	Evaluación de Bachillerato para acceder a estudios universitarios **Castilla y León**	**MATEMÁTICAS II**	**EJERCICIO** **Nº Páginas: 2**

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cinco ejercicios de la misma en el orden que desee.
2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).
CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Cada uno de los ejercicios se puntuará sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

E1.- Tres números x, y, z cumplen lo siguiente:

- El primero de ellos, x, es la suma de los otros dos.
- El segundo, y, es la mitad del primero más el triple del tercero.

a) Demostrar que hay infinitos números que cumplen estas condiciones, encontrando una expresión general de la solución. **(1,5 puntos)**

b) Encontrar tres números concretos que cumplan estas condiciones. **(0,5 puntos)**

E2.- Dados el plano $\pi \equiv 2x+y+z-3=0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=2 \end{cases}$

a) Calcular el punto de intersección del plano π y de la recta r. **(1 punto)**
b) Encontrar la ecuación de la recta s contenida en el plano π y que corta perpendicularmente a r. **(1 punto)**

E3.- Sea la función $f(x)=\dfrac{1}{x}+ax+b$

a) Encontrar a y b para que la función tenga un mínimo relativo en el punto $\left(\dfrac{1}{2},6\right)$. **(1 punto)**

b) Suponiendo que $a = 4$ y $b = 2$, estudia su continuidad y, en el caso de tenerlas, sus asíntotas. **(1 punto)**

E4.- Sea la función $f(x)=senx$

a) Encontrar las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x)$ en los puntos $x = 0$ y $x = \pi$. Encontrar el punto en que se cortan ambas rectas tangentes. **(1 punto)**
b) Hallar el área comprendida entre la gráfica de $f(x)$ y las rectas de ecuaciones:
$y=x$ e $y=-x+\pi$. **(1 punto)**

E5.- Se lanzan tres monedas al aire:
a) Halla el espacio muestral. **(1 punto)**
b) Halla la probabilidad de:
i) Obtener más caras que cruces. **ii)** Obtener las mismas caras que cruces. **(1 punto)**

OPCIÓN B

E1.- Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & k\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$

a) Discutir, según los valores de k, cuándo A tiene inversa y calcularla para k=2. **(1 punto)**

b) Para k=2, resolver la siguiente ecuación matricial: $AX+B=AB$. **(1 punto)**

E2.- Dados el plano $\pi \equiv ax+y-z+b=0$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{1}$.

a) Encontrar a y b para que la recta este contenida en el plano. **(1 punto)**

b) ¿Existen valores a y b para que la recta sea perpendicular al plano? Razonar la posible respuesta negativa o encontrarlos en su caso. **(1 punto)**

E3.- De todos los rectángulos de perímetro 40 cm encontrar el que tiene la diagonal de menor longitud. **(2 puntos)**

E4.- a) Calcular $\lim_{x\to+\infty}\frac{3e^x-senx}{e^x+x}$. **(1 punto)**

b) Encontrar el área del recinto limitado por las funciones $f(x)=|x|-1$ y $g(x)=1-x^2$. **(1 punto)**

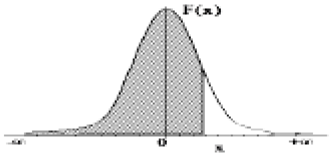
E5.- El diámetro interior de un anillo se distribuye normalmente con una media de 10 cm y una desviación típica de 0,03.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un anillo tenga un diámetro mayor de 10,075? **(1 punto)**

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un anillo tenga un diámetro entre 9,97 y 10,03? **(1 punto)**

Distribución Normal

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9014
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9318
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

SOLUCIONES

OPCIÓN A

E1.- Tres números x, y, z cumplen lo siguiente:
• El primero de ellos, x, es la suma de los otros dos.

• El segundo, y, es la mitad del primero más el triple del tercero.

a) Demostrar que hay infinitos números que cumplen estas condiciones, encontrando una expresión general de la solución. **(1,5 puntos)**

b) Encontrar tres números concretos que cumplan estas condiciones. **(0,5 puntos)**

a) Por la información proporcionada los tres números pedidos deben cumplir el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x = y + z \\ y = \dfrac{x}{2} + 3z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = y + z \\ 2y = x + 6z \end{array}\right\}$$

Podemos resolver el sistema y hallar sus soluciones.

$$\left.\begin{array}{l} x = y + z \\ 2y = x + 6z \end{array}\right\} \Rightarrow 2y = y + z + 6z \Rightarrow \boxed{y = 7z} \Rightarrow \boxed{x = 7z + z = 8z}$$

$$\textit{Solución}: x = 8t;\;\; y = 7t;\;\; z = t.\;\; \text{Siendo } t \in \mathbb{R}$$

Los valores que podemos darle a "t" son infinitos y por tanto las soluciones del problema planteado son infinitas.

b) Le damos a "t" un valor concreto y obtenemos una de las infinitas soluciones:

$$t = 1 \Rightarrow x = 8 \cdot 1 = 8;\;\; y = 7 \cdot 1 = 7;\;\; z = 1. \textit{Una solución es } x = 8;\; y = 7;\; z = 1$$

Un ejemplo de números que cumplen lo pedido son 1, 7 y 8.

