Universidad Zaragoza 1542

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE DE 2018
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1. *(3 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Resuelva el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) *(1,5 puntos)* Sabiendo que el determinante de la matriz A siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

es 4, es decir $|A| = 4$, determine el determinante de la matriz B que aparece a continuación:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3a+k & x+5 \\ 2 & 3b+k & y+5 \\ 2 & 3c+k & z+5 \end{pmatrix}$$

2. *(1,5 puntos)*

a) *(0,5 puntos)* Dados los vectores $\vec{u} = (1,2,1)$, $\vec{v} = (2,1,1)$ y $\vec{w} = (0,2,1)$, determine el volumen del paralelepípedo que definen esos tres vectores.

b) *(1 punto)* Determine la posición relativa de las rectas r y s siguientes:

$$r: \frac{x+1}{4} = \frac{y}{6} = \frac{z+2}{1} \qquad s: \begin{cases} -x+y+2z-4=0 \\ x+2y+z-5=0 \end{cases}$$

3. *(4 puntos)*

a) Considere la función:

$$f(x) = \frac{x^2-3x+3}{x-1}$$

a.1.) *(1 punto)* Determine las asíntotas de la función $f(x)$.

a.2.) *(1.5 puntos)* Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$.

b) *(1.5 puntos)* Calcule la siguiente integral:

$$\int \frac{9}{x^2+x-2}\,dx$$

4. *(1,5 puntos)* Se lanza 10 veces un dado equilibrado (es decir un dado donde todas sus caras tiene la misma probabilidad de aparecer).

a) *(0,75 puntos)* Determine la probabilidad de que salga un número par en todos los lanzamientos.

b) *(0,75 puntos)* Determine la probabilidad de que salga un número par exactamente en tres lanzamientos. (NO es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen y sin hacer los cálculos).

OPCIÓN B

1. *(3 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

encuentre la matriz *X*, de dimensión 3x3, que resuelve la ecuación matricial:

$$AX+B=A^2$$

b) *(1,5 puntos)* Determine el rango de la matriz *C* siguiente según los diferentes valores del parámetro *k*:

$$C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & 2 & k\\ k & k & 1\end{pmatrix}$$

2. *(1,5 puntos)* Determine el valor de los parámetros m y n que hacen que la recta

$$r:\begin{cases}x+y+z=2\\ 2x+3y+z=3\end{cases}$$

esté contenida en el plano:

$$\pi: mx+y+nz=4$$

3. *(4 puntos)*

a) *(1.5 puntos)* Calcule el límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-\frac{x^3-x^2-x+2}{x^2}\right)^{\frac{3+x^2}{x}}$$

b) *(1,5 puntos)* De entre todos los triángulos rectángulos que tiene un área de 1 cm^2, determine el que tiene la hipotenusa de longitud mínima y proporcione las longitudes de los tres lados de ese triángulo.

c) *(1 punto)* Calcule el área limitada por la curva $f(x)=x^2+x$ y la recta $g(x)=x+4$.

4. *(1,5 puntos)*

a) *(0,75 puntos)* En una clase de 20 alumnos, 10 estudian ruso, 12 practican algún deporte y tan solo 2 hacen ambas cosas. ¿Cuál es la probabilidad de que, al escoger un alumno al azar, si estudia ruso, practique algún deporte?

b) *(0,75 puntos)* Un tirador de pistola olímpica, tiene una probabilidad de 0,8 de hacer blanco. Si dispara 12 veces, ¿cuál es la probabilidad de que haga 10 o más blancos?. (NO es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen y sin hacer los cálculos).

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. *(3 puntos)*

a) *(*1,5 *puntos)* Resuelva el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) *(*1,5 *puntos)* Sabiendo que el determinante de la matriz *A* siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

es 4, es decir $|A| = 4$, determine el determinante de la matriz *B* que aparece a continuación:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3a+k & x+5 \\ 2 & 3b+k & y+5 \\ 2 & 3c+k & z+5 \end{pmatrix}$$

a) Es un sistema de ecuaciones con la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Estudiamos su rango.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 8+8+18-6-16-12 = 0$$

Por lo que su rango no es 3. Buscamos un menor de orden 2 con determinante no nulo, por ejemplo, el que resulta de quitar la fila y columna 3ª → $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4-8 = -4 \neq 0$.

