upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2017/2018 IKASTURTEA

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

Realiza una de las opciones A o B

OPCIÓN A

A1**)** Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ x+(a+4)y+(a+1)z=0 \\ -(a+2)y+\left(a^2+3a+2\right)z=a+4 \end{cases}$$

(3 puntos)

A2) Sean los puntos $P\equiv(7,4,2)$, $Q\equiv(1,2,-2)$ y $R\equiv(2,1,-3)$. Uno de ellos es el centro de un rombo, y los otros dos, dos vértices. Halla los dos vértices restantes. (2 puntos)

A3) Calcula las siguientes integrales indefinidas:

$$\int e^{\cos 3x}\sin 3x\,dx$$ (1 punto)

$$\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,dx$$ (1 punto)

A4) Halla las asíntotas (no es necesario hacer el estudio de la posición de la curva respecto a ellas) y los extremos relativos de la función

$$y=\frac{2x^2+6}{x-1}$$

(3 puntos)

OPCIÓN B

B1) Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ a & b & c\\ x & y & z\end{pmatrix}$ tal que $|A|=-1$. Calcula el determinante de la matriz $A^2\cdot B^t$ siendo $B=\begin{pmatrix}x & y & z\\ 2a-x & 2b-y & 2c-z\\ a+1 & b-1 & c-2\end{pmatrix}$

(2 puntos)

B2) Halla la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P\equiv(-4,0,5)$ y corta a las rectas

$$r\equiv\begin{cases}x+y+z-1=0\\ x+y+1=0\end{cases} \qquad y \qquad s\equiv\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{1}$$

(3 puntos)

B3) Demuestra que existe $\alpha\in(2,3)$ tal que $f(\alpha)=-\frac{3}{2}$, siendo

$$f(x)=\cos(\pi x)\sqrt[3]{x^3-2x^2-1}$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (2 puntos)

B4) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x)=-x^2+3x$ y $g(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & x\le 2\\ 3-x & x>2\end{cases}$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

(3 puntos)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

A1**)** Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ x+(a+4)y+(a+1)z=0 \\ -(a+2)y+\left(a^2+3a+2\right)z=a+4 \end{cases}$$

(3 puntos)

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & a+4 & a+1 \\ 0 & -(a+2) & a^2+3a+2 \end{pmatrix}$

Averiguamos cuando se anula su determinante.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & a+4 & a+1 \\ 0 & -(a+2) & a^2+3a+2 \end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix} a^2+3a+2=(a+1)(a+2) \\ \text{Sacamos factor comun } a+2 \text{ en la 3ª fila} \end{matrix}\right\}=$$

$$=(a+2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & a+4 & a+1 \\ 0 & -1 & a+1 \end{vmatrix}=(a+2)\left(a^2+a+4a+4-2a-2+a+1\right)=(a+2)\left(a^2+4a+3\right)$$

$$|A|=0\Rightarrow (a+2)\left(a^2+4a+3\right)=0\Rightarrow \begin{cases} a+2=0\Rightarrow a=-2 \\ o \\ a^2+4a+3=0\Rightarrow a=\dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-12}}{2}=\begin{cases} \dfrac{-4+2}{2}=-1 \\ \dfrac{-4-2}{2}=-3 \end{cases} \end{cases}$$

Hay cuatro casos distintos a considerar.

CASO 1. $a\neq -1,\ a\neq -2\ y\ a\neq -3$

En esta situación el determinante de la matriz de coeficientes A es no nulo y su rango es 3 al igual que el de la ampliada y el número de incógnitas.
El sistema es compatible determinado.
Su solución se puede obtener por Cramer.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & a+4 & a+1 \\ a+4 & -(a+2) & (a+1)(a+2) \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{\cancel{(a+1)}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & a+4 & 1 \\ a+4 & -(a+2) & a+2 \end{vmatrix}}{\cancel{(a+1)}(a+2)(a+3)}$$

