Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

CURSO 2016/2017

Realiza una de las opciones propuestas (A o B)

OPCIÓN A

A1**)** Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} 2x+4y+z=1 \\ 2x+\left(a^2+2\right)y+3z=3 \\ -2x-\left(a^2+2\right)y+\left(a-3\right)z=\sqrt{2}-3 \end{cases}$$ (3 puntos)

A2) Comprueba que las rectas

$$r \equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-2} \quad y \quad s \equiv \frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{2}$$

se cortan perpendicularmente y halla el punto de corte, P. Encuentra un punto $R \in r$ y un punto $S \in s$ de forma que P, R, S sean vértices de un triángulo rectángulo cuyos catetos son de longitud 3. (2 puntos)

A3) Calcula las siguientes integrales indefinidas:

$$\int \frac{dx}{x^2-x-2}$$ (1 punto)

$$\int x^2 e^{2x} dx$$ (1 punto)

A4) Demuestra que existe $\alpha \in (0,2)$ tal que $f'(\alpha)=-\frac{1}{3}$, siendo

$$f(x)=(x+1)^{(x-1)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$$

Menciona el resultado teórico empleados y justifica su uso (3 puntos)

OPCIÓN B

B1) Encuentra la matriz X que verifica $7A - A^7 = BB^t X$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad y \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2 puntos)

B2) A, B y C son los puntos de corte de los ejes de coordenadas con el plano $\pi \equiv 4x + 2y + z - 4 = 0$

Encuentra un punto, D, de la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-3}{0} = \dfrac{z-3}{-1}$ tal que A, B, C y D son vértices de un paralelepípedo de volumen 6 u^3. (3 puntos)

B3) Demuestra que existe $\alpha \in (0,1)$ tal que $f\,'(\alpha) = 3$, siendo

$$f(x) = (x+1)^{(x+1)}$$

Menciona el resultado teórico empleados y justifica su uso. (2 puntos)

B4) Dadas las funciones $f(x) = sen\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$ y $g(x) = x^3 - 4x$, encuentra los tres puntos en que se cortan. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas curvas. (3 puntos)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

A1**)** Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real *a* y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} 2x+4y+z=1 \\ 2x+\left(a^2+2\right)y+3z=3 \\ -2x-\left(a^2+2\right)y+(a-3)z=\sqrt{2}-3 \end{cases}$$

(3 puntos)

Aplicamos el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & a^2+2 & 3 & 3 \\ -2 & -\left(a^2+2\right) & a-3 & \sqrt{2}-3 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 2 & a^2+2 & 3 & 3 \\ -2 & -4 & -1 & -1 \\ \hline 0 & a^2-2 & 2 & 2 \end{array} \to \text{Nueva fila } 2^a \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ \begin{array}{cccc} -2 & -\left(a^2+2\right) & a-3 & =\sqrt{2}-3 \\ 2 & a^2+2 & 3 & 3 \\ \hline 0 & 0 & a & \sqrt{2} \end{array} \to \text{Nueva fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & a^2-2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & a & \sqrt{2} \end{array}\right)$$

Nos planteamos cuando se anulan los elementos de la diagonal principal.

$$\begin{cases} a^2-2=0 \Rightarrow a^2=2 \Rightarrow a=\pm\sqrt{2} \\ o \\ a=0 \end{cases}$$

Se nos plantean cuatro situaciones diferentes que estudiamos por separado.