El rango de A es 2.

Como la matriz ampliada es $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right)$ el rango también es 2.

Rango de A = Rango de A/B = 2 < 3 = Nº de incógnitas. El sistema es compatible indeterminado, determinamos la expresión de sus infinitas soluciones.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} 2x+4y+3z=0 \\ 2x+2y+2z=0 \\ x+3y+2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} 2x+4y+3z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+3y+2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \text{Ecuación 1ª = Ecuación 2ª + Ecuación 3ª} \\ \text{Eliminamos ecuación 1ª} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x+y+z=0 \\ x+3y+2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-y-z \\ x+3y+2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -y-z+3y+2z=0 \Rightarrow 2y+z=0 \Rightarrow \boxed{z=-2y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=-y+2y=y}$$

Las soluciones del sistema son: $x=t;\ y=t;\ z=-2t$, siendo $t\in\mathbb{R}$.

b) Sabemos que $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}=4$

$$|B|=\begin{vmatrix} 2 & 3a+k & x+5 \\ 2 & 3b+k & y+5 \\ 2 & 3c+k & z+5 \end{vmatrix}=\left\{\begin{array}{l}\text{Separo en suma de dos determinantes} \\ \text{utilizando la suma de la 2ª columna}\end{array}\right\}=$$

$$=\begin{vmatrix} 2 & 3a & x+5 \\ 2 & 3b & y+5 \\ 2 & 3c & z+5 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & k & x+5 \\ 2 & k & y+5 \\ 2 & k & z+5 \end{vmatrix}=\left\{\begin{array}{l}\text{En el 2º determinante} \\ \text{las columnas 1ª y 2ª} \\ \text{son proporcionales y} \\ \text{su determinante es 0}\end{array}\right\}=\begin{vmatrix} 2 & 3a & x+5 \\ 2 & 3b & y+5 \\ 2 & 3c & z+5 \end{vmatrix}+0=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{Separo en suma de dos determinantes} \\ \text{utilizando la suma de la 3ª columna}\end{array}\right\}=\begin{vmatrix} 2 & 3a & x \\ 2 & 3b & y \\ 2 & 3c & z \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & 3a & 5 \\ 2 & 3b & 5 \\ 2 & 3c & 5 \end{vmatrix}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{En el 2º determinante} \\ \text{las columnas 1ª y 3ª} \\ \text{son proporcionales y} \\ \text{su determinante es 0}\end{array}\right\}=\begin{vmatrix} 2 & 3a & x \\ 2 & 3b & y \\ 2 & 3c & z \end{vmatrix}+0=\left\{\begin{array}{l}\text{Saco factor común} \\ \text{3 en 2ª columna}\end{array}\right\}=$$

$$=3\begin{vmatrix} 2 & a & x \\ 2 & b & y \\ 2 & c & z \end{vmatrix}=\left\{\begin{array}{l}\text{Saco factor común} \\ \text{2 en 1ª columna}\end{array}\right\}=3\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & a & x \\ 1 & b & y \\ 1 & c & z \end{vmatrix}=\left\{\begin{array}{l}\text{Determinante de A =} \\ \text{= Determinante de A}^T\end{array}\right\}=$$

$$=6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}=6\cdot|A|=6\cdot 4=\boxed{24}$$

2. *(*1,5 *puntos)*
a) *(0,5 puntos)* Dados los vectores $\vec{u}=(1,2,1)$, $\vec{v}=(2,1,1)$ y $\vec{w}=(0,2,1)$, determine el volumen del paralelepípedo que definen esos tres vectores.
b) *(*1 *punto*) Determine la posición relativa de las rectas *r* y *s* siguientes:

$$r:\frac{x+1}{4}=\frac{y}{6}=\frac{z+2}{1} \qquad s:\begin{cases}-x+y+2z-4=0\\ x+2y+z-5=0\end{cases}$$

a) El volumen del paralelepípedo es el valor absoluto del producto mixto de los tres vectores.