E2.- Dados el plano $\pi \equiv 2x+y+z-3=0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=2 \end{cases}$

a) Calcular el punto de intersección del plano π y de la recta r. **(1 punto)**

b) Encontrar la ecuación de la recta s contenida en el plano π y que corta perpendicularmente a r. **(1 punto)**

a) Expresamos la recta r en forma paramétrica:

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-y-z \\ x-y+z=2 \end{cases} \Rightarrow (-y-z)-y+z=2 \Rightarrow -2y=2 \Rightarrow \boxed{y=-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=-(-1)-z=1-z} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=1-t \\ y=-1 \\ z=t \end{cases}$$

La intersección de la recta r con el plano π se deduce al sustituir las ecuaciones paramétricas de r en la ecuación de π:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv 2x+y+z-3=0 \\ r \equiv \begin{cases} x=1-t \\ y=-1 \\ z=t \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 2(1-t)+(-1)+t-3=0 \Rightarrow 2-2t-1+t-3=0 \Rightarrow -t-2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t=-2 \Rightarrow \begin{cases} x=1-(-2)=3 \\ y=-1 \\ z=-2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(3,-1,-2)}$$

El punto de intersección tiene coordenadas *P(3, –1, –2).*

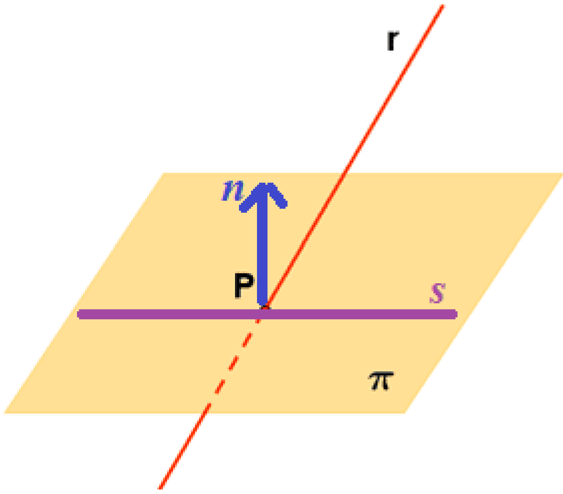
OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Podría haberse determinado las coordenadas (x,y,z) del punto P resolviendo el sistema formado por la ecuación general del plano y las ecuaciones implícitas de la recta:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y+z-3=0 \\ x+y+z=0 \\ x-y+z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y+z-3=0 \\ x=-y-z \\ x-y+z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2(-y-z)+y+z-3=0 \\ -y-z-y+z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -y-z-3=0 \\ -2y=2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -y-z-3=0 \\ \boxed{y=-1} \end{array}\right\} \Rightarrow +1-z-3=0 \Rightarrow \boxed{-2=z} \Rightarrow \boxed{x=-(-1)-(-2)=3} \Rightarrow \boxed{P(3,-1,-2)}$$

b) La recta s está contenida en el plano π, luego su vector director, $\overrightarrow{v_s}$, es perpendicular al vector normal al plano, $\vec{n}=(2,1,1)$. También es perpendicular a la recta r, por lo que $\overrightarrow{v_s}$ es, a su vez, perpendicular al vector director de r, $\overrightarrow{v_r}=(-1,0,1)$.