CASO 1. $a \neq 0 \ y \ a \neq \pm\sqrt{2}$

En este caso el sistema es compatible determinado, hallamos su solución.

$$\left.\begin{array}{r} 2x+4y+z=1 \\ \left(a^2-2\right)y+2z=2 \\ az=\sqrt{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \{a \neq 0\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+4y+z=1 \\ \left(a^2-2\right)y+2z=2 \\ \boxed{z=\frac{\sqrt{2}}{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+4y+\frac{\sqrt{2}}{a}=1 \\ \left(a^2-2\right)y+2\frac{\sqrt{2}}{a}=2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+4y=1-\frac{\sqrt{2}}{a}=\frac{a-\sqrt{2}}{a} \\ \left(a^2-2\right)y=2-\frac{2\sqrt{2}}{a}=\frac{2a-2\sqrt{2}}{a} \to y=\frac{2\left(a-\sqrt{2}\right)}{a\left(a^2-2\right)}=\frac{2\cancel{\left(a-\sqrt{2}\right)}}{a\cancel{\left(a-\sqrt{2}\right)}\left(a+\sqrt{2}\right)} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+4y=\dfrac{a-\sqrt{2}}{a} \\ \boxed{y=\dfrac{2}{a\left(a+\sqrt{2}\right)}} \end{array}\right\} \Rightarrow 2x+4\frac{2}{a\left(a+\sqrt{2}\right)}=\frac{a-\sqrt{2}}{a} \Rightarrow 2x=\frac{a-\sqrt{2}}{a}-\frac{8}{a\left(a+\sqrt{2}\right)} \Rightarrow$$

$$2x=\frac{\left(a-\sqrt{2}\right)\left(a+\sqrt{2}\right)}{a\left(a+\sqrt{2}\right)}-\frac{8}{a\left(a+\sqrt{2}\right)}=\frac{a^2-2-8}{a\left(a+\sqrt{2}\right)}=\frac{a^2-10}{a\left(a+\sqrt{2}\right)} \Rightarrow \boxed{x=\frac{a^2-10}{2a\left(a+\sqrt{2}\right)}}$$

CASO 2. $a=0$

En este caso la matriz queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{array}\right) \text{ El sistema es incompatible}$$

CASO 3. $a=\sqrt{2}$

En este caso la matriz queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \sqrt{2}\cdot \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad 2 \quad 2 \\ 0 \quad 0 \quad -2 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema es compatible indeterminado. Lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{r} 2x+4y+z=1 \\ 2z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+4y+z=1 \\ \boxed{z=1} \end{array}\right\} \Rightarrow 2x+4y+1=1 \Rightarrow 2x+4y=0 \Rightarrow \boxed{x=-2y}$$

Las soluciones son: $x=-2t; \quad y=t; \quad z=1$

CASO 4. $a=-\sqrt{2}$

En este caso la matriz queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \sqrt{2}\cdot \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad -2 \quad 2 \\ 0 \quad 0 \quad 2 \quad 2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

El sistema es incompatible

A2) Comprueba que las rectas

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-2} \quad y \quad s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{2}$$

se cortan perpendicularmente y halla el punto de corte, P. Encuentra un punto $R \in r$ y un punto $S \in s$ de forma que P, R, S sean vértices de un triángulo rectángulo cuyos catetos son de longitud 3.

(2 puntos)

Obtenemos un punto y un vector director de cada recta.

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = -1+2\alpha \\ z = 1-2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (1,2,-2) \\ P_r(1,-1,1) \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\beta \\ y = \beta \\ z = -3+2\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (2,1,2) \\ Q_s(0,0,-3) \end{cases}$$

Para que se corten deben tener vectores directores con coordenadas no proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r} = (1,2,-2) \\ \overrightarrow{u_s} = (2,1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{-2}{2}$$

También debe ser el producto mixto $\left[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right]$ nulo.

$$\left.\begin{array}{l} P_r(1,-1,1) \\ Q_s(0,0,-3) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_rQ_s} = (0,0,-3)-(1,-1,1) = (-1,1,-4)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r} = (1,2,-2) \\ \overrightarrow{u_s} = (2,1,2) \\ \overrightarrow{P_rQ_s} = (-1,1,-4) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -4-4-4-2+16-2 = 0$$

Hemos comprobado que las rectas se cortan.

Comprobamos que forman 90º viendo que el producto escalar de sus vectores directores es nulo.