$$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}=1+0+4-0-4-2=-1\Rightarrow \boxed{Volumen=1\,u^2}$$

b) Pasamos la ecuación de la recta *s* a paramétricas para obtener un punto y un vector de esta recta.

$$s:\begin{cases}-x+y+2z-4=0\\ x+2y+z-5=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=y+2z-4\\ x+2y+z-5=0\end{cases}\Rightarrow y+2z-4+2y+z-5=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3y+3z-9=0\Rightarrow y+z-3=0\Rightarrow \boxed{y=3-z}\Rightarrow \boxed{x=3-z+2z-4=-1+z}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow s:\begin{cases}x=-1+t\\ y=3-t\\ z=t\end{cases}$$

La recta *s* tiene como vector director $\vec{v_s}=(1,-1,1)$ y pasa por el punto $P_s(-1,3,0)$

La recta $r:\frac{x+1}{4}=\frac{y}{6}=\frac{z+2}{1}$ tiene como vector director $\vec{v_r}=(4,6,1)$ y pasa por el punto $Q_r(-1,0,-2)$.

Las rectas son paralelas o se cortan o se cruzan.

Las rectas no son paralelas pues sus vectores directores no tienen coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v_r}=(4,6,1)\\ \vec{v_s}=(1,-1,1)\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{4}{1}\neq\frac{6}{1}\neq\frac{1}{1}\Rightarrow r \text{ y } s \text{ no son paralelas}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Estudiamos el valor nulo o no del producto mixto de los vectores $\vec{v_r}=(4,6,1)$, $\vec{v_s}=(1,-1,1)$ y $\overrightarrow{Q_rP_s}$.

$$\left.\begin{array}{l}P_s(-1,3,0)\\ Q_r(-1,0,-2)\end{array}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{Q_rP_s}=(-1,3,0)-(-1,0,-2)=(0,3,2)$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{Q_rP_s}=(0,3,2)\\ \overrightarrow{v_r}=(4,6,1)\\ \overrightarrow{v_s}=(1,-1,1)\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\overrightarrow{Q_rP_s},\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{v_s}\right]=\begin{vmatrix}0 & 3 & 2\\ 4 & 6 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=0+3-8-12-12-0=-29\neq 0$$

Como este producto mixto es no nulo las rectas *r* y *s* se cruzan (tienen dirección distinta y no se coinciden en ningún punto)

3. *(4 puntos)*
a) Considere la función:

$$f(x)=\frac{x^2-3x+3}{x-1}$$

a.1.) *(1 punto)* Determine las asíntotas de la función $f(x)$.
a.2.) *(*1.5 *puntos)* Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$.
b) *(*1.5 *puntos)* Calcule la siguiente integral:

$$\int \frac{9}{x^2+x-2}\,dx$$

a.1.) Asíntota vertical. $x=a$

El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{1\}$ **.**

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+3}{x-1}=\frac{1^2-3+3}{1-1}=\frac{1}{0}=\infty$$

$x=1$ es asíntota vertical de la función.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+3}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x+3}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-3x+3}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+3}{x^2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+3}{x-1}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}-3x+3-\cancel{x^2}+x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x+3}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x}{x}=-2$$

$y=x-2$ es asíntota oblicua de la función.

a.2.) Utilizamos la derivada primer para obtener la variación de la función.

$$f(x)=\frac{x^2-3x+3}{x-1}\Rightarrow f'(x)=\frac{(2x-3)(x-1)-1\cdot\left(x^2-3x+3\right)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-\cancel{3x}+3-x^2+\cancel{3x}-3}{(x-1)^2}$$

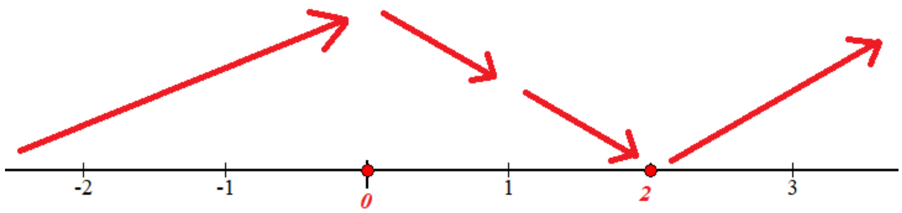
$$f'(x)=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0\Rightarrow x^2-2x=0\Rightarrow x(x-2)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ o\\ x=2\end{cases}$$

Existen dos puntos críticos: $x = 0$ y $x = 2$. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores. Añadimos el valor $x = 1$ excluido del dominio.