Por todo lo anterior nos sirve como vector director de la recta s el producto vectorial de $\vec{n}=(2,1,1)$ y $\vec{v_r}=(-1,-1,1)$.

$$\vec{v_r}\times\vec{n}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=i-j+k-2j=i-3j+k=(1,-3,1)$$

Como la recta s corta a la recta r el punto P debe pertenecer a la recta s.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v_s}=\vec{v_r}\times\vec{n}=(1,-3,1) \\ P(3,-1,-2)\in s \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{s\equiv\begin{cases} x=3+t \\ y=-1-3t \quad \text{Siendo } t\in\mathbb{R} \\ z=-2+t \end{cases}}$$

E3.- Sea la función $f(x)=\frac{1}{x}+ax+b$

a) Encontrar *a* y *b* para que la función tenga un mínimo relativo en el punto $\left(\frac{1}{2},6\right)$. **(1 punto)**

b) Suponiendo que *a = 4* y *b = 2*, estudia su continuidad y, en el caso de tenerlas, sus asíntotas. **(1 punto)**

a) La función presenta un mínimo relativo cuando x = 1/2, por lo que ha de cumplirse que la derivada se anule en dicho valor → $f\,'$(1/2) = 0:

$$f(x)=\frac{1}{x}+ax+b \Rightarrow f\,'(x)=-\frac{1}{x^2}+a$$

$$\left.\begin{array}{l} f\,'(x)=-\frac{1}{x^2}+a \\ f\,'\left(\frac{1}{2}\right)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+a=0 \Rightarrow -4+a=0 \Rightarrow \boxed{a=4}$$

Teniendo en cuenta que la gráfica de la función pasa por el punto $\left(\frac{1}{2},6\right)$:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\frac{1}{x}+4x+b \\ f\left(\frac{1}{2}\right)=6 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{2}}+4\frac{1}{2}+b=6 \Rightarrow 2+2+b=6 \Rightarrow \boxed{b=2}$$

Los valores buscados son *a = 4* y *b = 2*.

Se comprueba que en x = 1/2 hay, efectivamente, un mínimo, evaluando el signo de f''(1/2):

$$f\,'(x)=-\frac{1}{x^2}+4=-x^{-2}+4 \Rightarrow f\,''(x)=+2x^{-3}=\frac{2}{x^3}$$

$$f\,''\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}=16>0$$

b) La función queda $f(x)=\frac{1}{x}+4x+2$.

El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{0\}$, ya que en x = 0 la función no está definida.
En consecuencia: $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$

Asíntota vertical. $x=a$

Evaluamos el límite de la función cuando $x \longrightarrow 0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} + 4x + 2 = \frac{1}{0^-} + 0 + 2 = -\infty \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} + 4x + 2 = \frac{1}{0^+} + 0 + 2 = +\infty \end{cases}$$

La función presenta una asíntota vertical en *x = 0*.

Asíntota horizontal. $y = b$

Evaluamos los límites infinitos de la función:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + 4x + 2 = \frac{1}{+\infty} + \infty + 2 = 0 + \infty + 2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} + 4x + 2 = \frac{1}{-\infty} - \infty + 2 = 0 - \infty + 2 = -\infty$$

No presenta asíntotas horizontales.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x} + 4x + 2}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} + 4 + \frac{2}{x} = \frac{1}{\infty^2} + 4 + \frac{2}{\infty} = 0 + 4 + 0 = 4$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - mx \right) = \lim_{x\to\infty} \left(\left(\frac{1}{x} + \cancel{4x} + 2 \right) - \cancel{4x} \right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x} + 2 \right) = \frac{1}{\infty} + 2 = 0 + 2 = 2$$

La asíntota oblicua tiene ecuación $y = 4x + 2$

E4.- Sea la función $f(x) = senx$

a) Encontrar las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x)$ en los puntos $x = 0$ y $x = \pi$. Encontrar el punto en que se cortan ambas rectas tangentes. **(1 punto)**

b) Hallar el área comprendida entre la gráfica de $f(x)$ y las rectas de ecuaciones: $y = x$ e $y = -x + \pi$. **(1 punto)**

a)

La recta tangente a la gráfica de una función $f(x)$ en un punto (x_0, y_0) viene dada por:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Como $f(x) = senx$, entonces $f'(x) = \cos x$. La recta tangente a la gráfica de f cuando $x = 0$ es:

$$\left.\begin{array}{l} y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \\ x_0 = 0 \\ y_0 = f(0) = sen0 = 0 \\ f'(x_0) = f'(0) = \cos 0 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow y - 0 = 1(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = x}$$

Y la recta tangente a la gráfica de f cuando $x = \pi$ es:

$$\left.\begin{array}{l} y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \\ x_0 = \pi \\ y_0 = f(\pi) = sen\pi = 0 \\ f'(x_0) = f'(\pi) = \cos\pi = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow y - 0 = -1(x - \pi) \Rightarrow \boxed{y = -x + \pi}$$

Las rectas $y = x$ (tangente a la gráfica de f en $x = 0$) e $y = -x + \pi$ (tangente a la gráfica de f en $x = \pi$) se cortan en:

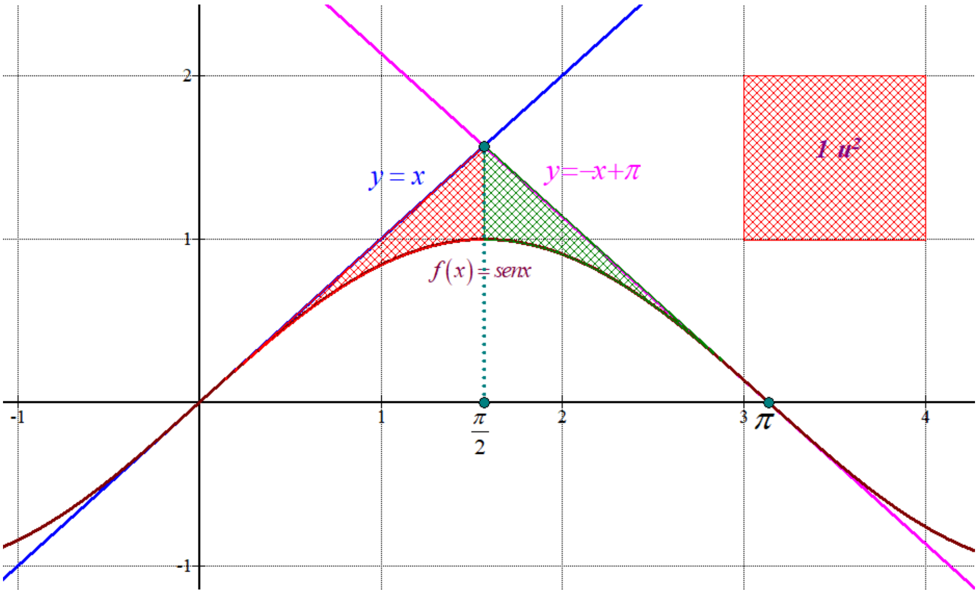
$$\left.\begin{array}{l} y = x \\ y = -x + \pi \end{array}\right\} \Rightarrow x = -x + \pi \Rightarrow 2x = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

b)

Averiguamos donde corta la gráfica de $f(x) = senx$ el eje X.

$$\left.\begin{array}{r} f(x) = senx \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow senx = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pi \end{array}\right.$$

Se trata de calcular el área del recinto que aparece de color verde y naranja en la siguiente representación:



Las rectas $y = x$ (tangente a la gráfica de f en $x = 0$) e $y = -x + \pi$ (tangente a la gráfica de f en $x = \pi$) se cortan en $x = \frac{\pi}{2}$.

El área pedida se calcula como la suma de dos integrales definidas:

$$Área = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x - senx dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -x + \pi - senx dx = \left[\frac{x^2}{2} + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-\frac{x^2}{2} + \pi x + \cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$= \left[\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] - \left[\frac{0^2}{2} + \cos 0\right] + \left[-\frac{\pi^2}{2} + \pi \cdot \pi + \cos \pi\right] - \left[-\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} + \pi\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{\pi^2}{8} + 0 - 0 - 1 - \frac{\pi^2}{2} + \pi^2 - 1 + \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{2} - 0 =$$

$$= \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{8} + \cancel{\pi^2} - \frac{\cancel{\pi^2}}{\cancel{2}} - \frac{\cancel{\pi^2}}{\cancel{2}} - 2 = \boxed{\frac{\pi^2}{4} - 2 \approx 0.46\ u^2}$$

E5.- Se lanzan tres monedas al aire:
a) Halla el espacio muestral. **(1 punto)**
b) Halla la probabilidad de:
i) Obtener más caras que cruces. **ii)** Obtener las mismas caras que cruces. **(1 punto)**

a) Llamamos C = {Sacar cara al lanzar una moneda} y X = {Sacar cruz al lanzar una moneda}.

E = {CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX}

b)

i.

Obtenemos más caras que cruces en los 4 sucesos elementales: CCC, CCX, CXC, XCC.

Teniendo en cuenta la Ley de Laplace:

$$P\left(\text{Más caras que cruces}\right)=\frac{\text{Nº de casos en los que salen más caras que cruces}}{\text{Nº de casos posibles}}=\frac{4}{8}=\boxed{\frac{1}{2}=0.5}$$

ii. No hay ningún suceso elemental en el que salga el mismo número de caras que cruces, por lo que este es un suceso imposible y su probabilidad es cero.

$$P\left(\text{Mismas caras que cruces}\right)=\boxed{0}$$

OPCIÓN B

E1.- Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&k\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\1&1&2\end{pmatrix}$

a) Discutir, según los valores de k, cuándo A tiene inversa y calcularla para k=2. **(1 punto)**

b) Para k=2, resolver la siguiente ecuación matricial: $AX+B=AB$. **(1 punto)**

a) Para que una matriz A tenga inversa, debe cumplirse que $|A| \neq 0$. Así que evaluamos el valor de $|A|$ en función del parámetro k:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&k\end{vmatrix}=k+0+0-1-0-0=k-1$$

$$|A|=0 \Rightarrow k-1=0 \Rightarrow k=1$$

Por lo que la matriz A tiene inversa cuando k es cualquier valor distinto de 1.