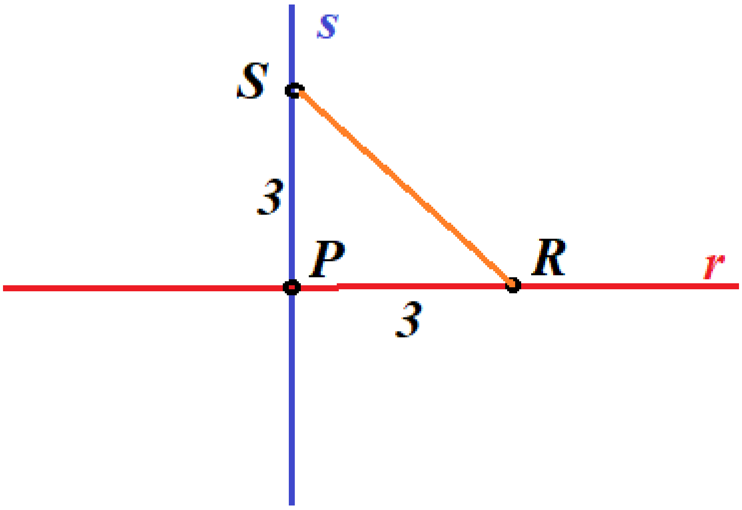
$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r} = (1,2,-2) \\ \overrightarrow{u_s} = (2,1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{u_s} = (1,2,-2)(2,1,2) = 2+2-4 = 0$$

Las rectas se cortan perpendicularmente.

Averiguamos su punto de corte resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones paramétricas.

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = -1+2\alpha \\ z = 1-2\alpha \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = 2\beta \\ y = \beta \\ z = -3+2\beta \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 2\beta = 1+\alpha \\ \beta = -1+2\alpha \\ -3+2\beta = 1-2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(-1+2\alpha) = 1+\alpha \\ -3+2(-1+2\alpha) = 1-2\alpha \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2+4\alpha = 1+\alpha \\ -3-2+4\alpha = 1-2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha = 3 \\ 6\alpha = 6 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1+1 = 2 \\ y = -1+2 = 1 \Rightarrow \boxed{P(2,1,-1)} \\ z = 1-2 = -1 \end{cases}$$



Tenemos que hallar los puntos S y R del dibujo. Aunque hay varias soluciones solo he dibujado una de ellas.

Determino el punto R ∈ *r*.

$$\left.\begin{array}{r} r \equiv \begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = -1+2\alpha \\ z = 1-2\alpha \end{cases} \\ R \in r \end{array}\right\} \Rightarrow R(1+\alpha, -1+2\alpha, 1-2\alpha)$$

$$\overrightarrow{RP} = (2,1,-1) - (1+\alpha, -1+2\alpha, 1-2\alpha) = (1-\alpha, 2-2\alpha, -2+2\alpha)$$

$$\left|\overrightarrow{RP}\right| = 3 \Rightarrow \sqrt{(1-\alpha)^2 + (2-2\alpha)^2 + (-2+2\alpha)^2} = 3 \Rightarrow (1-\alpha)^2 + (2-2\alpha)^2 + (-2+2\alpha)^2 = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+\alpha^2 - 2\alpha + 4 + 4\alpha^2 - 8\alpha + 4 + 4\alpha^2 - 8\alpha = 9 \Rightarrow 9\alpha^2 - 18\alpha + 9 = 9 \Rightarrow 9\alpha^2 - 18\alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9\alpha(\alpha-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \to R(1+0, -1+0, 1-0) = (1,-1,1) \\ o \\ \alpha - 2 = 0 \to \alpha = 2 \to R'(1+2, -1+4, 1-4) = (3,3,-3) \end{cases}$$

Hallamos las coordenadas del punto S ϵ ℝ.

