	Evaluación de Bachillerato para acceder a estudios universitarios **Castilla y León**	MATEMÁTICAS II	EJERCICIO Nº Páginas: 2

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger una de las dos opciones, pudiendo desarrollar los cinco ejercicios de la misma en el orden que desee.
2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).
CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 4 primeros ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2,25 puntos, y el quinto ejercicio sobre un máximo de 1 punto. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

OPCIÓN A

E1.- a) Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro λ:

$$\begin{cases} \lambda x + z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$ **(1,2 puntos)**

b) Resolverlo para $\lambda = 1$. **(0,8 puntos)**

E2.- Determinar la recta s que es simétrica de $r \equiv x+2 = y = z-2$, respecto del plano $\pi \equiv x - z + 2 = 0$. **(2 puntos)**

E3. Dada la función $f(x) = 3x^4 + x^3 - 1$, determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos y el número total de puntos en los que *f(x)* se anula. **(2 puntos)**

E4. Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = x\cos x$ y el eje de las x, cuando x pertenece al intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

E5.- a) Se tira una moneda tres veces. Calcular la probabilidad de que, sin tener en cuenta el orden, salgan una cara y dos cruces. **(1 punto)**
b) Una persona elige al azar, sin verlas, dos cartas de una baraja española (de 40 cartas, de las cuales 10 son de cada uno de los 4 palos: oros, copas, espadas y bastos). Calcular la probabilidad de que ninguna de las dos cartas elegidas sea de copas. **(1 punto)**

OPCIÓN B

E1.- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ $y\ M=\begin{pmatrix}1 & 1\\ a & b\end{pmatrix}$, calcúlense a y b para que se verifiquen $|M\mathrm{A}|=2$ y $|M+B|=3$, donde se está usando la notación habitual (con barras verticales) para denotar al determinante de una matriz. **(2 puntos)**

E2.- Dada la recta $r \equiv x-1=\frac{y+1}{2}=z-1$ y el plano $\pi \equiv x-y+z=0$, se pide:

a) Determinar la posición relativa de r y π. **(0,8 puntos)**

b) Hallar el plano paralelo a π situado a la misma distancia de r que π. **(1,2 puntos)**

E3. Dada la función $f(x)=x\cdot e^{-x}$, determínese su dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión. Esbócese también su gráfica. **(2 puntos)**

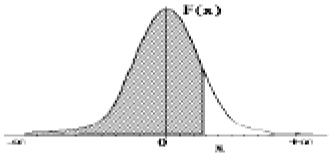
E4. a) Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{\ln(1+x)}$. **(1 punto)**

b) Calcular $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$ **(1 punto)**

E5.- La variable aleatoria IMC (índice de masa corporal, de modo abreviado) de las personas adultas de un determinado país sigue una distribución normal de media 26 y desviación típica de 6. Si tener un IMC superior a 35 significa ser obeso, encontrar la proporción de personas adultas obesas de ese país. **(2 puntos)**

Distribución Normal

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9014
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9318
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

SOLUCIONES

OPCIÓN A

E1.- a) Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro λ:

$$\begin{cases} \lambda x + z = 1 \\ x + y + \lambda z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$ **(1,2 puntos)**

b) Resolverlo para $\lambda = 1$. **(0,8 puntos)**

a) Recurriremos al teorema de Rouché–Frobenius para discutir el número de soluciones de este sistema. Así que comenzaremos por definir la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada con los términos independientes:

Matriz de los coeficientes → $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Matriz ampliada → $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

A continuación, evaluamos el rango de A, en función de los valores de λ para los que |A| = 0:

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda - 1 - 1 + \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - 2$$

$$Si\ |A| = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 8}}{2} = \begin{cases} = \dfrac{-1+3}{2} = 1 = \lambda \\ = \dfrac{-1-3}{2} = -2 = \lambda \end{cases}$$

<u>Caso 1.</u> Si $\lambda \neq 1\ y\ \lambda \neq -2$ el determinante de A es distinto de cero y su rango es 3, por lo que el rango de la matriz ampliada A/B también es 3, al igual que el número de incógnitas. El sistema tiene una única solución (**Sistema Compatible Determinado**).

<u>Caso 2.</u> Si $\lambda = 1$ el determinante de A es cero por lo que su rango no es 3. Averiguamos el rango de A y de A/B en este valor concreto del parámetro. Utilizamos el método de Gauss para obtener una matriz triangular equivalente.

