

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

CURSO 2016/2017

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B)

OPCIÓN A

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} x + (a-1)y + z = -1 \\ (a-1)y + 2z = -2 \\ x + (a^2 - 5a + 5)z = -a + 4 \end{cases} \quad (3 \text{ puntos})$$

A2) Dados el punto $P \equiv (1, -1, 0)$ y las rectas

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y - 2z + 1 = 0 \\ 3x - y - 4z + 6 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{1}$$

halla la ecuación general de un plano π que sea paralelo a ambas rectas y tal que la distancia de P a π sea 2. (2 puntos)

A3) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{2x^2 + 3x + 1} - \sqrt{2x^2 - 5x + 7} \right) \quad (1 \text{ punto})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\cos(\pi x) + 2^x \right)^{\frac{1}{\ln x}} \quad (1 \text{ punto})$$

A4) Demuestra que la función $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sqrt{x^2 + x}$ tiene un máximo relativo en el intervalo (1, 3). Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (3 puntos)

OPCIÓN B

B1) Calcula los valores del parámetro t para los que la siguiente matriz no es regular:

$$A = \begin{pmatrix} -t & t+1 & -t+1 \\ 1 & 0 & -t+1 \\ 2 & -t-1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2 puntos)

B2) Encuentra la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P \equiv (-4, 2, 0)$ y corta a las rectas

$$r_1 \equiv \begin{cases} 2x + 3y + z - 1 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \quad y \quad r_2 \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+2}{3} \quad (3 \text{ puntos})$$

B3) Encuentra los extremos absolutos de la función $f(x) = (x^2 - 3)e^{-x+2}$ en el intervalo $[-2, 4]$.

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (2 puntos)

B4) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ y

$g(x) = \frac{x^2}{4} - 1$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas curvas. (3 puntos)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} x + (a-1)y + z = -1 \\ (a-1)y + 2z = -2 \\ x + (a^2 - 5a + 5)z = -a + 4 \end{cases} \quad (3 \text{ puntos})$$

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 1 & 0 & a^2 - 5a + 5 \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & a^2 - 5a + 5 & -a + 4 \end{array} \right)$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a-1 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 1 & 0 & a^2 - 5a + 5 \end{vmatrix} = (a-1)(a^2 - 5a + 5) + 2(a-1) - (a-1)$$

$$|A| = (a-1)(a^2 - 5a + 5 + 2 - 1)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow (a-1)(a^2 - 5a + 6) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 0 \\ a^2 - 5a + 6 = 0 \Rightarrow a = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 24}}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 = a \\ 0 \\ \frac{5-1}{2} = 2 = a \end{cases} \end{cases}$$

Nos surgen cuatro situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 1$, $a \neq 2$ y $a \neq 3$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. Al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado y hallamos su solución utilizando el método de Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & a-1 & 1 \\ -2 & a-1 & 2 \\ -a+4 & 0 & a^2-5a+5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a-1 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 1 & 0 & a^2-5a+5 \end{vmatrix}} = \frac{\cancel{(a-1)} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -a+4 & 0 & a^2-5a+5 \end{vmatrix}}{\cancel{(a-1)}(a^2-5a+6)}$$

$$x = \frac{-a^2+5a-5-2a+8+a-4+2a^2-10a+10}{a^2-5a+6} = \frac{a^2-6a+9}{(a-2)(a-3)}$$

$$x = \frac{(a-3)(a-3)}{(a-2)(a-3)} = \boxed{\frac{a-3}{a-2}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -a+4 & a^2-5a+5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a-1 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 1 & 0 & a^2-5a+5 \end{vmatrix}} = \frac{-2a^2+10a-10-2+2+2a-8}{(a-1)(a-2)(a-3)}$$

$$y = \frac{-2a^2+12a-18}{(a-1)(a-2)(a-3)} = \frac{-2(a^2-6a+9)}{(a-1)(a-2)(a-3)} = \frac{-2\cancel{(a-3)}(a-3)}{(a-1)(a-2)\cancel{(a-3)}}$$

$$y = \boxed{\frac{-2(a-3)}{(a-1)(a-2)}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a-1 & -1 \\ 0 & a-1 & -2 \\ 1 & 0 & -a+4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a-1 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 1 & 0 & a^2-5a+5 \end{vmatrix}} = \frac{(a-1)(-a+4)-2(a-1)+(a-1)}{(a-1)(a^2-5a+5+2-1)}$$

$$z = \frac{\cancel{(a-1)}(-a+4-2+1)}{\cancel{(a-1)}(a-2)(a-3)} = \frac{-a+3}{(a-2)(a-3)} = \frac{-(a-3)}{(a-2)(a-3)} = \boxed{\frac{-1}{a-2}} = z$$