- En $(-\infty,0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1)=\frac{(-1)^2-2(-1)}{(-1-1)^2}=\frac{3}{4}>0$. La función crece en $(-\infty,0)$
- En $(0,1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale $f'(0.5)=\frac{0.5^2-1}{(0.5-1)^2}=\frac{-0.75}{0.25}<0$. La función decrece en $(0,1)$
- En $(1,2)$ tomamos $x = 1.5$ y la derivada vale $f'(1.5)=\frac{1.5^2-3}{(1.5-1)^2}=\frac{-0.75}{0.25}<0$. La función decrece en $(1,2)$
- En $(2,+\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3)=\frac{3^2-6}{(3-1)^2}=\frac{3}{4}>0$. La función crece en $(2,+\infty)$

La función sigue el esquema siguiente:



La función crece en $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ y decrece en $(0,1)\cup(1,2)$.

La función presenta un máximo relativo en $x = 0$. Como $f(0)=\frac{0^2-0+3}{0-1}=-3$ las coordenadas del máximo son (0, –3).

La función presenta un mínimo relativo en $x = 2$. Como $f(2)=\frac{2^2-6+3}{2-1}=1$ las coordenadas del mínimo son (2, 1).

b) Descomponemos la fracción $\frac{9}{x^2+x-2}$ en fracciones simples.

$$x^2+x-2=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(-2)}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases}\dfrac{-1+3}{2}=1\\ \dfrac{-1-3}{2}=-2\end{cases} \Rightarrow x^2+x-2=(x+2)(x-1)$$

$$\frac{9}{x^2+x-2}=\frac{9}{(x+2)(x-1)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+B(x+2)}{(x+2)(x-1)}$$

$$\Rightarrow 9=A(x-1)+B(x+2)\Rightarrow\begin{cases}x=1\to 9=A(0)+B(1+2)\to 9=3B\to B=3\\ x=-2\to 9=A(-2-1)+B(0)\to 9=-3A\Rightarrow A=-3\end{cases}$$

$$\frac{9}{x^2+x-2}=\frac{-3}{x+2}+\frac{3}{x-1}$$

Calculamos la integral pedida.

$$\int\frac{9}{x^2+x-2}dx=\int\frac{-3}{x+2}+\frac{3}{x-1}dx=-3\int\frac{1}{x+2}dx+3\int\frac{1}{x-1}dx=\boxed{-3\ln|x+2|+3\ln|x-1|+K}$$

4. *(1,5 puntos)* Se lanza 10 veces un dado equilibrado (es decir un dado donde todas sus caras tiene la misma probabilidad de aparecer).
a) *(*0,75 *puntos)* Determine la probabilidad de que salga un número par en todos los lanzamientos.
b) *(*0,75 *puntos)* Determine la probabilidad de que salga un número par exactamente en tres lanzamientos. (NO es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen y sin hacer los cálculos).

Se trata de una distribución binomial. Sea A el suceso "sale número par en el lanzamiento de un dado" y $\overline{A}$ su suceso contrario "sale impar al lanzar el dado".

Se tiene: $P(A) = p = 0.5; P(\overline{A}) = q = 0.5$

X = Nº de veces que sale número par en 10 lanzamientos de un dado equilibrado.