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left\{\begin{array}{ccc|l} \multicolumn{4}{c}{\text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a} \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{ccc|l} \multicolumn{4}{c}{\text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \to \text{Nueva Fila } 2^a \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\rightarrow\left\{\begin{array}{c} \text{Fila 3ª + Fila 2ª} \\ \begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \rightarrow \text{Nueva Fila 3ª} \end{array}\end{array}\right\}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases}\text{Rango de A/B es 2} \\ \\ \text{Rango de A es 2}\end{cases}$$

En este caso el rango de A = Rango de A/B = 2 < 3 = Número de incógnitas, por lo que el sistema tiene infinitas soluciones (**Sistema Compatible Indeterminado**)

Caso 3. Si $\lambda = -2$ el determinante de A es cero por lo que su rango no es 3. Averiguamos el rango de A y de A/B en este valor concreto del parámetro. Utilizamos el método de Gauss para obtener una matriz triangular equivalente.

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)\rightarrow\left\{\begin{array}{c} 2\cdot\text{Fila 2ª + Fila 1ª} \\ \begin{array}{ccc|cc} 2 & 2 & -4 & 2 & \\ -2 & 0 & 1 & 1 & \\ \hline 0 & 2 & -3 & 3 & \rightarrow \text{Nueva Fila 2ª} \end{array}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{c} 2\cdot\text{Fila 3ª + Fila 1ª} \\ \begin{array}{ccc|cc} 2 & -2 & 2 & 2 & \\ -2 & 0 & 1 & 1 & \\ \hline 0 & -2 & 3 & 3 & \rightarrow \text{Nueva Fila 3ª} \end{array}\end{array}\right\}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \end{array}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow\left\{\begin{array}{c} \text{Fila 3ª + Fila 2ª} \\ \begin{array}{ccc|cc} 0 & 2 & -3 & 3 & \\ 0 & -2 & 3 & 3 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 6 & \rightarrow \text{Nueva Fila 3ª} \end{array}\end{array}\right\}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases}\text{Rango de A es 2} \\ \\ \text{Rango de A/B es 3}\end{cases}$$

En este caso el rango de A = 2 ≠ 3 = Rango de A/B, por lo que el sistema no tiene solución (**Sistema Incompatible**).

b) Para $\lambda = 1$ el sistema es compatible indeterminado, por lo que debemos hallar la expresión de sus infinitas soluciones.
Como hemos visto en el caso 2 estudiado en el apartado anterior tenemos que la matriz ampliada del sistema $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ es equivalente a $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Resolvemos el sistema a partir de esta matriz.

$$\left.\begin{array}{l} x + z = 1 \\ y = 0 \end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} x = 1 - z \\ y = 0 \end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{\left.\begin{array}{l} x = 1 - t \\ y = 0 \\ z = t \end{array}\right\}, siendo\ t \in \mathbb{R}}$$

E2.- Determinar la recta s que es simétrica de $r \equiv x+2 = y = z-2$, respecto del plano $\pi \equiv x - z + 2 = 0$. **(2 puntos)**

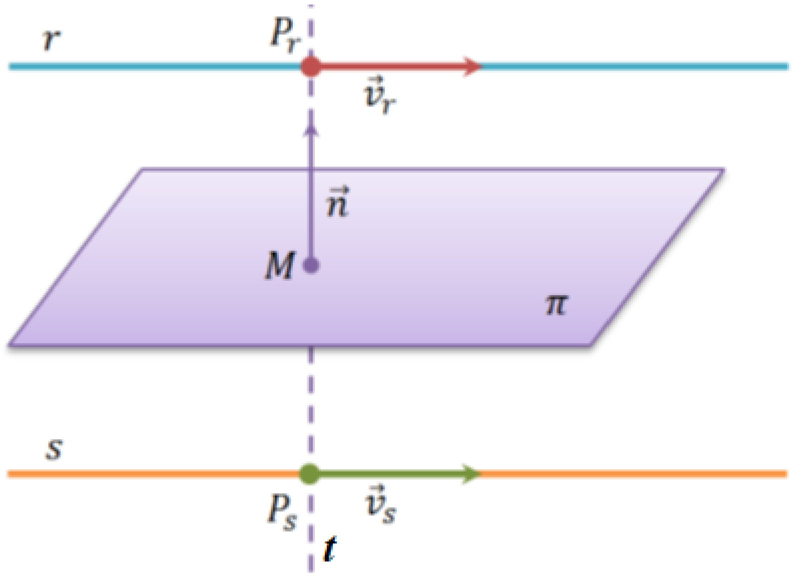
Estudiamos la posición relativa de la recta r y el plano π.

De la ecuación de $r \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-2}{1}$ deducimos que pasa por el punto $P_r = (-2,0,2)$ y su vector director es $\overrightarrow{v_r} = (1,1,1)$.

De la ecuación de $\pi \equiv x - z + 2 = 0$ obtenemos su vector normal $\vec{n} = (1,0,-1)$. Es fácil comprobar que el vector director de la recta y el normal del plano son perpendiculares:

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n} = (1,1,1)(1,0,-1) = 1+0-1 = 0$$

Por lo que recta y plano son paralelos y la recta s buscada es la del dibujo.