La solución es $x = \frac{a-3}{a-2}$; $y = \frac{-2(a-3)}{(a-1)(a-2)}$; $z = \frac{-1}{a-2}$

CASO 2. $a = 1$

El sistema queda:

$$\begin{cases} x + z = -1 \\ 2z = -2 \\ x + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = -1 \\ \boxed{z = -1} \\ x + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = -1 \\ x - 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

El sistema es incompatible

CASO 3. $a = 2$

El sistema queda:

$$\begin{cases} x + y + z = -1 \\ y + 2z = -2 \\ x - z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = -1 \\ y = -2 - 2z \\ x = 2 + z \end{cases} \Rightarrow 2 + z - 2 - 2z + z = -1 \Rightarrow 0 = -1$$

El sistema es incompatible

CASO 4. $a = 3$

El sistema queda:

$$\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ 2y + 2z = -2 \\ x - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ y = -1 - z \\ x = 1 + z \end{cases} \Rightarrow 1 + z - 2 - 2z + z = -1 \Rightarrow -1 = -1$$

El sistema es compatible indeterminado. Sus soluciones son:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = t \end{cases}$$

A2) Dados el punto $P \equiv (1, -1, 0)$ y las rectas

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y - 2z + 1 = 0 \\ 3x - y - 4z + 6 = 0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{1}$$

halla la ecuación general de un plano π que sea paralelo a ambas rectas y tal que la distancia de P a π sea 2. (2 puntos)

Averiguamos la posición relativa de las dos rectas.

Para ello obtenemos las ecuaciones paramétricas de las rectas.

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y - 2z + 1 = 0 \\ 3x - y - 4z + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - 2z + 1 = 0 \\ y = 3x - 4z + 6 \end{cases} \Rightarrow 2x - 3x + 4z - 6 - 2z + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x + 2z - 5 = 0 \Rightarrow x = 2z - 5 \Rightarrow y = 3(2z - 5) - 4z + 6 = 2z - 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -5 + 2\alpha \\ y = -9 + 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} \vec{v}_r = (2, 2, 1) \\ P_r(-5, -9, 0) \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{1} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1 + \beta \\ y = 0 \\ z = -1 + \beta \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} \vec{u}_s = (1, 0, 1) \\ Q_s(1, 0, -1) \end{cases}$$

Las rectas no son paralelas pues las coordenadas de sus vectores directores no son proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (2, 2, 1) \\ \vec{u}_s = (1, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{1} \neq \frac{2}{0} \neq \frac{1}{1}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Calculamos el producto mixto $[\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}]$.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(-5, -9, 0) \\ Q_s(1, 0, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_r Q_s} = (1, 0, -1) - (-5, -9, 0) = (6, 9, -1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{P_r Q_s} = (6, 9, -1) \\ \vec{v}_r = (2, 2, 1) \\ \vec{u}_s = (1, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{P_r Q_s}] = \begin{vmatrix} 6 & 9 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 12 + 9 + 2 - 18 = 5 \neq 0$$

Como este producto mixto es no nulo las rectas se cruzan.

El plano π que se pide tiene como vectores directores el vector $\vec{v}_r = (2, 2, 1)$ director de la recta r y el vector director $\vec{u}_s = (1, 0, 1)$ de la recta s .

El vector normal del plano π es el producto vectorial de dichos vectores.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = (2, 2, 1) \\ \vec{u}_s = (1, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n} = \vec{v}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2i + j - 2k - 2j = 2i - j - 2k = (2, -1, -2)$$

Por lo que el plano π tiene ecuación $\pi \equiv 2x - y - 2z + D = 0$.

Para determinar el valor de D utilizamos que la distancia del plano al punto P debe ser 2.

Utilizamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 2x - y - 2z + D = 0 \\ P(1, -1, 0) \\ d(P, \pi) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow d(P, \pi) = \frac{|2 + 1 - 0 + D|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|3 + D|}{\sqrt{9}} = 2 \Rightarrow |3 + D| = 6 \Rightarrow \begin{cases} 3 + D = 6 \rightarrow D = 3 \rightarrow \boxed{\pi \equiv 2x - y - 2z + 3 = 0} \\ o \\ 3 + D = -6 \rightarrow D = -9 \rightarrow \boxed{\pi' \equiv 2x - y - 2z - 9 = 0} \end{cases}$$