$$s \equiv \left.\begin{cases} x = 2\beta \\ y = \beta \\ z = -3 + 2\beta \end{cases} \atop S \in s \right\} \Rightarrow S(2\beta, \beta, -3 + 2\beta)$$

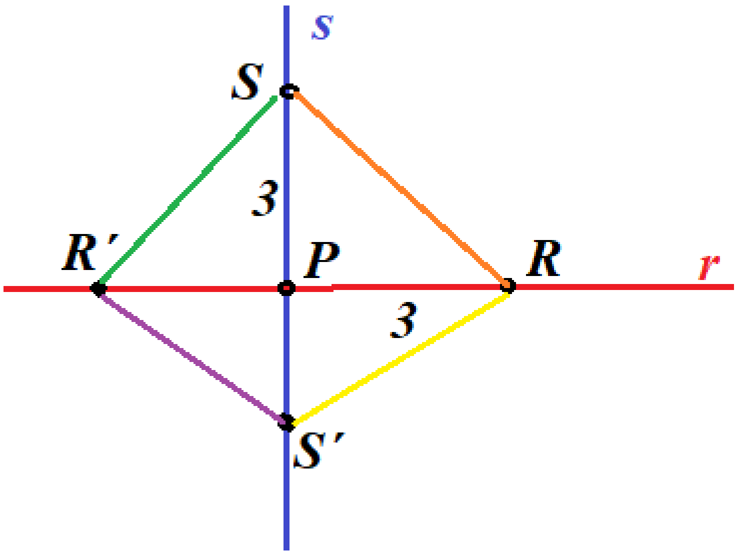
$$\overrightarrow{SP} = (2,1,-1) - (2\beta, \beta, -3 + 2\beta) = (2 - 2\beta, 1 - \beta, 2 - 2\beta)$$

$$\left|\overrightarrow{SP}\right| = 3 \Rightarrow \sqrt{(2-2\beta)^2 + (1-\beta)^2 + (2-2\beta)^2} = 3 \Rightarrow (2-2\beta)^2 + (1-\beta)^2 + (2-2\beta)^2 = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 + 4\beta^2 - 8\beta + 1 + \beta^2 - 2\beta + 4 + 4\beta^2 - 8\beta = 9 \Rightarrow 9\beta^2 - 18\beta + 9 = 9 \Rightarrow 9\beta^2 - 18\beta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9\beta(\beta - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \rightarrow S(0,0,-3) \\ o \\ \beta - 2 = 0 \rightarrow \beta = 2 \rightarrow S'(4,2,1) \end{cases}$$

Las soluciones obtenidas se reflejan, de forma aproximada en el siguiente dibujo.



A3) Calcula las siguientes integrales indefinidas:

$$\int \frac{dx}{x^2-x-2}$$ (1 punto)

$$\int x^2 e^{2x} dx$$ (1 punto)

Para el cálculo de la primera integral realizamos una descomposición en fracciones simples del integrando.

$$x^2-x-2=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(-2)}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases}\frac{1+3}{2}=2\\ \frac{1-3}{2}=-1\end{cases} \Rightarrow x^2+3x-4=(x+1)(x-2)$$

$$\frac{1}{x^2-x-2}=\frac{1}{(x+1)(x-2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}$$

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)}=\frac{A(x-2)+B(x+1)}{(x+1)(x-2)} \Rightarrow 1=A(x-2)+B(x+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-1 \to 1=A(-1-2)+B(-1+1) \to 1=-3A \to A=\frac{-1}{3} \\ x=2 \to 1=A(2-2)+B(2+1) \to 1=3B \to B=\frac{1}{3}\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2-x-2}=\frac{-1/3}{x+1}+\frac{1/3}{x-2}$$

Aplicamos lo obtenido al cálculo de la primera integral.

$$\int \frac{1}{x^2-x-2}dx=\int \frac{-1/3}{x+1}+\frac{1/3}{x-2}dx=\int \frac{-1/3}{x+1}dx+\int \frac{1/3}{x-2}dx=\frac{-1}{3}\int \frac{1}{x+1}dx+\frac{1}{3}\int \frac{1}{x-2}dx=$$

$$=\boxed{\frac{-1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{3}\ln|x-2|+K}$$