La recta s buscada es paralela a la recta r y por tanto debe tener el mismo vector director.

$$\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{v_r} = (1,1,1)$$

Solo nos falta conocer el punto P_s por el que debe pasar la recta s buscada.

Para ello hallamos la recta t perpendicular al plano π que pasa por el punto $P_r = (-2,0,2)$, luego hallamos el punto M de corte de recta t y plano π. Y por último el punto P_s es el punto simétrico de P_r respecto del punto M (el punto M es el punto medio del segmento que une los puntos P_r y P_s).

Ecuación de la recta t:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_t} = \vec{n} = (1,0,-1) \\ P_r = (-2,0,2) \in t \end{array}\right\} \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = -2+\lambda \\ y = 0 \\ z = 2-\lambda \end{cases}$$

Punto de corte de recta t y plano π:

$$\left.\begin{array}{l}\pi \equiv x-z+2=0 \\ t \equiv \begin{cases} x=-2+\lambda \\ y=0 \\ z=2-\lambda \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow -2+\lambda-(2-\lambda)+2=0 \Rightarrow -2+2\lambda=0 \Rightarrow \lambda=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-2+1=-1 \\ y=0 \\ z=2-1=1 \end{cases} \Rightarrow M(-1,0,1)$$

Hallo P_s como el punto simétrico de P_r respecto de M:

$$\overrightarrow{P_rM}=(-1,0,1)-(-2,0,2)=(1,0,-1)$$

$$P_s=M+\overrightarrow{P_rM}=(-1,0,1)+(1,0,-1)=(0,0,0)$$

La ecuación de la recta s es:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v_s}=\vec{v_r}=(1,1,1) \\ P_s=(0,0,0)\in s\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{s \equiv \begin{cases} x=\alpha \\ y=\alpha \text{, siendo } \alpha\in\mathbb{R} \\ z=\alpha \end{cases}}$$

E3. Dada la función $f(x) = 3x^4 + x^3 - 1$, determínense sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus extremos relativos y el número total de puntos en los que *f(x)* se anula. **(2 puntos)**

Comenzamos calculando la derivada de la función $f(x)$:

$$f'(x) = 12x^3 + 3x^2$$

Obtenemos los valores de x para los cuales $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x^2(4x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ o \\ 4x+1 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Determinamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento evaluando el signo de $f'(x)$ antes, entre y después de estos valores de x:

- En $\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

  $f'(-1) = 12(-1)^3 + 3(-1)^2 = -12 + 3 = -9 < 0$. La función decrece en $\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right)$

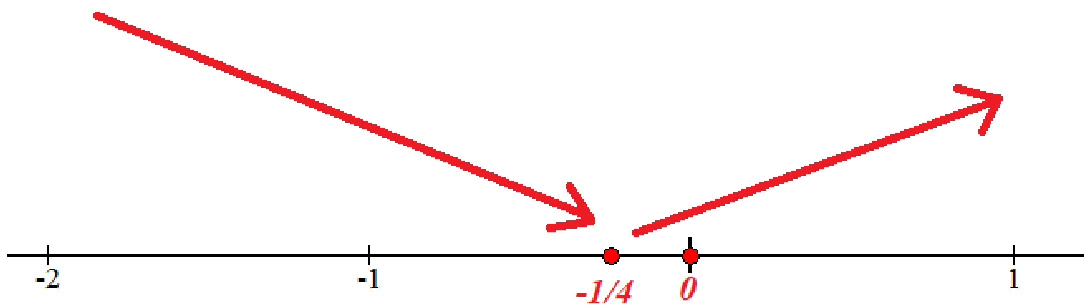
- En $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ tomamos $x = -\frac{1}{8}$ y la derivada vale $f'\left(-\frac{1}{8}\right) = 12\left(-\frac{1}{8}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{8}\right)^2 > 0$.

  La función crece en $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$

- En $(0, +\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 12 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 = 15 > 0$. La función crece en $(0, +\infty)$

Resumiendo: La función decrece en $\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right)$ y crece en $\left(-\frac{1}{4}, +\infty\right)$.

La función se comporta como indica el gráfico:



Por la evolución del crecimiento y decrecimiento de la función se deduce que presenta un mínimo en $x = -\frac{1}{4}$. En $x = 0$ presentará un punto de inflexión.

Para determinar el número de puntos en los que $f(x)$ se anula recurriremos al teorema de Bolzano.

En primer lugar, tendremos en cuenta que la función decrece hasta alcanzar el mínimo cuando $x=-\frac{1}{4}$, y que $f\left(-\frac{1}{4}\right)=3\left(-\frac{1}{4}\right)^4+\left(-\frac{1}{4}\right)^3-1=-1.003<0$ (negativo).