X = B(10, 0.5)

a)

$$P(X = 10) = \binom{10}{10} 0.5^{10} \cdot 0.5^{0} = 0.5^{10} = \boxed{\frac{1}{1024}}$$

b)

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} 0.5^{3} \cdot 0.5^{7} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} 0.5^{10} = \frac{120}{1024} = \boxed{\frac{15}{128}}$$

OPCIÓN B

1. *(3 puntos)*

a) *(1,5 puntos)* Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-1&0\\2&0&2\end{pmatrix}$$

encuentre la matriz *X*, de dimensión 3x3, que resuelve la ecuación matricial:

$$AX+B=A^2$$

b) *(1,5 puntos)* Determine el rango de la matriz *C* siguiente según los diferentes valores del parámetro *k*:

$$C=\begin{pmatrix}2&1&3\\4&2&k\\k&k&1\end{pmatrix}$$

a) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$AX+B=A^2 \Rightarrow AX=A^2-B \Rightarrow X=A^{-1}A^2-A^{-1}B=A^{-1}AA-A^{-1}B \Rightarrow \left\{A^{-1}A=Id\right\} \Rightarrow$$
$$X=A-A^{-1}B$$

Comprobamos que existe la inversa de A y la calculamos.

$$|A|=\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}=0+0+0-0-1-0=-1\neq 0 \rightarrow \text{Existe } A^{-1}$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=A$$

Sustituimos el valor de las matrices en la ecuación matricial.

$$X=A-A^{-1}B=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-1&0\\2&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&-1&1\\2&0&2\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}-1&2&0\\0&1&-1\\-2&0&-1\end{pmatrix}}$$

b) El rango de C es 3 o menor.

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & k \\ k & k & 1 \end{vmatrix} = 4 + k^2 + 12k - 6k - 4 - 2k^2 = -k^2 + 6k$$

$$|C| = 0 \Rightarrow -k^2 + 6k = 0 \Rightarrow k(-k+6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ o \\ k = 6 \end{cases}$$

Nos planteamos tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $k \neq 0 \; y \; k \neq 6$

En este caso el determinante de C es no nulo y su rango es 3.

CASO 2. $k = 0$

En este caso el determinante de C es nulo y su rango no es 3.

La matriz queda $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Observamos que la columna 1ª y 2ª son proporcionales.

Buscamos un menor de orden 2 con determinante no nulo, por ejemplo, el que resulta de quitar la fila y columna 1ª → $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.

El rango de C es 2.

CASO 3. $k = 6$

En este caso el determinante de C es nulo y su rango no es 3.

La matriz queda $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}$. Buscamos un menor de orden 2 con determinante no nulo, por ejemplo, el que resulta de quitar la fila y columna 1ª → $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 36 = -34 \neq 0$.

El rango de C es 2.

Resumiendo: El rango de C es 3 si $k \neq 0 \; y \; k \neq 6$ y el rango es 2 si $k = 0$ o $k = 6$.

2. *(1,5 puntos)* Determine el valor de los parámetros m y n que hacen que la recta

$$r:\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y+z=3 \end{cases}$$

esté contenida en el plano:

$$\pi: mx+y+nz=4$$

Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta.

$$r:\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y+z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=2-x-y \\ 2x+3y+z=3 \end{cases} \Rightarrow 2x+3y+2-x-y=3 \Rightarrow x+2y=1 \Rightarrow \boxed{x=1-2y} \Rightarrow$$

$$z=2-(1-2y)-y=2-1+2y-y \Rightarrow \boxed{z=1+y} \Rightarrow \boxed{r:\begin{cases} x=1-2t \\ y=t \qquad ,siendo\ t\in\mathbb{R} \\ z=1+t \end{cases}}$$

Como la recta está contenida en el plano el punto P(1,0,1) que pertenece a la recta debe pertenecer al plano.

$$\left.\begin{array}{l} P(1,0,1)\in\pi \\ \pi: mx+y+nz=4 \end{array}\right\} \Rightarrow m+0+n=4 \Rightarrow \boxed{m+n=4}$$

Además, el vector director de la recta $\overrightarrow{v_r}=(-2,1,1)$ y el vector normal del plano $\vec{n}=(m,1,n)$ deben ser perpendiculares, es decir, su producto escalar es cero.

$$\overrightarrow{v_r}\cdot\vec{n}=0 \Rightarrow (-2,1,1)(m,1,n)=0 \Rightarrow -2m+1+n=0 \Rightarrow \boxed{2m-n=1}$$

Juntamos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 2m-n=1 \\ m+n=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \\ \hline 3m \qquad =5 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{m=\frac{5}{3}} \Rightarrow \frac{5}{3}+n=4 \Rightarrow \boxed{n=4-\frac{5}{3}=\frac{7}{3}}$$