Calculamos la segunda integral.

$$\int x^2 e^{2x}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integral por partes}\\ x^2=u \to 2xdx=du\\ e^{2x}dx=dv \to v=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}\end{array}\right\}=x^2\frac{1}{2}e^{2x}-\int \frac{1}{2}e^{2x}2xdx=\frac{x^2e^{2x}}{2}-\int e^{2x}xdx=$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Integral por partes} \\ x = u \rightarrow dx = du \\ e^{2x}dx = dv \rightarrow v = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right\} = \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \left[x\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx \right] = \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \frac{xe^{2x}}{2} + \frac{1}{2}\int e^{2x}dx =$$

$$= \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \frac{xe^{2x}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}e^{2x} = \boxed{\frac{x^2 e^{2x}}{2} - \frac{xe^{2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{4} + K}$$

A4) Demuestra que existe $\alpha \in (0,2)$ tal que $f\,'(\alpha) = -\frac{1}{3}$, siendo

$$f(x) = (x+1)^{(x-1)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$$

Menciona el resultado teórico empleados y justifica su uso (3 puntos)

Derivamos la función:

$$f(x) = (x+1)^{(x-1)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \Rightarrow \ln f(x) = \ln (x+1)^{(x-1)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \Rightarrow \ln f(x) = (x-1)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\ln(x+1)$$

$$\Rightarrow \frac{f\,'(x)}{f(x)} = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\ln(x+1) - (x-1)\frac{\pi}{2} sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)\ln(x+1) + (x-1)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\frac{1}{x+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\,'(x) = f(x)\left[\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\ln(x+1) - (x-1)\frac{\pi}{2} sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)\ln(x+1) + (x-1)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\frac{1}{x+1}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\,'(x) = (x+1)^{(x-1)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\left[\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\ln(x+1) - (x-1)\frac{\pi}{2} sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)\ln(x+1) + (x-1)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\frac{1}{x+1}\right]$$

Comprobamos que la derivada existe en el intervalo [0, 2] y para ello debe existir el $\ln(x+1)$ y la expresión $x+1$ debe ser positiva. Tampoco se anula el denominador de $\frac{1}{x+1}$.

Por tanto, la función *f(x)* y *f ´(x)* existe en el intervalo [0, 2]

Comprobamos que se cumplen las exigencias del teorema de Lagrange:

1. *f* es continua en [0,2] pues es producto de funciones continuas.
2. *f* es derivable en (0,2). Lo hemos comprobado calculando su derivada.

Aplicamos el teorema de Lagrange en el intervalo cerrado [0,2] y existe α en el intervalo abierto (0,2) tal que $f\,'(\alpha) = \frac{f(2)-f(0)}{2-0}$.

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = (2+1)^{(2-1)\cos\left(\frac{2\pi}{2}\right)} = 3^{\cos\pi} = 3^{-1} = \frac{1}{3} \\ f(0) = (0+1)^{(0-1)\cos\left(\frac{0}{2}\right)} = 1^0 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f\,'(\alpha) = \frac{f(2)-f(0)}{2} = \frac{\frac{1}{3}-1}{2} = \frac{-\frac{2}{3}}{2} = -\frac{1}{3}$$

OPCIÓN B

B1) Encuentra la matriz X que verifica $7A-A^7=BB^tX$, siendo

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$ (2 puntos)

Despejamos X en la ecuación matricial.

$$7A-A^7=BB^tX \Rightarrow \left(BB^t\right)^{-1}\left(7A-A^7\right)=X$$

Comprobamos que existe $\left(BB^t\right)^{-1}$ y la calculamos.