Además, comprobamos que: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 3x^4+x^3-1=\lim_{x\to-\infty} 3x^4=+\infty$ (positivo)

Como $f(x)$ es siempre continua y cambia de signo entre $-\infty$ y $-1/4$, entonces podemos asegurar que existe un valor $x=a$ para el cual $f(a)=0$.

Además, sabemos que en el intervalo $\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right)$ la función es siempre decreciente, lo cual nos permite garantizar que a es el único valor de x, perteneciente a dicho intervalo, en el cual la función se anula.

De la misma manera, razonaremos lo que ocurre cuando $x>-1/4$. Se comprueba que:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 3x^4+x^3-1=\lim_{x\to+\infty} 3x^4=+\infty \text{ (positivo)}$$

Así que $f(x)$ cambia de signo entre $-1/4$ y $+\infty$, por lo que existe un valor $x=b$ para el cual $f(b)=0$. Como en el intervalo $(-1/4,+\infty)$ la función es siempre creciente, no existe otro valor de x en dicho intervalo, en el cual la función sea nula.

Resumiendo: La función se anula únicamente para dos valores de x: un valor $a\in\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right)$ y otro valor $b\in\left(-\frac{1}{4},+\infty\right)$

E4. Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = x\cos x$ y el eje de las x, cuando x pertenece al intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Encontremos los puntos donde la gráfica de la función corta el eje de las x.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x\cos x \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x\cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}.\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

La gráfica solo corta el eje de las x en los extremos del intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, por lo que el área del recinto pedido se calcula con la integral definida:

$$Área = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \right| = \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx \right|$$

Resolvemos primero la integral indefinida.

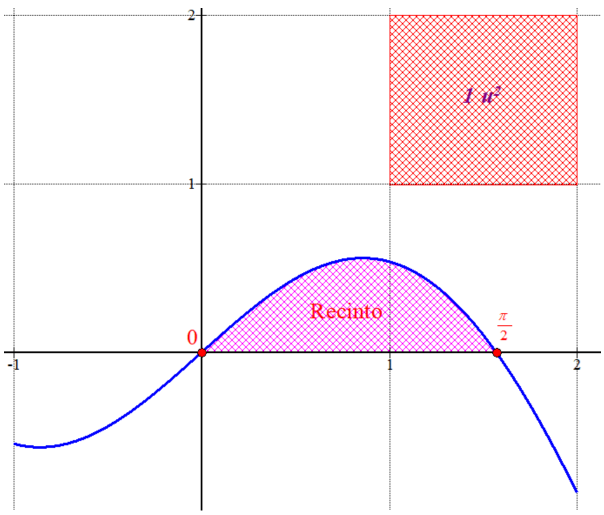
$$\int x\cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \cos x dx \rightarrow v = \int \cos x dx = senx \end{array} \right\} = xsenx - \int senx dx = xsenx - (-\cos x)$$

$$\boxed{\int x\cos x dx = xsenx + \cos x + K}$$

Aplicándolo al cálculo del área:

$$Área = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = \left[xsenx + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{\pi}{2} sen\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\right] - \left[0 \cdot sen 0 + \cos 0\right] = \boxed{\frac{\pi}{2} - 1 \approx 0.57\ u^2}$$