Los valores buscados son $m=\frac{5}{3};\ n=\frac{7}{3}$

3. *(4 puntos)*

a) *(1.5 puntos)* Calcule el límite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-\frac{x^3-x^2-x+2}{x^2}\right)^{\frac{3+x^2}{x}}$$

b) *(1,5 puntos)* De entre todos los triángulos rectángulos que tiene un área de 1 cm^2, determine el que tiene la hipotenusa de longitud mínima y proporcione las longitudes de los tres lados de ese triángulo.

c) *(1 punto)* Calcule el área limitada por la curva $f(x)=x^2+x$ y la recta $g(x)=x+4$.

a)

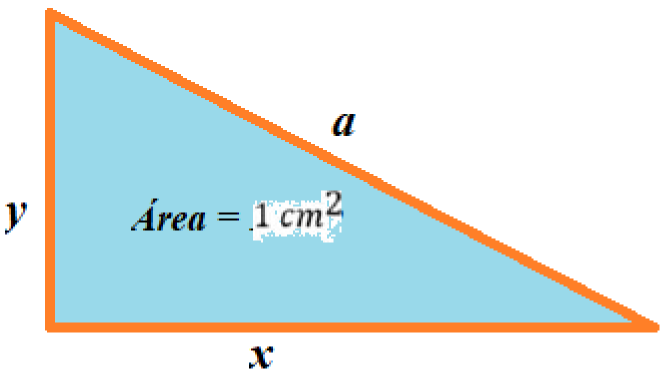
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-\frac{x^3-x^2-x+2}{x^2}\right)^{\frac{3+x^2}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3+x}{x^2}-\frac{x^3-x^2-x+2}{x^2}\right)^{\frac{3+x^2}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cancel{x^3}+x-\cancel{x^3}+x^2+x-2}{x^2}\right)^{\frac{3+x^2}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x-2}{x^2}\right)^{\frac{3+x^2}{x}}=1^{+\infty}=$$

$$=\text{Indeterminación }(n^o\ e)=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3+x^2}{x}\left(\frac{x^2+2x-2}{x^2}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3+x^2}{x}\left(\frac{\cancel{x^2}+2x-2-\cancel{x^2}}{x^2}\right)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3+x^2}{x}\left(\frac{2x-2}{x^2}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x-6+2x^3-2x^2}{x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3-2x^2+6x-6}{x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x^3}}=\boxed{e^2}$$

b) Consideramos un triángulo rectángulo de hipotenusa "*a*" y catetos "*x*" e "*y*".



Como el área es 1 entonces $área=1=\frac{x\cdot y}{2}\Rightarrow x\cdot y=2\Rightarrow y=\frac{2}{x}$.

Además, por el teorema de Pitágoras tenemos que $a^2=x^2+y^2$. Unimos las dos condiciones y tenemos la longitud de la hipotenusa en función del valor del cateto "x".

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{2}{x} \\ a^2=x^2+y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2=x^2+\left(\frac{2}{x}\right)^2=x^2+\frac{4}{x^2}=\frac{x^4+4}{x^2}\Rightarrow a(x)=\sqrt{\frac{x^4+4}{x^2}}=\frac{\sqrt{x^4+4}}{x}$$

Buscamos el máximo de esta función *a(x)*.

$$a(x)=\frac{\sqrt{x^4+4}}{x}\Rightarrow a'(x)=\frac{\dfrac{4x^3}{2\sqrt{x^4+4}}\cdot x-\sqrt{x^4+4}}{x^2}=\frac{\dfrac{2x^4}{\sqrt{x^4+4}}-\sqrt{x^4+4}}{x^2}=\frac{\dfrac{2x^4-\left(\sqrt{x^4+4}\right)^2}{\sqrt{x^2+4}}}{x^2}$$

$$a'(x)=\frac{2x^4-\left(x^4+4\right)}{x^2\sqrt{x^4+4}}=\frac{2x^4-x^4-4}{x^2\sqrt{x^4+4}}=\frac{x^4-4}{x^2\sqrt{x^4+4}}$$

$$a'(x)=0\Rightarrow\frac{x^4-4}{x^2\sqrt{x^4+4}}=0\Rightarrow x^4-4=0\Rightarrow x=\pm\sqrt[4]{4}=\pm\sqrt{2}$$

De los dos puntos críticos obtenidos solo consideramos el valor positivo $x=\sqrt{2}$.