Para k = 2 existe la inversa y la calculamos.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}}{2-1}=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0&0\\1&2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0&1\\0&2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&0\\1&0\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&1\\0&0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}}$$

b) Despejamos X en la ecuación matricial $AX+B=AB$

$$AX+B=AB \Rightarrow AX=AB-B \Rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}AB-A^{-1}B \Rightarrow X=B-A^{-1}B$$

Sustituimos los valores de cada matriz y resolvemos.

$$X=B-A^{-1}B \Rightarrow X=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\1&1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\1&1&2\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\1&1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2-1&-1&-2\\0&2&2\\-1+1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\1&1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&2&2\\0&1&2\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}0&1&2\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}}$$

E2.- Dados el plano $\pi \equiv ax + y - z + b = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{1}$.

a) Encontrar a y b para que la recta este contenida en el plano. **(1 punto)**

b) ¿Existen valores a y b para que la recta sea perpendicular al plano? Razonar la posible respuesta negativa o encontrarlos en su caso. **(1 punto)**

a) La recta r pasa por el punto $P(1, 2, 3)$ y su vector director es $\overrightarrow{v_r} = (1,-1,1)$. Para que r esté contenida en el plano π, el vector $\overrightarrow{v_r}$ debe ser perpendicular al vector normal al plano, $\vec{n} = (a,1,-1)$ y por ello su producto escalar debe ser nulo:

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (1,-1,1)(a,1,-1) = 0 \Rightarrow a - 1 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

Además, también ha de cumplirse que el punto P de r pertenezca al plano π:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv 2x + y - z + b = 0 \\ P(1,\ 2,\ 3) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow 2 + 2 - 3 + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = -1}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Expresamos r en forma paramétrica:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

Si hacemos $\lambda = 1$, obtenemos otro punto Q de la recta: $Q(2, 1, 4)$.

Para que r pertenezca al plano $\pi \equiv ax + y - z + b = 0$ los puntos P y Q deben pertenecer a dicho plano y satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv ax + y - z + b = 0 \\ P(1,\ 2,\ 3) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow a + 2 - 3 + b = 0 \Rightarrow \boxed{a + b = 1}$$

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv ax + y - z + b = 0 \\ Q(2,1,4) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow 2a + 1 - 4 + b = 0 \Rightarrow \boxed{2a + b = 3}$$

Resolvemos el sistema formado por ambas ecuaciones:

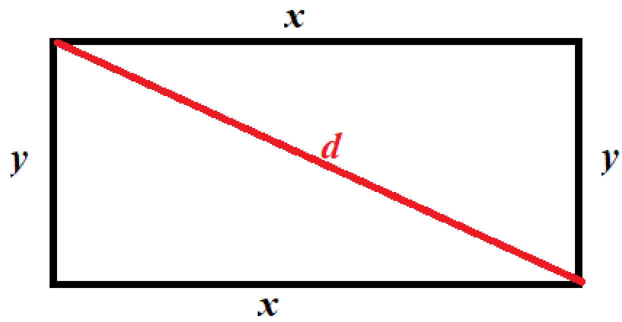
$$\left.\begin{array}{r} a + b = 1 \\ 2a + b = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} b = 1 - a \\ 2a + b = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 2a + 1 - a = 3 \Rightarrow \boxed{a = 2} \Rightarrow \boxed{b = 1 - 2 = -1}$$

b) Si la recta r fuese perpendicular al plano π, el vector director de r, $\overrightarrow{v_r} = (1,-1,1)$, sería proporcional al vector normal de π, $\vec{n} = (a,1,-1)$. Para ello:

$$\frac{1}{a} = \frac{-1}{1} = \frac{1}{-1} \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

Es decir, cualquier plano de la forma $\pi \equiv -x + y - z + b = 0$ será perpendicular a la recta r, sea cual sea el valor de b (hay infinitos planos, paralelos entre sí, dependiendo del valor que demos a b, que serán perpendiculares a r).