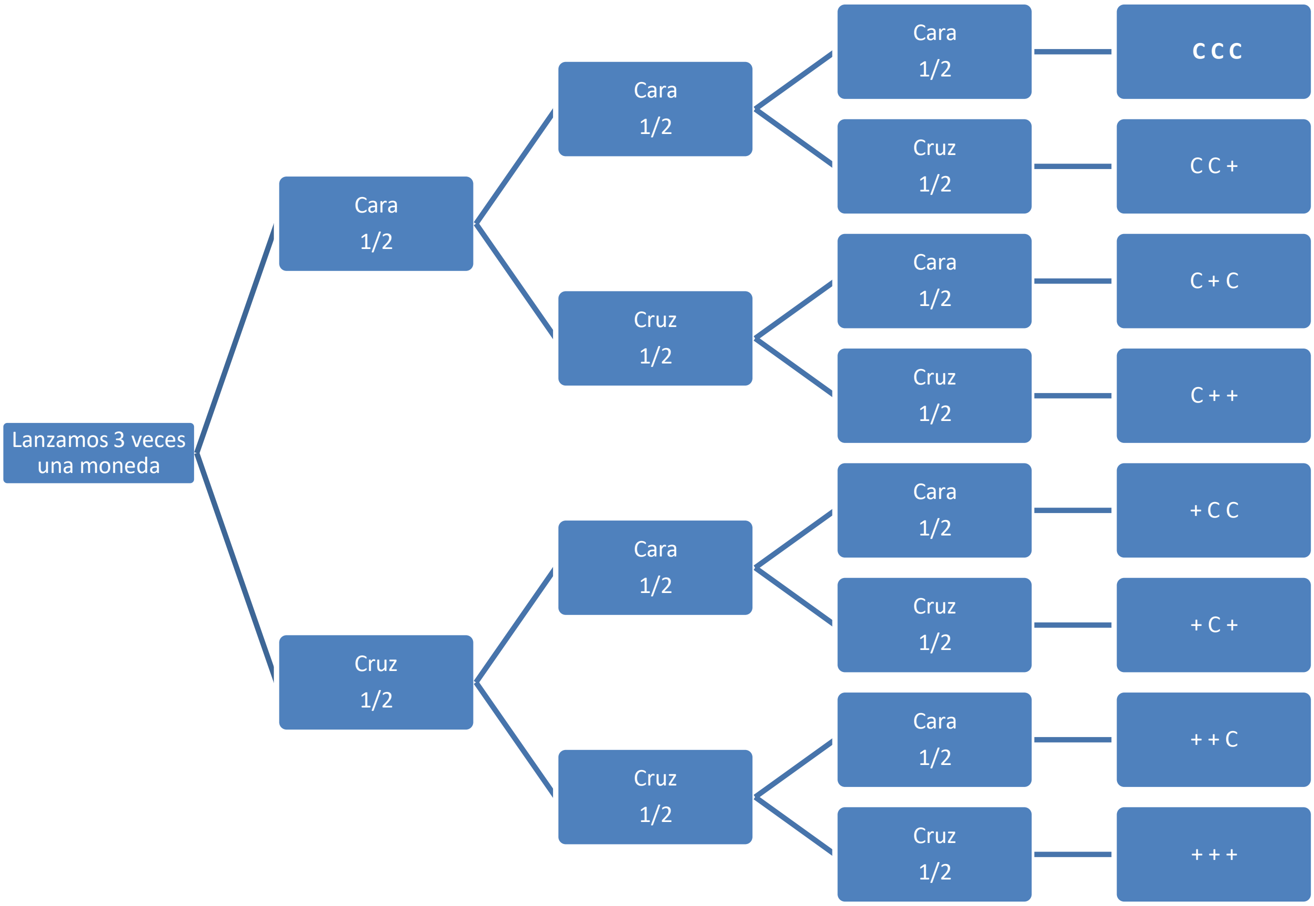
No es necesario dibujar la gráfica de la función y la región, pero lo hacemos para comprobar el resultado obtenido.



E5.- a) Se tira una moneda tres veces. Calcular la probabilidad de que, sin tener en cuenta el orden, salgan una cara y dos cruces. **(1 punto)**

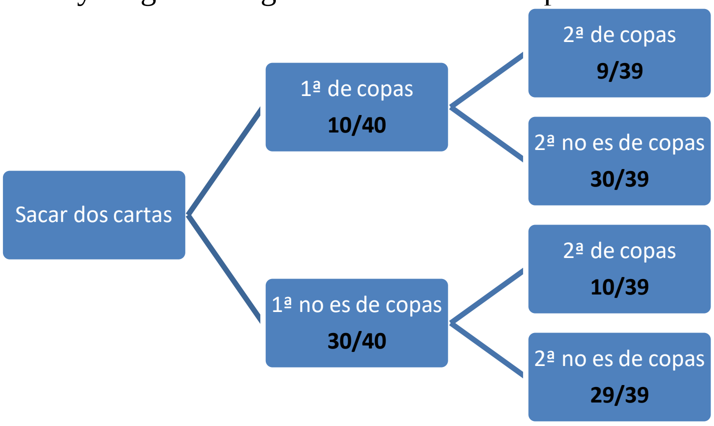
b) Una persona elige al azar, sin verlas, dos cartas de una baraja española (de 40 cartas, de las cuales 10 son de cada uno de los 4 palos: oros, copas, espadas y bastos). Calcular la probabilidad de que ninguna de las dos cartas elegidas sea de copas. **(1 punto)**

a) Hacemos un diagrama de árbol.



Una cara y dos cruces se obtiene con los resultados C++, +C+ y ++C, por lo que la probabilidad pedida es $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\boxed{\frac{3}{8}}$

b) Realizamos un diagrama de árbol, teniendo en cuenta que elegir las dos cartas es como elegir una primera carta y luego una segunda sin devolver la primera al mazo de cartas.



$$P(\text{Ninguna de las dos cartas de copas}) = P(1^a\ no\ copas\ y\ 2^a\ no\ copas) = \frac{30}{40}\cdot\frac{29}{39} = \boxed{\frac{29}{52}}$$

OPCIÓN B

E1.- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ y $M=\begin{pmatrix}1 & 1\\ a & b\end{pmatrix}$, calcúlense a y b para que se verifiquen $|MA|=2$ y $|M+B|=3$, donde se está usando la notación habitual (con barras verticales) para denotar al determinante de una matriz. **(2 puntos)**