$$B=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow B^t=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

$$BB^t=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+1 & 2\\ 2 & 1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$$

$$\left|BB^t\right|=\begin{vmatrix}5 & 2\\ 2 & 2\end{vmatrix}=10-4=6\neq 0 \to \text{Existe } \left(BB^t\right)^{-1}$$

$$\left(BB^t\right)^{-1}=\frac{Adj\left(\left(BB^t\right)^t\right)}{\left|BB^t\right|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}}{6}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 5\end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz correspondiente a $\left(7A-A^7\right)$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow A^2=AA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1-1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2-1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix}$$

...

$$A^7=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -7 & 1\end{pmatrix}$$

$$\left(7A-A^7\right)=7\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -7 & 7 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Lo aplicamos a la expresión de X.

$$X=\left(BB^t\right)^{-1}\left(7A-A^7\right)=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 30 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}}$$

B2) A, B y C son los puntos de corte de los ejes de coordenadas con el plano $\pi \equiv 4x+2y+z-4=0$ Encuentra un punto, D, de la recta $r \equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-3}{-1}$ tal que A, B, C y D son vértices de un paralelepípedo de volumen 6 u^3. (3 puntos)

Calculamos primero los puntos de corte de los ejes coordenados con el plano π:

$$\left.\begin{array}{r}\pi \equiv 4x+2y+z-4=0\\ x=0\\ y=0\end{array}\right\} \Rightarrow z-4=0 \Rightarrow z=4 \Rightarrow A(0,0,4)$$

$$\left.\begin{array}{r}\pi \equiv 4x+2y+z-4=0\\ x=0\\ z=0\end{array}\right\} \Rightarrow 2y-4=0 \Rightarrow y=2 \Rightarrow B(0,2,0)$$

$$\left.\begin{array}{r}\pi \equiv 4x+2y+z-4=0\\ y=0\\ z=0\end{array}\right\} \Rightarrow 4x-4=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow C(1,0,0)$$

Al pertenecer el punto D a la recta $r \equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-3}{-1}$ sus coordenadas son:

$$r \equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-3}{-1} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda\\ y=3\\ z=3-\lambda \end{cases} \Rightarrow D(1+\lambda,3,3-\lambda)$$

Aplicamos la fórmula del volumen del paralelepípedo haciendo que valga 6 u^3.

$$\overrightarrow{AB}=(0,2,0)-(0,0,4)=(0,2,-4)$$
$$\overrightarrow{AC}=(1,0,0)-(0,0,4)=(1,0,-4)$$
$$\overrightarrow{AD}=(1+\lambda,3,3-\lambda)-(0,0,4)=(1+\lambda,3,-1-\lambda)$$
$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]=\begin{vmatrix}0 & 2 & -4\\ 1 & 0 & -4\\ 1+\lambda & 3 & -1-\lambda\end{vmatrix}=-8-8\lambda-12+2+2\lambda=-18-6\lambda$$
$$Volumen=6 \Rightarrow |-18-6\lambda|=6 \Rightarrow \begin{cases}-18-6\lambda=-6 \Rightarrow -6\lambda=12 \Rightarrow \lambda=-2\\ -18-6\lambda=6 \Rightarrow -6\lambda=24 \Rightarrow \lambda=-4\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r}\lambda=-4\\ D(1+\lambda,3,3-\lambda)\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{D(-3,3,7)}$$

$$\left.\begin{array}{r}\lambda=-2\\ D(1+\lambda,3,3-\lambda)\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{D(-1,3,5)}$$

B3) Demuestra que existe $\alpha \in (0,1)$ tal que $f'(\alpha) = 3$, siendo

$$f(x) = (x+1)^{(x+1)}$$

Menciona el resultado teórico empleados y justifica su uso. (2 puntos)

Derivamos la función:

$$f(x) = (x+1)^{(x+1)} \Rightarrow \ln f(x) = \ln (x+1)^{(x+1)} = (x+1)\ln(x+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(x+1) + (x+1)\frac{1}{x+1} = 1 + \ln(x+1) \Rightarrow f'(x) = f(x)\left[1+\ln(x+1)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = (x+1)^{(x+1)}\left[1+\ln(x+1)\right]$$

Comprobamos que la derivada existe en el intervalo [0, 1] y para ello la expresión $x+1$ debe ser positiva y lo es en el intervalo [0, 1].