Existen dos planos cumpliendo las condiciones pedidas:

$$\pi \equiv 2x - y - 2z + 3 = 0 \quad y \quad \pi' \equiv 2x - y - 2z - 9 = 0$$

A3) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{2x^2 + 3x + 1} - \sqrt{2x^2 - 5x + 7} \right) \quad (1 \text{ punto})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\cos(\pi x) + 2^x \right)^{\frac{1}{\ln x}} \quad (1 \text{ punto})$$

Primer límite.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{2x^2 + 3x + 1} - \sqrt{2x^2 - 5x + 7} \right) &= \infty - \infty = \text{Indeterminación} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{2x^2 + 3x + 1} - \sqrt{2x^2 - 5x + 7} \right) \left(\sqrt{2x^2 + 3x + 1} + \sqrt{2x^2 - 5x + 7} \right)}{\sqrt{2x^2 + 3x + 1} + \sqrt{2x^2 - 5x + 7}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{2x^2 + 3x + 1} \right)^2 - \left(\sqrt{2x^2 - 5x + 7} \right)^2}{\sqrt{2x^2 + 3x + 1} + \sqrt{2x^2 - 5x + 7}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3x + 1 - (2x^2 - 5x + 7)}{\sqrt{2x^2 + 3x + 1} + \sqrt{2x^2 - 5x + 7}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{2x^2} + 3x + 1 - \cancel{2x^2} + 5x - 7}{\sqrt{2x^2 + 3x + 1} + \sqrt{2x^2 - 5x + 7}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x - 6}{\sqrt{2x^2 + 3x + 1} + \sqrt{2x^2 - 5x + 7}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{8x}{x} - \frac{6}{x}}{\sqrt{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{5x}{x^2} + \frac{7}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8 - \frac{6}{x}}{\sqrt{2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{2 - \frac{5}{x} + \frac{7}{x^2}}} = \\ &= \frac{8 - 0}{\sqrt{2 + 0 + 0} + \sqrt{2 - 0 + 0}} = \frac{8}{2\sqrt{2}} = \boxed{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Segundo límite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\cos(\pi x) + 2^x \right)^{\frac{1}{\ln x}} = \left(\cos(\pi) + 2^1 \right)^{\frac{1}{\ln 1}} = 1^\infty = \text{Indeterminación} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x} (\cos(\pi x) + 2^x - 1)} = \dots$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x} (\cos(\pi x) + 2^x - 1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(\pi x) + 2^x - 1}{\ln x} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\pi \operatorname{sen}(\pi x) + 2^x \ln 2}{\frac{1}{x}} = \frac{-\pi \operatorname{sen}(\pi) + 2^1 \ln 2}{\frac{1}{1}} = 2 \ln 2 = \ln 4 \end{aligned}$$

$$\dots = e^{\ln 4} = \boxed{4}$$

A4) Demuestra que la función $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sqrt{x^2+x}$ tiene un máximo relativo en el intervalo $(1, 3)$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (3 puntos)

Para que la función tenga un extremo relativo su derivada debe anularse.

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sqrt{x^2+x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sqrt{x^2+x} + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+x}}$$

Comprobamos que la función derivada cumple las condiciones del teorema de Bolzano.

1. La función $f'(x)$ es continua en el intervalo $[1, 3]$ pues es producto y suma de funciones continuas. Solo falta ver que x^2+x no se anula en dicho intervalo ni es negativo para que exista la raíz y la fracción.

$$x \in [1, 3] \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow x(x+1) \geq 1 \cdot (1+1) = 2$$

La expresión x^2+x es siempre positivo y la función $f'(x)$ es continua.

2. La función $f'(x)$ toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo $[1, 3]$.

$$f'(3) = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\sqrt{3^2+3} + \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\frac{6+2}{2\sqrt{3^2+3}} = 0 - \frac{8}{2\sqrt{12}} < 0$$

$$f'(1) = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sqrt{1^2+1} + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{2+2}{2\sqrt{1^2+1}} = 0 + \frac{4}{2\sqrt{2}} > 0$$

Se cumplen las condiciones del teorema y existe $\alpha \in (1, 3)$ donde la función $f'(x)$ se anula, es decir, tal que $f'(\alpha) = 0$.

$x = \alpha$ es un punto crítico de la función $f(x)$.

Como hemos visto que la derivada toma valor positivo en $x = 1$ la función crece antes de $x = \alpha$ y como la derivada toma valor negativo en $x = 3$ la función decrece después de $x = \alpha$, por lo que la función presenta un máximo en $x = \alpha$.