En primer lugar, calculamos las matrices $M\cdot A$ y $M+B$:

$$MA=\begin{pmatrix}1 & 1\\ a & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2 & 2+5\\ a+2b & 2a+5b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 7\\ a+2b & 2a+5b\end{pmatrix}$$

$$M+B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ a & b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1+a & 1+b\end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que $|MA| = 2$ y $|M+B| = 3$:

$$\left.\begin{array}{r}|MA|=\begin{vmatrix}3 & 7\\ a+2b & 2a+5b\end{vmatrix}=6a+15b-7a-14b=-a+b\\ |MA|=2\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{-a+b=2}$$

$$\left.\begin{array}{r}|M+B|=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1+a & 1+b\end{vmatrix}=2+2b-1-a=1+2b-a\\ |M+B|=3\end{array}\right\}\Rightarrow 1+2b-a=3\Rightarrow \boxed{2b-a=2}$$

Resolvemos el sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas que se ha obtenido:

$$\left.\begin{array}{l}-a+b=2\\ 2b-a=2\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}b=2+a\\ 2b-a=2\end{array}\right\}\Rightarrow 2(2+a)-a=2\Rightarrow 4+2a-a=2\Rightarrow \boxed{a=-2}\Rightarrow \boxed{b=2-2=0}$$

Los valores buscados son $a = -2$ y $b = 0$.

E2.- Dada la recta $r \equiv x-1=\dfrac{y+1}{2}=z-1$ y el plano $\pi \equiv x-y+z=0$, se pide:

a) Determinar la posición relativa de r y π. **(0,8 puntos)**

b) Hallar el plano paralelo a π situado a la misma distancia de r que π. **(1,2 puntos)**

a) La recta $r \equiv x-1=\dfrac{y+1}{2}=z-1$ pasa por el punto $P\,(1,-1,1)$ y su vector director es $\overrightarrow{v_r}=(1,2,1)$.

El plano $\pi \equiv x-y+z=0$ tiene como vector normal $\vec{n}=(1,-1,1)$.

Para determinar la posición relativa de r y π, calculamos el producto escalar de $\overrightarrow{v_r}$ y $\vec{n}$:

$$\overrightarrow{v_r}\cdot\vec{n}=(1,2,1)(1,-1,1)=1-2+1=0$$

Como el producto escalar es cero, necesariamente debe cumplirse que estos vectores son perpendiculares, lo que significa que r y π pueden ser paralelos o coincidentes.

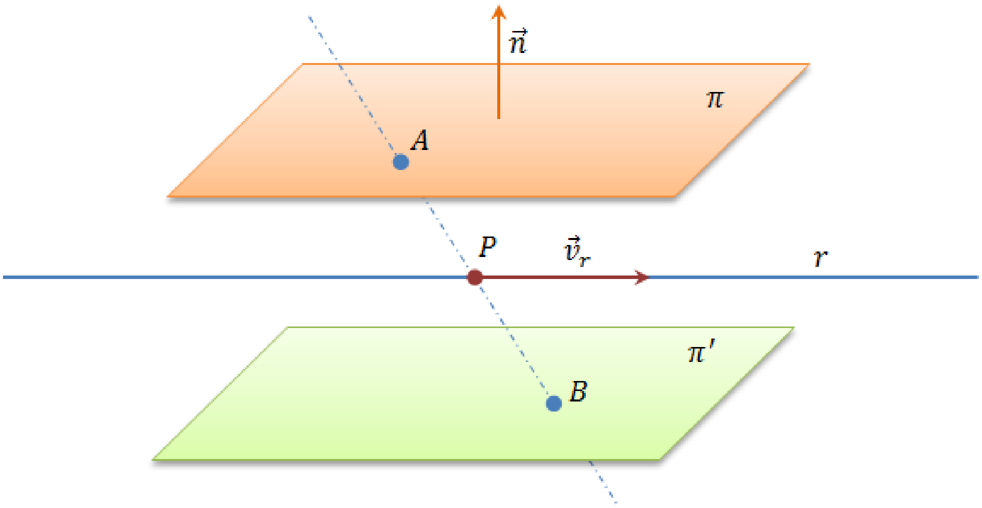
Comprobamos si el punto $P\,(1,-1,1)$ de la recta pertenece al plano:

$$\left.\begin{array}{l}\pi \equiv x-y+z=0\\ ¿P(1,-1,1)\in\pi?\end{array}\right\}\Rightarrow ¿1-(-1)+1=0?\Rightarrow ¿1+1+1=0?\Rightarrow \text{¡No es cierto!}$$

Por lo tanto, $P \notin \pi$ y podemos asegurar que r y π son paralelos.

b) Un plano paralelo a π, que llamaremos π', debe tener el mismo vector normal que π, por lo que su ecuación general será de la forma $\pi'=x-y+z+D=0$.

