglés, ¿Cuál es la probabilidad de que pertenezca a la categoría C?

Primera forma de resolverlo

Pasamos los valores relativos a absolutos.
Supongamos que hay 100 trabajadores. En este supuesto habrían 30 de categoría A, 25 de categoría B y el resto (100 – 25 – 30 = 45) de la categoría C.
De los 30 de categoría A el 5 % habla inglés, es decir, 30 · 0.05 = 1.5 trabajadores de categoría A hablan inglés.
De los 25 de categoría B el 20 % habla inglés, es decir, 25 · 0.20 = 5 trabajadores de categoría B hablan inglés.
De los 45 de categoría A el 60 % habla inglés, es decir, 45 · 0.60 = 27 trabajadores de categoría C hablan inglés.

Aunque algún dato sea decimal e irreal nos sirve para el cálculo de probabilidades.
Si considerásemos 200 trabajadores se evitaría el valor de medio trabajador.
Seguimos con el razonamiento utilizando los valores decimales obtenidos hasta ahora.

Tenemos un total de 1.5 + 5 + 27 = 33.5 trabajadores de los 100 que hablan inglés.

a) Aplicamos la regla de Laplace.

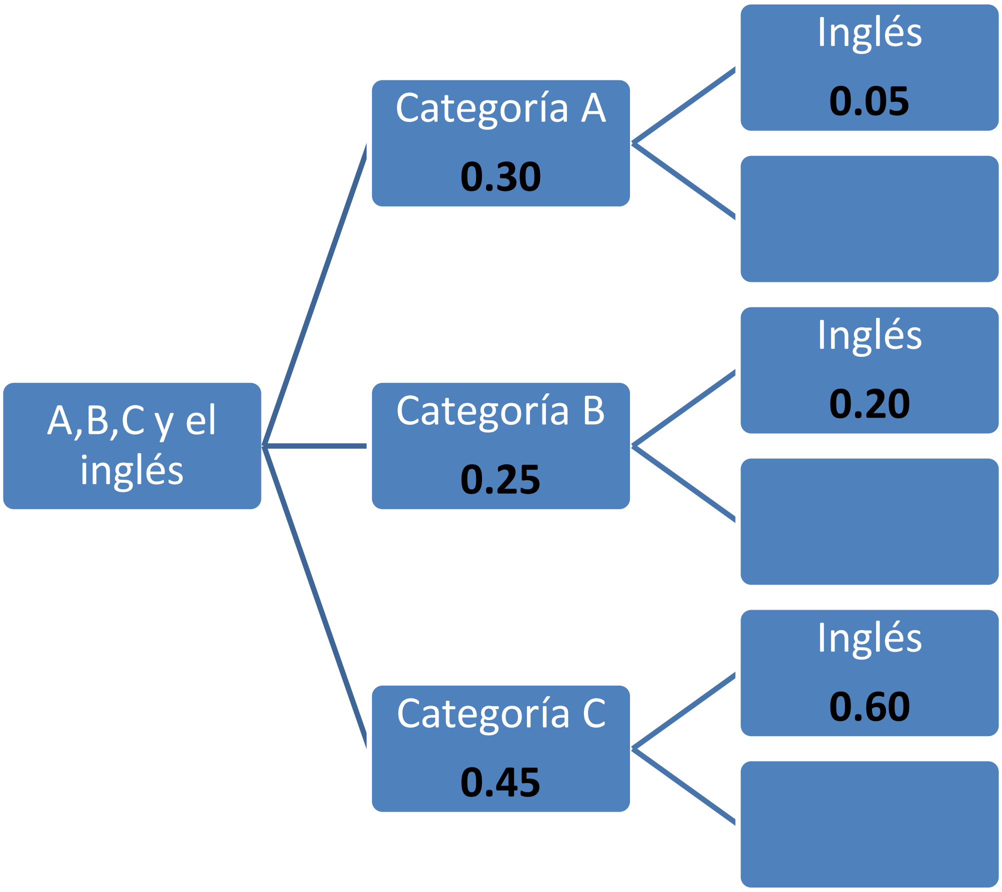
$$P(Hable\ inglés) = \frac{33.5}{100} = \boxed{0.335}$$

b) Si se ha elegido un trabajador que habla inglés es uno de los 33.5 que lo hablan. De ellos 27 pertenecen a la categoría C, por lo que aplicando la regla de Laplace tenemos:

$$P\left(Categoría\ C / Habla\ inglés\right) = \frac{27}{33.5} \approx \boxed{0.806}$$

Segunda forma de resolverlo

Realizamos un diagrama de árbol.



Llamamos A = "Ser trabajador de categoría A", B = "Ser trabajador de categoría B", C = "Ser trabajador de categoría C" y, por último, I = "Hablar inglés".
Atendiendo a los datos del diagrama tenemos: P(A) = 0.3; P(B) = 0.25; P(C) = 0.45;
P(I/A) = 0.05; P(I/B) = 0.20; P(I/C) = 0.60.

a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(I)=P(A)P(I/A)+P(B)P(I/B)+P(C)P(I/C)=0.30\cdot 0.05+0.25\cdot 0.20+0.45\cdot 0.60$$

$$\boxed{P(I)=0.335}$$

b) Es una probabilidad a posteriori, aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/I)=\frac{P(C\cap I)}{P(I)}=\frac{P(C)P(I/C)}{P(I)}=\frac{0.45\cdot 0.60}{0.335}\approx \boxed{0.806}$$