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x=\sqrt{2}$.

- En $\left(0,\sqrt{2}\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $a'(1)=\dfrac{1^4-4}{1^2\sqrt{1^4+4}}=-\dfrac{3}{\sqrt{5}}<0$. La función decrece en $\left(0,\sqrt{2}\right)$.
- En $\left(0,\sqrt{2}\right)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $a'(2)=\dfrac{2^4-4}{2^2\sqrt{2^4+4}}=\dfrac{12}{4\sqrt{20}}>0$. La función crece en $\left(0,\sqrt{2}\right)$.

La función presenta un mínimo en $x=\sqrt{2}$.

El valor mínimo de la hipotenusa es $a\left(\sqrt{2}\right)=\dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^4+4}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=2$ y el del otro cateto es $y=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

El triángulo rectángulo de área 1 cm^2 con longitud de hipotenusa mínima tiene las medidas: Hipotenusa de 2 cm y los catetos son iguales y de longitud $\sqrt{2}$ cm.

c) Averiguamos los puntos de corte de las gráficas de las funciones.

$$f(x)=g(x)\Rightarrow x^2+x=x+4\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2$$

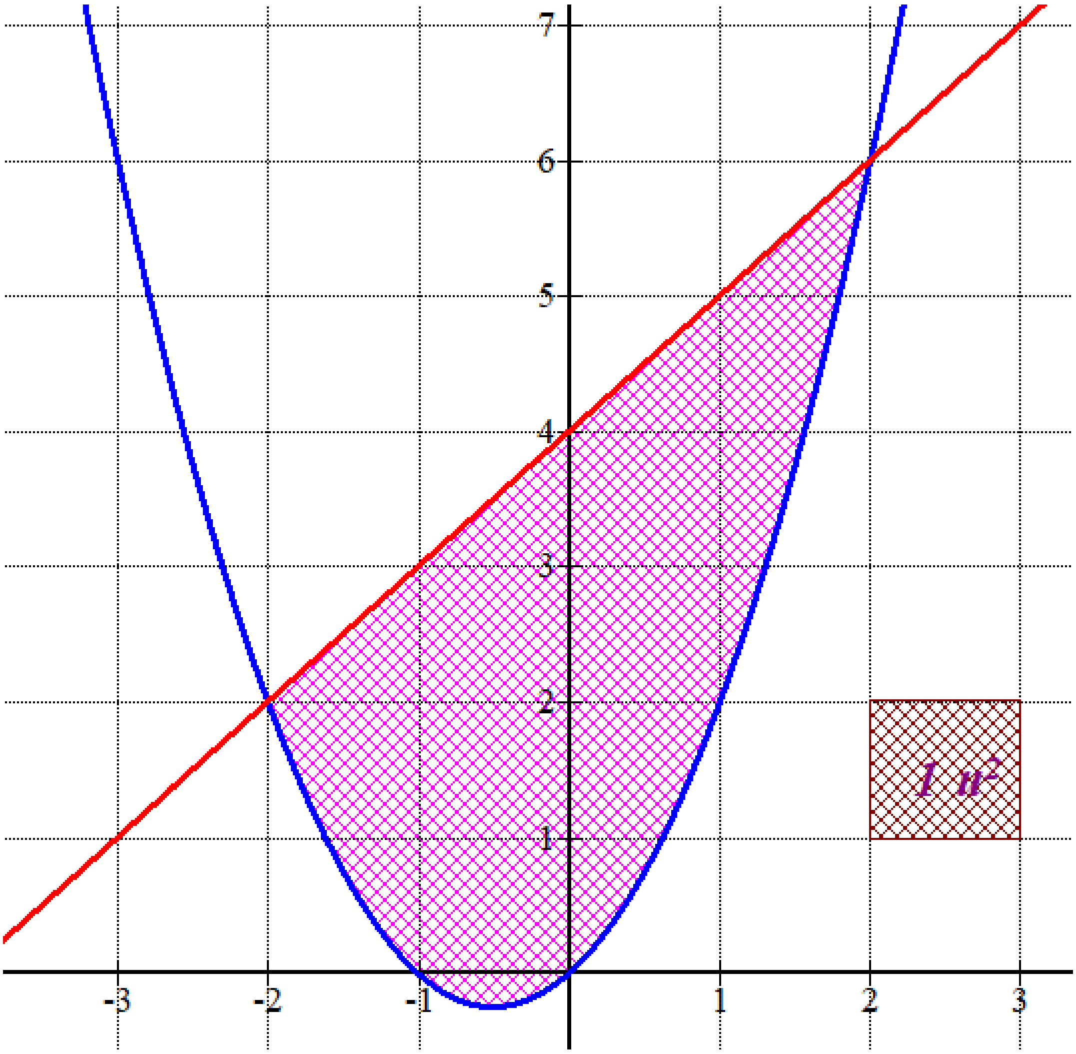
El área encerrada entre las gráficas de las funciones es el valor absoluto de la integral definida de la diferencia entre las dos funciones de $x = -2$ hasta $x = 2$:

$$\int_{-2}^{2} g(x)-f(x)dx=\int_{-2}^{2} x^2+x-(x+4)dx=\int_{-2}^{2} x^2-4dx=\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_{-2}^{2}=$$

$$=\left[\frac{2^3}{3}-8\right]-\left[\frac{(-2)^3}{3}+8\right]=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}-16=-\frac{32}{3}$$

$$Área=\left|-\frac{32}{3}\right|=\boxed{\frac{32}{3}\approx 10.66\,u^2}$$

No pide dibujar el recinto pero lo hacemos para comprobar la bondad de la solución



4. *(1,5 puntos)*
a) *(0,75 puntos)* En una clase de 20 alumnos, 10 estudian ruso, 12 practican algún deporte y tan solo 2 hacen ambas cosas. ¿Cuál es la probabilidad de que, al escoger un alumno al azar, si estudia ruso, practique algún deporte?
b) *(0,75 puntos)* Un tirador de pistola olímpica, tiene una probabilidad de 0,8 de hacer blanco. Si dispara 12 veces, ¿cuál es la probabilidad de que haga 10 o más blancos?. (NO es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen y sin hacer los cálculos).

a) Realizamos una tabla de contingencia con los datos del problema.

	Practican deporte	No practican deporte	
Estudian ruso	**2**		**10**
No estudian ruso			
	12		**20**

Completamos la tabla

	Practican deporte	No practican deporte	
Estudian ruso	**2**	**8**	**10**
No estudian ruso	**10**	**0**	**10**
	12	**8**	**20**

Hay 10 alumnos que practican ruso y de ellos solo 2 practican deporte, por lo que la probabilidad pedida es $\frac{2}{10}=0.2$ ¡¡¡No era necesaria la tabla de contingencia!!!

b) Se trata de una situación dicotómica (hace blanco / no hace blanco) que da lugar a una distribución binomial.
En nuestro caso, se repite la experiencia 12 veces (*n = 12*), la probabilidad de hacer blanco (éxito) es *p = 0.8* y la del suceso contrario o fracaso es *q = 0.2*.

X es la variable que cuenta el número de blancos. X = B(12, 0.8)

Nos piden calcular $P(X\geq 10)$.

$$P(X\geq 10)=P(X=10)+P(X=11)+P(X=12)=$$
$$=\binom{12}{10}0.8^{10}\cdot 0.2^{2}+\binom{12}{11}0.8^{11}\cdot 0.2^{1}+\binom{12}{12}0.8^{12}\cdot 0.2^{0}=$$
$$=\frac{12\cdot 11}{2}0.8^{10}\cdot 0.2^{2}+\frac{12}{1}0.8^{11}\cdot 0.2+0.8^{12}=$$
$$=66\cdot 0.8^{10}\cdot 0.2^{2}+12\cdot 0.8^{11}\cdot 0.2+0.8^{12}=\boxed{0.5583}$$