Para determinar el término D desconocido, debemos conocer un punto del plano π'. Este punto puede ser el punto simétrico de cualquier punto del plano π respecto del punto P, que pertenece a r:



Obtenemos un punto $A \in \pi \equiv x-y+z=0$, por ejemplo ($x=0$ e $y=0$, entonces $z=0$): $A(0,0,0)$

Hallamos el punto $B \in \pi'$, teniendo en cuenta que $P\,(1,-1,1)$ es el punto medio entre $A(0,0,0)$ y $B(x,y,z)$:

$$(1,-1,1)=\frac{(x,y,z)+(0,0,0)}{2}\Rightarrow(1,-1,1)=\left(\frac{x}{2},\frac{y}{2},\frac{z}{2}\right)\Rightarrow\begin{cases}\frac{x}{2}=1\Rightarrow x=2\\ \frac{y}{2}=-1\Rightarrow y=-2\Rightarrow \boxed{B(2,-2,2)}\\ \frac{z}{2}=1\Rightarrow z=2\end{cases}$$

Por lo que el punto B tiene coordenadas $B(2,-2,2)$

El punto B debe pertenecer al plano π´, por lo que sustituimos sus coordenadas en la ecuación del plano π':

$$\left.\begin{array}{l}\pi'=x-y+z+D=0\\ B(2,-2,2)\in\pi'\end{array}\right\}\Rightarrow 2-(-2)+2+D=0\Rightarrow 2+2+2+D=0\Rightarrow\boxed{D=-6}$$

Por tanto, la ecuación del plano π' buscado es $\pi'=x-y+z-6=0$.

E3. Dada la función $f(x) = x \cdot e^{-x}$, determínese su dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión. Esbócese también su gráfica. **(2 puntos)**

Tenemos que nuestra función se puede expresar como $f(x) = x \cdot e^{-x} = \dfrac{x}{e^x}$

Dominio.

Como $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ el dominio es $Dom\ f = \mathbb{R}$

Asíntotas.

Asíntotas verticales. Como el dominio de la función es $\mathbb{R}$: No posee asíntotas verticales

Asíntotas horizontales. Comprobamos si tiene asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x \cdot e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{\infty}{e^{+\infty}} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L´Hôpital)}=$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Asíntota horizontal $y = 0$ cuando $x \longrightarrow +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x \cdot e^{-x} = (-\infty) \cdot e^{-(-\infty)} = -\infty \cdot e^{+\infty} = -\infty \cdot (+\infty) = -\infty$$

No hay asíntota horizontal cuando $x \longrightarrow -\infty$

Consideramos la posibilidad de que exista una asíntota oblicua $y = mx + n$ cuando $x \longrightarrow -\infty$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x} \cdot e^{-x}}{\cancel{x}} = \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = e^{-(-\infty)} = e^{+\infty} = +\infty$$

No hay asíntota oblicua

Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Para determinarlos, evaluamos el signo de la primera derivada de la función a lo largo de su dominio. Averiguamos donde se anula la derivada:

$$f(x) = x \cdot e^{-x} \Rightarrow f'(x) = e^{-x} + x \cdot \left(-e^{-x}\right) = e^{-x} - x \cdot e^{-x} = e^{-x}(1-x)$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{-x}(1-x) = 0 \Rightarrow 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$$

Estudiemos el signo de la derivada antes y después de $x = 1$.

- En $(-\infty, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = e^{-0}(1-0) = 1 > 0$. La función crece en $(-\infty, 1)$.
- En $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = e^{-2}(1-2) = -e^{-2} < 0$. La función decrece en $(1, +\infty)$.

La función crece en $(-\infty, 1)$ y decrece en $(1, +\infty)$.

Extremos relativos.

El único candidato a extremo relativo es $x = 1$, ya que $f\,'(1) = 0$. Después de estudiar el crecimiento y el decrecimiento de la función, queda claro que para ese valor de x la función presenta un máximo.

Concavidad y convexidad.

Evaluamos el signo de la segunda derivada, para ello vemos donde se anula.

$$f(x) = x \cdot e^{-x} \Rightarrow f\,'(x) = e^{-x}(1-x) \Rightarrow f\,''(x) = -e^{-x}(1-x) + e^{-x}(-1) = e^{-x}(-1+x-1)$$

$$f\,''(x) = e^{-x}(x-2)$$

$$f\,''(x) = 0 \Rightarrow e^{-x}(x-2) = 0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

Estudiamos el signo de la derivada segunda antes y después de $x = 2$.