E3. De todos los rectángulos de perímetro 40 cm encontrar el que tiene la diagonal de menor longitud. **(2 puntos)**



Sea "x" la base del rectángulo, "y" su altura y "d" la longitud de su diagonal (todas en cm). Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$d^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Teniendo en cuenta que el perímetro del rectángulo debe ser 40 cm:

$$2x + 2y = 40 \Rightarrow x + y = 20 \Rightarrow y = 20 - x$$

Sustituyendo en la expresión de la diagonal, se obtiene una expresión que únicamente es función de x:

$$d(x) = \sqrt{x^2 + (20-x)^2} = \sqrt{x^2 + (400 - 40x + x^2)} = \sqrt{2x^2 - 40x + 400}$$

Como queremos calcular las dimensiones del rectángulo que hacen que su diagonal sea mínima, debemos minimizar la función $d(x)$, para lo cual se deriva e iguala a cero:

$$d(x) = \sqrt{2x^2 - 40x + 400} \Rightarrow d'(x) = \frac{4x - 40}{2\sqrt{2x^2 - 40x + 400}} = \frac{2x - 20}{\sqrt{2x^2 - 40x + 400}}$$

$$d'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x - 20}{\sqrt{2x^2 - 40x + 400}} = 0 \Rightarrow 2x - 20 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 10}$$

Siendo la longitud de la base del rectángulo de 10 cm, la altura debe ser:

$$x = 20 \Rightarrow y = 20 - 10 = 10$$

Conviene comprobar que en $x = 10$, efectivamente, aparece un mínimo relativo en la función $d(x)$. Para ello, evaluamos el signo de $d'(x)$ antes y después de $x = 10$.

- En $(0,10)$ tomamos $x = 5$ y la derivada vale

$d'(5) = \frac{10 - 20}{\sqrt{2 \cdot 5^2 - 40 \cdot 5 + 400}} = -\frac{10}{\sqrt{250}} < 0$. La función decrece en $(0,10)$

- En $(10,+\infty)$ tomamos $x = 15$ y la derivada vale

$d'(15) = \frac{30 - 20}{\sqrt{2 \cdot 15^2 - 40 \cdot 15 + 400}} = \frac{10}{\sqrt{250}} > 0$. La función crece en $(10,+\infty)$

La función presenta un mínimo en $x = 10$.

La diagonal tiene longitud mínima en un rectángulo de base y altura de 10 cm (un cuadrado).

E4. a) Calcular $\lim_{x\to+\infty} \frac{3e^x - senx}{e^x + x}$. **(1 punto)**

b) Encontrar el área del recinto limitado por las funciones $f(x) = |x| - 1$ y $g(x) = 1 - x^2$. **(1 punto)**

a)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3e^x - senx}{e^x + x} = \frac{3e^{+\infty} - sen(+\infty)}{e^{+\infty} + \infty} = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{Indeterminación(L´Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3e^x - \cos x}{e^x + 1} = \frac{3e^{+\infty} - \cos(+\infty)}{e^{+\infty} + 1} = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{Indeterminación(L´Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3e^x + senx}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3e^x}{e^x} + \frac{senx}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} 3 + \frac{senx}{e^x} = 3 + \frac{sen(+\infty)}{e^{+\infty}} = 3 + \frac{sen(+\infty)}{+\infty} = 3 + 0 = \boxed{3}$$

Hemos utilizado que la función seno es una función que toma valores entre –1 y 1, mientras que la función exponencial crece cuando $x \to +\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} -1 < senx < 1 \\ \lim_{x\to+\infty} e^x = e^{+\infty} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{senx}{e^x} = \frac{sen(+\infty)}{+\infty} = \frac{\text{acotado}}{+\infty} = 0$$

b)