$$x=\frac{(a+4)(a+2)+2(a+4)+(a+2)}{(a+2)(a+3)}=\frac{a^2+2a+4a+8+2a+8+a+2}{(a+2)(a+3)}$$

$$x=\frac{a^2+9a+18}{(a+2)(a+3)}=\frac{\cancel{(a+3)}(a+6)}{(a+2)\cancel{(a+3)}}=\boxed{\frac{a+6}{a+2}}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & a+1\\ 0 & a+4 & (a+1)(a+2)\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{\cancel{(a+1)}\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & a+4 & a+2\end{vmatrix}}{\cancel{(a+1)}(a+2)(a+3)}=$$

$$y=\frac{-a-2-a-4}{(a+2)(a+3)}=\frac{-2a-6}{(a+2)(a+3)}=\frac{-2\cancel{(a+3)}}{(a+2)\cancel{(a+3)}}=\boxed{\frac{-2}{a+2}}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & a+4 & 0\\ 0 & -(a+2) & a+4\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{a^2+4a+4a+16-a-2-2a-8}{(a+1)(a+2)(a+3)}=\frac{a^2+5a+6}{(a+1)(a+2)(a+3)}$$

$$\boxed{z=\frac{\cancel{(a+2)}\cancel{(a+3)}}{(a+1)\cancel{(a+2)}\cancel{(a+3)}}=\frac{1}{a+1}}$$

La solución es $x=\dfrac{a+6}{a+2}$; $y=\dfrac{-2}{a+2}$; $z=\dfrac{1}{a+1}$

CASO 2. $a=-1$

El sistema queda

$$\begin{cases}x+2y=1\\ x+3y=0\\ -y=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+2y=1\\ x+3y=0\\ \boxed{y=-3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-6=1\\ x-9=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=7\\ x=9\end{cases}\ \text{¡¡Imposible!!}$$

Este sistema es incompatible.

CASO 3. $a=-2$

El sistema queda

$$\begin{cases}x+2y=1\\ x+2y-z=0\\ 0=2\end{cases}\Rightarrow\ \text{¡¡Imposible!!}$$

Este sistema es incompatible

CASO 4. $a=-3$

El sistema queda

$$\begin{cases} x+2y \quad =1 \\ x+y-2z=0 \\ y+2z=1 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^{\text{a}} - \text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrrr} x & +y & -2z & =0 \\ -x & -2y & & =-1 \\ \hline & -y & -2z & =-1 \end{array} \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^{\text{a}} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2y \quad =1 \\ -y-2z=-1 \\ y+2z=1 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^{\text{a}} + \text{Ecuación } 2^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrrr} y & +2z & = & 1 \\ -y & -2z & = & -1 \\ \hline & 0 & = & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^{\text{a}} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2y \quad =1 \\ -y-2z=-1 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y \quad =1 \\ -y-2z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y \quad =1 \\ \boxed{y=1-2z} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+2(1-2z)=1 \Rightarrow x+2-4z=1 \Rightarrow \boxed{x=4z-1}$$

Este sistema es compatible indeterminado.

Sus soluciones son: $x=4t-1;\ y=1-2t;\ z=t$; siendo $t\in\mathbb{R}$

A2) Sean los puntos $P \equiv (7,4,2)$, $Q \equiv (1,2,-2)$ y $R \equiv (2,1,-3)$. Uno de ellos es el centro de un rombo, y los otros dos, dos vértices. Halla los dos vértices restantes. (2 puntos)

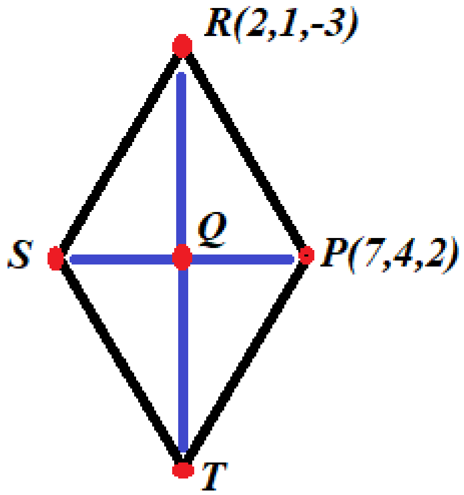
Debemos determinar que punto está en el centro del rombo.
Utilizamos que debe formarse un ángulo recto en el punto central.
Suponemos el punto Q central y hallamos los vectores $\overrightarrow{QP}$ y $\overrightarrow{QR}$