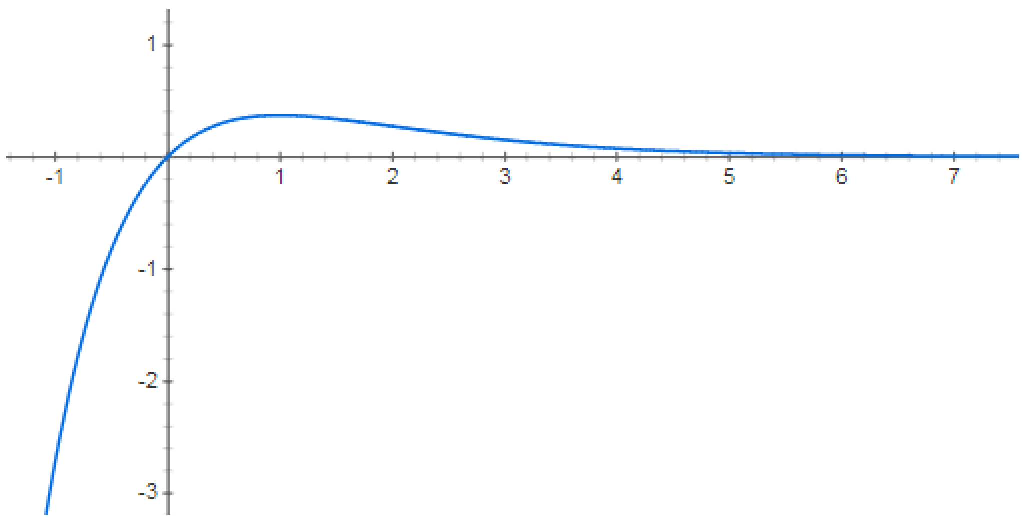
- En $(-\infty, 2)$ tomamos $x = 0$ y la derivada segunda vale $f\,''(0) = e^{-0}(0-2) = -2 < 0$. La función es cóncava (∩) en $(-\infty, 2)$.
- En $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada segunda vale $f\,''(3) = e^{-3}(3-2) = e^{-3} > 0$. La función es convexa (∪) en $(2, +\infty)$.

Por lo tanto: $f(x)$ es cóncava (∩) en $(-\infty, 2)$ y convexa (∪) en $(2, +\infty)$

Puntos de inflexión.

Hay un cambio de curvatura cuando $x = 2$, luego este es el punto de inflexión con coordenadas $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$

Gráfica. A partir del estudio de la función:



E4. a) Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{\ln(1+x)}$. **(1 punto)**

b) Calcular $\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx$ **(1 punto)**

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{\ln(1+x)}=\frac{e^0-\cos 0}{\ln(1+0)}=\frac{1-1}{\ln 1}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+senx}{\frac{1}{1+x}}=\frac{e^0+sen0}{\frac{1}{1+0}}=\boxed{1}$$

b)

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx=\left\{\begin{matrix}\text{Cambio de variable}\\ \ln x=t\to\frac{1}{x}dx=dt\\ dx=xdt\end{matrix}\right\}=\int\frac{(t)^2}{\cancel{x}}\cancel{x}dt=\int t^2dt=\frac{t^3}{3}=\boxed{\frac{(\ln x)^3}{3}+K}$$

E5.- La variable aleatoria IMC (índice de masa corporal, de modo abreviado) de las personas adultas de un determinado país sigue una distribución normal de media 26 y desviación típica de 6. Si tener un IMC superior a 35 significa ser obeso, encontrar la proporción de personas adultas obesas de ese país. **(2 puntos)**

La variable aleatoria IMC sigue una distribución normal de media $\mu = 26$ y desviación típica $\sigma = 6 \rightarrow$ IMC $\sim N(26, 6)$

Para calcular la probabilidad $P(\text{IMC} > 35)$, tipificamos la variable:

$$P(IMC > 35) = P\left(\frac{IMC-\mu}{\sigma} > \frac{35-26}{6}\right) = P\left(Z > 1.5\right) = 1 - P\left(Z < 1.5\right)$$

Consultando la tabla de la N(0, 1)

	$\boxed{0,00}$	0,01
0,0	0,[illegible]000	0,5040
0,1	0,[illegible]398	0,5438
0,2	0,[illegible]793	0,5832
0,3	0,[illegible]179	0,6217
0,4	0,[illegible]554	0,6591
0,5	0,[illegible]915	0,6950
0,6	0,[illegible]257	0,7291
0,7	0,[illegible]580	0,7611
0,8	0,[illegible]881	0,7910
0,9	0,[illegible]159	0,8186
1,0	0,[illegible]413	0,8438
1,1	0,[illegible]643	0,8665
1,2	0,[illegible]849	0,8869
1,3	0,[illegible]032	0,9049
1,4	[illegible]	0,9207
$\boxed{1,5}$	0,9332	0,9345
1,6	0,9452	0,9463
1,7	0,9554	0,9564

$$P(IMC > 35) = 1 - P\left(Z < 1.5\right) = 1 - 0.9332 = 0.0668$$

La proporción de obesos en la población es de 6.68 %.