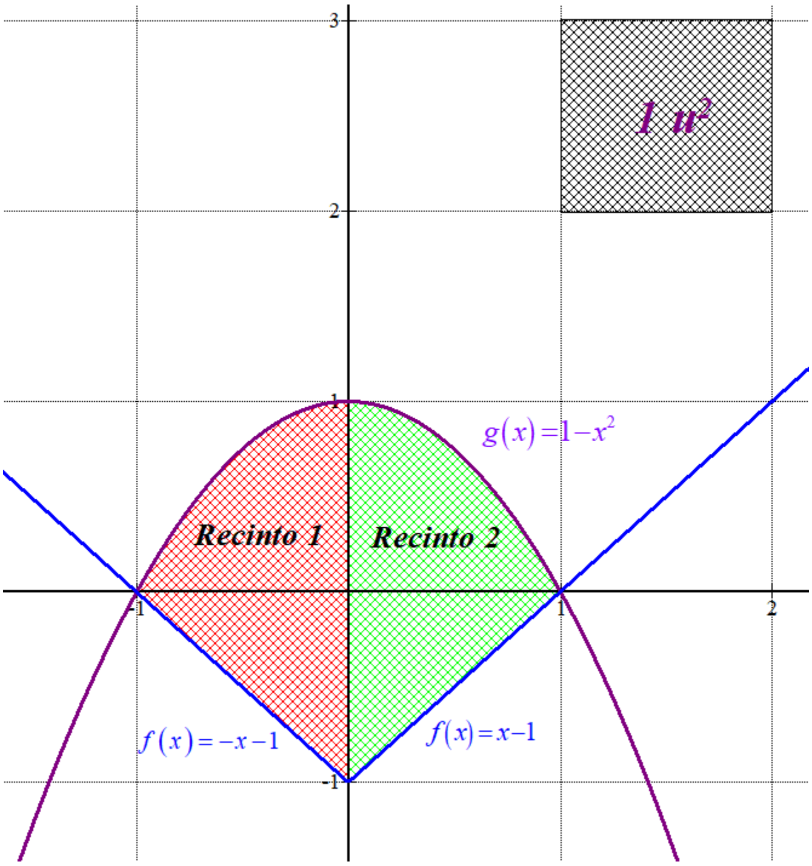
Redefinimos la función $f(x)$:

$$f(x) = |x| - 1 = \begin{cases} -x - 1 & si\ x < 0 \\ x - 1 & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

La gráfica de *f(x)* está formada por dos rectas: la primera, cuando x es negativa, que es decreciente; la segunda, cuando x es positiva, que es creciente. Ambas se cortan en el punto (0,−1).

Por su parte, la función $g(x)$ es una parábola, cuyo vértice es un máximo, en el punto (0,1), y que corta al eje de las x en los puntos (−1, 0) y (1, 0).

Con esta información podemos esbozar sus gráficas e identificar el recinto cuya área hay que calcular:



El área pedida es la suma de las áreas del recinto 1 y 2 de la figura. Como ambos recintos tienen el mismo valor de área calculamos la del recinto 1 y el área pedida es el doble de la obtenida.

$$\text{Área recinto } 1 = \int_{-1}^{0} \left(1-x^2\right)-\left(-x-1\right) dx = \int_{-1}^{0} 1-x^2+x+1 dx = \int_{-1}^{0} -x^2+x+2 dx =$$

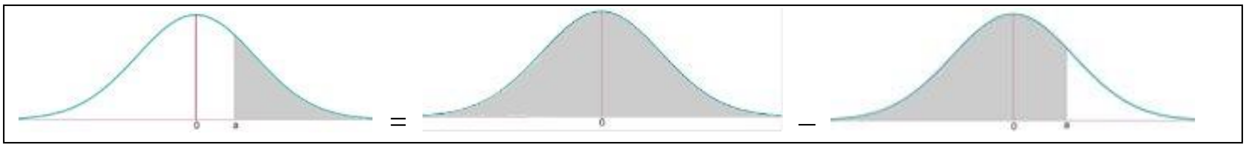
$$= \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{0} = \left[-\frac{0^3}{3}+\frac{0^2}{2}+0\right]-\left[-\frac{(-1)^3}{3}+\frac{(-1)^2}{2}+2(-1)\right] = -\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2 = \boxed{\frac{7}{6}u^2}$$

El área pedida es $\boxed{\acute{A}rea = 2\cdot\frac{7}{6} = \frac{7}{3} \approx 2.33\, u^2}$

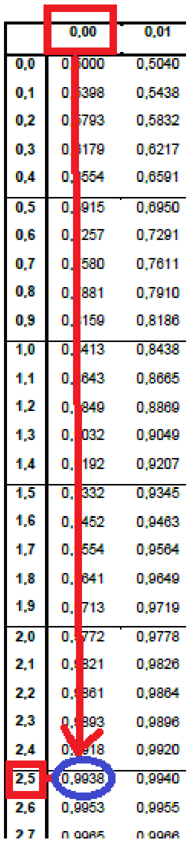
E5.- El diámetro interior de un anillo se distribuye normalmente con una media de 10 cm y una desviación típica de 0,03.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que un anillo tenga un diámetro mayor de 10,075? **(1 punto)**
b) ¿Cuál es la probabilidad de que un anillo tenga un diámetro entre 9,97 y 10,03? **(1 punto)**

a) El diámetro interior de un anillo es una variable aleatoria X que sigue una distribución normal de media $\mu = 10$ cm y desviación típica $\sigma = 0.03$ cm: $X \sim N(10;\, 0.03)$
Se nos pide la probabilidad $P(X > 10.075)$.