Por tanto, la función *f(x)* y *f ´(x)* existe en el intervalo [0, 1]

Comprobamos que se cumplen las exigencias del teorema de Lagrange:

1. *f* es continua en [0, 1] pues es producto de funciones continuas.
2. *f* es derivable en (0, 1). Lo hemos comprobado calculando su derivada.

Aplicamos el teorema de Lagrange en el intervalo cerrado [0, 1] y existe α en el intervalo abierto (0, 1) tal que $f'(\alpha) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0}$.

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = (1+1)^{(1+1)} = 2^2 = 4 \\ f(0) = (0+1)^{(0+1)} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(\alpha) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{4-1}{1} = 3$$

B4) Dadas las funciones $f(x) = sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ y $g(x) = x^3 - 4x$, encuentra los tres puntos en que se cortan. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas curvas. (3 puntos)

Averiguamos los puntos de corte de las gráficas de las dos funciones.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^3 - 4x = sen\left(\frac{\pi}{2}x\right) \Rightarrow x\left(x^2 - 4\right) = sen\left(\frac{\pi}{2}x\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0, \; pues \;\; 0 = sen\left(\frac{\pi}{2}0\right) = sen(0) \\ x = 2, \; pues \;\; 0 = sen\left(\frac{\pi}{2}2\right) = sen(\pi) \\ x = -2, \; pues \; 0 = sen\left(\frac{\pi}{2}(-2)\right) = sen(-\pi) \end{cases}$$

Las funciones se cortan en *x = –2, x = 0* y en *x = 2.*

Calculamos el área pedida como la suma de los dos recintos en que se divide la región del plano delimitada por las dos gráficas y para ello usamos la integral definida.

Calculamos la integral indefinida.

$$\int \left(x^3 - 4x\right) - sen\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

Calculamos las áreas de los dos recintos que delimitan las funciones.

$$\int_{-2}^{0} \left(x^3 - 4x\right) - sen\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 + \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_{-2}^{0} =$$

$$= \left[\frac{0^4}{4} - 2\cdot 0^2 + \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}0\right)\right] - \left[\frac{(-2)^4}{4} - 2(-2)^2 + \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}(-2)\right)\right] =$$

$$= 0 - 0 + \frac{2}{\pi}\cos(0) - 4 + 8 - \frac{2}{\pi}\cos(-\pi) = \frac{2}{\pi} + 4 + \frac{2}{\pi} = 4 + \frac{4}{\pi}$$

$$\text{Área recinto } 1 = \boxed{4 + \frac{4}{\pi}}$$

$$\int_0^2 \left(x^3-4x\right)-sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}-2x^2+\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_0^2=$$

$$=\left[\frac{2^4}{4}-2\cdot 2^2+\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}2\right)\right]-\left[\frac{0^4}{4}-2\cdot 0^2+\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}0\right)\right]=$$

$$=4-8+\frac{2}{\pi}\cos(\pi)-0+0-\frac{2}{\pi}\cos(0)=-4-\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}=-4-\frac{4}{\pi}$$

$$\text{Área recinto 2}=\left|-4-\frac{4}{\pi}\right|=\boxed{4+\frac{4}{\pi}}$$

El área total es la suma de las dos áreas obtenidas.

$$Área=\left(4+\frac{4}{\pi}\right)+\left(4+\frac{4}{\pi}\right)=\boxed{8+\frac{8}{\pi}\simeq 10.55\,u^2}$$

No lo pide, pero dibujamos las funciones y los recintos que limitan para estimar la bondad de la solución obtenida.