OPCIÓN B

B1) Calcula los valores del parámetro t para los que la siguiente matriz no es regular:

$$A = \begin{pmatrix} -t & t+1 & -t+1 \\ 1 & 0 & -t+1 \\ 2 & -t-1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ puntos})$$

Para que la matriz no sea regular su determinante debe ser nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} -t & t+1 & -t+1 \\ 1 & 0 & -t+1 \\ 2 & -t-1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -t & t+1 & -t+1 \\ 1 & 0 & -t+1 \\ 2 & -(t+1) & 1 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Saco } t+1 \text{ factor común} \\ \text{en 2ª columna} \end{array} \right\} =$$

$$= (t+1) \begin{vmatrix} -t & 1 & -t+1 \\ 1 & 0 & -t+1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (t+1) [-2t+2+t-1-1+t^2-t] = (t+1) [t^2-2t] = (t+1)t(t-2)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow (t+1)t(t-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t+1=0 \rightarrow \boxed{t=-1} \\ 0 \\ t=0 \\ 0 \\ t-2=0 \rightarrow \boxed{t=2} \end{cases}$$

La matriz A no es regular cuando $t = -1$ o $t = 0$ o $t = 2$.

B2) Encuentra la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P \equiv (-4, 2, 0)$ y corta a las rectas

$$r_1 \equiv \begin{cases} 2x + 3y + z - 1 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \quad y \quad r_2 \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+2}{3} \quad (3 \text{ puntos})$$

Estudiamos la posición relativa de las dos rectas.

Obtenemos sus ecuaciones paramétricas.

$$r_1 \equiv \begin{cases} 2x + 3y + z - 1 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y + z - 1 = 0 \\ x = -2y + 3 \end{cases} \Rightarrow 2(-2y + 3) + 3y + z - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4y + 6 + 3y + z - 1 = 0 \Rightarrow -y + z + 5 = 0 \Rightarrow z = -5 + y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = -5 + \alpha \end{cases} \Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} \vec{v}_1 = (-2, 1, 1) \\ P_1(3, 0, -5) \end{cases}$$

$$r_2 \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+2}{3} \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} x = -1 - 2\beta \\ y = -3 + 3\beta \\ z = -2 + 3\beta \end{cases} \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} \vec{v}_2 = (-2, 3, 3) \\ Q_2(-1, -3, -2) \end{cases}$$

Las rectas no son paralelas pues las coordenadas de sus vectores directores no son proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_2 = (-2, 3, 3) \\ \vec{v}_1 = (-2, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-2}{-2} \neq \frac{3}{1} = \frac{3}{1}$$

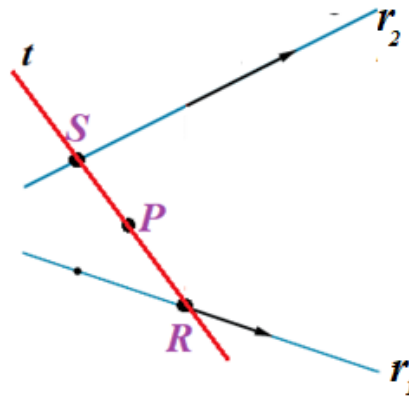
Las rectas se cortan o cruzan. Calculamos el producto mixto $[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{P_1Q_2}]$.

$$\left. \begin{array}{l} P_1(3, 0, -5) \\ Q_2(-1, -3, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_1Q_2} = (-1, -3, -2) - (3, 0, -5) = (-4, -3, 3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{P_1Q_2} = (-4, -3, 3) \\ \vec{v}_1 = (-2, 1, 1) \\ \vec{v}_2 = (-2, 3, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \overrightarrow{P_1Q_2}] = \begin{vmatrix} -4 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 1 - 12 + 6 - 18 + 6 - 18 + 12 = -23 \neq 0$$

Como este producto mixto es no nulo las rectas se cruzan.

Debemos encontrar un punto R de la recta r_1 y un punto S de la recta r_2 tal que junto con el punto P estén alineados.



Hallamos la recta t pedida determinando el plano π que contiene a la recta r_2 y al punto P . Dicho plano corta a la recta r_1 en el punto R buscado.