$$\overrightarrow{QP} = (7,4,2)-(1,2,-2) = (6,2,4)$$

$$\overrightarrow{QR} = (2,1,-3)-(1,2,-2) = (1,-1,-1)$$

Calculamos su producto escalar → $\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QR} = (6,2,4)(1,-1,-1) = 6-2-4 = 0$

Se cumple que el punto Q es el central y el rombo es como el de la figura.



Debemos hallar las coordenadas de los puntos S y T.
El punto T se obtiene sumando al punto Q el vector $\overrightarrow{RQ}$.

$$\overrightarrow{QR} = (1,-1,-1) \Rightarrow \overrightarrow{RQ} = -(1,-1,-1) = (-1,1,1)$$

$$T = Q + \overrightarrow{RQ} = (1,2,-2)+(-1,1,1) = (0,3,-1)$$

El punto S se obtiene sumando al punto Q el vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\overrightarrow{QP} = (6,2,4) \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = -(6,2,4) = (-6,-2,-4)$$

$$S = Q + \overrightarrow{PQ} = (1,2,-2)+(-6,-2,-4) = (-5,0,-6)$$

Las coordenadas de los dos vértices que faltaban son: S(–5, 0, –6) y T(0, 3, –1)

A3) Calcula las siguientes integrales indefinidas:

$$\int e^{\cos 3x} \sin 3x dx \qquad \text{(1 punto)}$$

$$\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x} dx \qquad \text{(1 punto)}$$

$$\int e^{\cos 3x} \sin 3x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \cos 3x = t \to -3 \cdot sen 3x dx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{-3 sen 3x} \end{array} \right\} = \int e^t \cancel{sen 3x} \frac{dt}{-3\cancel{sen 3x}} =$$

$$= -\frac{1}{3}\int e^t dt = \frac{-1}{3} e^t = \boxed{\frac{-1}{3} e^{\cos 3x} + K}$$

$$\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 2x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de variable} \\ \cos 2x = t \to -2 \cdot sen 2x dx = dt \\ dx = \dfrac{dt}{-2 sen 2x} \end{array} \right\} = \int \frac{\cancel{sen 2x}}{1+t^2} \frac{dt}{-2\cancel{sen 2x}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2} dt = -\frac{1}{2} arctg t = \boxed{-\frac{1}{2} arctg \cos 2x + K}$$

A4) Halla las asíntotas (no es necesario hacer el estudio de la posición de la curva respecto a ellas) y los extremos relativos de la función

$$y = \frac{2x^2+6}{x-1}$$

(3 puntos)

El dominio de la función $y = \frac{2x^2+6}{x-1}$ son todos los números reales menos los que anulan el denominador. $\text{Dominio} = \mathbb{R} - \{1\}$

Asíntota vertical. $x = a$

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2+6}{x-1} = \frac{7}{0} = \infty$$

$x = 1$ es asíntota vertical de la función.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+6}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} 2x = \infty$$

La función no tiene asíntota horizontal

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2+6}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+6}{x^2-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

$$n = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+6}{x-1} - 2x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{2x^2} + 6 - \cancel{2x^2} + 2x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+6}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$y = 2x + 2$ es asíntota oblicua de la función.