$$P\left(X > 10.075\right) = \left\{Tipificamos\right\} = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{10.075-10}{0.03}\right) = P\left(Z > 2.5\right) = \ldots$$



$$\ldots = 1 - P\left(Z < 2.5\right) = 1 - 0.9938 = \boxed{0.0062}$$



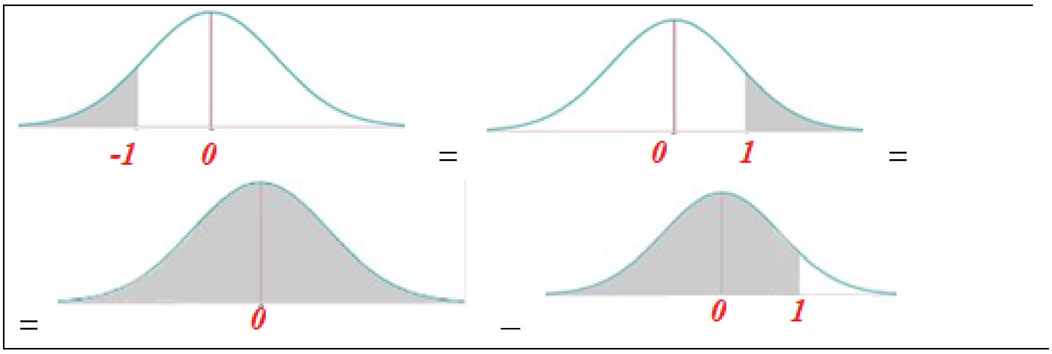
	0,00	0,01
0,0	0,[illegible]000	0,5040
0,1	0,[illegible]398	0,5438
0,2	0,[illegible]793	0,5832
0,3	0,[illegible]179	0,6217
0,4	0,[illegible]554	0,6591
0,5	0,[illegible]915	0,6950
0,6	0,[illegible]257	0,7291
0,7	0,[illegible]580	0,7611
0,8	0,[illegible]881	0,7910
0,9	0,[illegible]159	0,8186
1,0	0,[illegible]413	0,8438
1,1	0,[illegible]643	0,8665
1,2	0,[illegible]849	0,8869
1,3	0,[illegible]032	0,9049
1,4	0,[illegible]192	0,9207
1,5	0,[illegible]332	0,9345
1,6	0,[illegible]452	0,9463
1,7	0,[illegible]554	0,9564
1,8	0,[illegible]641	0,9649
1,9	0,[illegible]713	0,9719
2,0	0,[illegible]772	0,9778
2,1	0,[illegible]821	0,9826
2,2	0,[illegible]861	0,9864
2,3	0,[illegible]893	0,9896
2,4	0,[illegible]918	0,9920
2,5	0,9938	0,9940
2,6	0,9953	0,9955
2,7	[illegible]	[illegible]

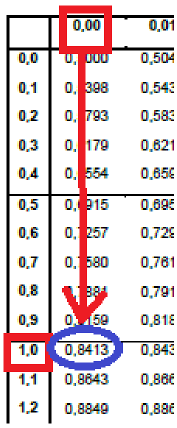
b) En este caso, se nos pide la probabilidad $P(9{,}97 < X < 10{,}03)$. Tipificando de nuevo la variable:

$$P\left(9.97 < X < 10.03\right) = \left\{Tipificamos\right\} = P\left(\frac{9.97-10}{0.03} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{10.03-10}{0.03}\right) =$$

$$= P\left(-1 < Z < 1\right) = P\left(Z < 1\right) - P\left(Z < -1\right) = P\left(Z < 1\right) - P\left(Z > 1\right) =$$

$$= P\left(Z < 1\right) - \left(1 - P\left(Z < 1\right)\right) = 0.8413 - \left(1 - 0.8413\right) = \boxed{0.6826}$$





	0,00	0,01
0,0	0,[illegible]000	0,504
0,1	0,[illegible]398	0,543
0,2	0,[illegible]793	0,583
0,3	0,[illegible]179	0,621
0,4	0,[illegible]554	0,659
0,5	0,[illegible]915	0,695
0,6	0,[illegible]257	0,729
0,7	0,[illegible]580	0,761
0,8	0,[illegible]881	0,791
0,9	0,[illegible]159	0,818
1,0	0,8413	0,843
1,1	0,8643	0,866
1,2	0,8849	0,886