Determino el plano π . Este plano tiene como vectores directores el vector director de r_2 y el vector que une un punto cualquiera de r_2 con el punto P .

$$r_2 \equiv \begin{cases} \vec{v}_2 = (-2, 3, 3) \\ Q_2(-1, -3, -2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u} = \vec{v}_2 = (-2, 3, 3) \\ \vec{v} = \overrightarrow{PQ_2} = (-1, -3, -2) - (-4, 2, 0) = (3, -5, -2) \Rightarrow \\ P(-4, 2, 0) \in \pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+4 & y-2 & z \\ -2 & 3 & 3 \\ 3 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -6x - 24 + 9y - 18 + 10z - 9z - 4y + 8 + 15x + 60 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \equiv 9x + 5y + z + 26 = 0$$

Determinamos el punto R de r_1 de corte con el plano π .

$$r_1 \equiv \begin{cases} \pi \equiv 9x + 5y + z + 26 = 0 \\ \begin{cases} x = 3 - 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = -5 + \alpha \end{cases} \end{cases} \Rightarrow 9(3 - 2\alpha) + 5\alpha - 5 + \alpha + 26 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 27 - 18\alpha + 5\alpha - 5 + \alpha + 26 = 0 \Rightarrow -12\alpha + 48 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 - 8 = -5 \\ y = 4 \\ z = -5 + 4 = -1 \end{cases} \Rightarrow R(-5, 4, -1)$$

Hallamos la ecuación de la recta t que pasa por P con vector director \overrightarrow{RP}

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_t = \overrightarrow{RP} = (-4, 2, 0) - (-5, 4, -1) = (1, -2, 1) \\ P(-4, 2, 0) \in t \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{t \equiv \frac{x+4}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{1}}$$

B3) Encuentra los extremos absolutos de la función $f(x) = (x^2 - 3)e^{-x+2}$ en el intervalo $[-2, 4]$.

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (2 puntos)

La función es continua en el intervalo $[-2, 4]$ pues es producto de dos funciones continuas. Por el teorema de Weierstrass la función f alcanza en dicho intervalo sus extremos absolutos. Éstos se encuentran en los extremos del intervalo o entre sus extremos relativos.

Localizamos los extremos relativos usando la derivada.

$$f(x) = (x^2 - 3)e^{-x+2} \Rightarrow f'(x) = 2xe^{-x+2} + (-1)(x^2 - 3)e^{-x+2} = (2x - x^2 + 3)e^{-x+2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (2x - x^2 + 3)e^{-x+2} = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-1)3}}{-2}$$

$$x = \frac{-2 \pm 4}{-2} = \begin{cases} \frac{-2+4}{-2} = -1 \in [-2, 4] \\ 0 \\ \frac{-2-4}{-2} = 3 \in [-2, 4] \end{cases}$$

Valoramos la función en los extremos del intervalo y en los puntos críticos obtenidos.

$$x = -2 \rightarrow f(-2) = ((-2)^2 - 3)e^{2+2} = e^4 \approx 54.6 \text{ ¡Máximo!}$$

$$x = -1 \rightarrow f(-1) = ((-1)^2 - 3)e^{1+2} = -2e^3 < 0 \text{ ¡Mínimo!}$$

$$x = 3 \rightarrow f(3) = (3^2 - 3)e^{-3+2} = \frac{6}{e} \approx 2.21$$

$$x = 4 \rightarrow f(4) = (4^2 - 3)e^{-4+2} = 13e^{-2} = \frac{13}{e^2} \approx 1.76$$

La función tiene un máximo absoluto en $x = -2$ y un mínimo absoluto en $x = -1$.

B4) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ y $g(x) = \frac{x^2}{4} - 1$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas curvas. (3 puntos)

Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) = \frac{x^2}{4} - 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$$

$$\text{lo comprobamos} \rightarrow \begin{cases} x = -2 \rightarrow \cos\left(\frac{-2\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 = \frac{(-2)^2}{4} - 1 \\ x = 2 \rightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 = \frac{2^2}{4} - 1 \end{cases}$$

Hallamos la integral definida entre -2 y 2 de la diferencia entre las dos funciones.

$$\int_{-2}^2 \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) - \left(\frac{x^2}{4} - 1\right) dx = \int_{-2}^2 \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) - \frac{x^2}{4} + 1 dx = \left[\frac{4}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right) - \frac{x^3}{12} + x \right]_{-2}^2 =$$

$$= \left[\frac{4}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{4}\right) - \frac{2^3}{12} + 2 \right] - \left[\frac{4}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{-2\pi}{4}\right) - \frac{(-2)^3}{12} - 2 \right] =$$

$$= \frac{4}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{3} + 2 - \frac{4}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{-\pi}{2}\right) - \frac{1}{3} + 2 =$$

$$= \frac{4}{\pi} - \frac{1}{3} + 2 + \frac{4}{\pi} - \frac{1}{3} + 2 = \frac{8}{\pi} + 4 - \frac{2}{3} = \boxed{\frac{8}{\pi} + \frac{10}{3} \approx 5.21}$$

El área del recinto es el valor absoluto de la integral definida calculada: $\frac{8}{\pi} + \frac{10}{3} \approx 5.21 u^2$

No pide dibujarla, pero lo hacemos para comprobar la solución obtenida.