Para determinar los extremos relativos utilizamos la derivada de la función.

$$y = \frac{2x^2+6}{x-1} \Rightarrow y' = \frac{4x(x-1) - (2x^2+6)}{(x-1)^2} = \frac{4x^2 - 4x - 2x^2 - 6}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 4x - 6}{(x-1)^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow \frac{2x^2-4x-6}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow$$

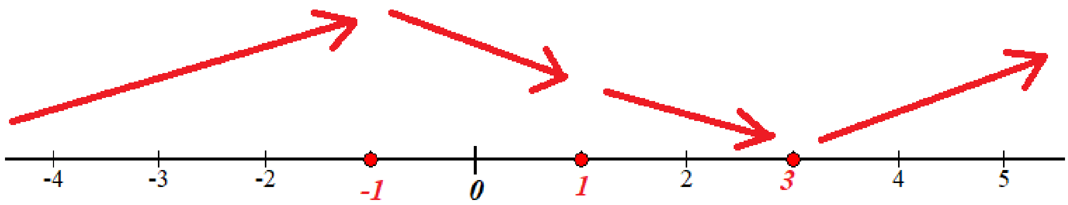
$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-3)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \begin{cases} \frac{2+4}{2} = 3 = x \\ \frac{2-4}{2} = -1 = x \end{cases}$$

La función tiene dos valores críticos: $x=-1$ y $x=3$. En el dominio se ha excluido el valor $x=1$.

Valoramos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En $(-\infty,-1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f\,'(-2)=\frac{2(-2)^2-4(-2)-6}{(-2-1)^2}=\frac{10}{9}>0$. La función crece en $(-\infty,-1)$
- En $(-1,1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f\,'(0)=\frac{0-0-6}{(0-1)^2}=-6<0$. La función decrece en $(-1,1)$
- En $(1,3)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f\,'(2)=\frac{2\cdot 2^2-4\cdot 2-6}{(2-1)^2}=-6<0$. La función decrece en $(-1,1)$
- En $(3,+\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $f\,'(4)=\frac{2\cdot 4^2-4\cdot 4-6}{(4-1)^2}=\frac{10}{9}>0$. La función crece en $(3,+\infty)$

La función sigue el esquema siguiente:



La función tiene un máximo relativo en $x=-1$ y un mínimo relativo en $x=3$. Como $f(-1)=\frac{2(-1)^2+6}{-1-1}=-4$ y $f(3)=\frac{2(3)^2+6}{3-1}=12$ el máximo relativo tiene coordenadas (–1, –4) y el mínimo relativo (3, 12).

OPCIÓN B

B1) Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ a & b & c\\ x & y & z\end{pmatrix}$ tal que $|A|=-1$. Calcula el determinante de la matriz $A^2\cdot B^t$ siendo $B=\begin{pmatrix}x & y & z\\ 2a-x & 2b-y & 2c-z\\ a+1 & b-1 & c-2\end{pmatrix}$ (2 puntos)

$$|B|=\begin{vmatrix}x & y & z\\ 2a-x & 2b-y & 2c-z\\ a+1 & b-1 & c-2\end{vmatrix}=\left\{\begin{array}{l}\text{Separamos en dos determinantes}\\ \text{por la resta de la 2ª fila}\end{array}\right\}=$$

$$=\begin{vmatrix}x & y & z\\ 2a & 2b & 2c\\ a+1 & b-1 & c-2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}x & y & z\\ x & y & z\\ a+1 & b-1 & c-2\end{vmatrix}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{Separamos el primer determinante en dos determinantes}\\ \text{por la resta de la 3ª fila.}\\ \text{El 2º determinante vale 0 pues la fila 1ª y 2ª son iguales.}\end{array}\right\}=$$

$$=\begin{vmatrix}x & y & z\\ 2a & 2b & 2c\\ a & b & c\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x & y & z\\ 2a & 2b & 2c\\ 1 & -1 & -2\end{vmatrix}-0=\left\{\begin{array}{l}\text{El primer determinante vale 0}\\ \text{pues la fila 2ª es el doble de la 3ª}\end{array}\right\}=$$

$$=0+\begin{vmatrix}x & y & z\\ 2a & 2b & 2c\\ 1 & -1 & -2\end{vmatrix}=\left\{\begin{array}{l}\text{Sacamos 2 factor común}\\ \text{en la 2ª fila.}\\ \text{Sacamos }-1\text{ factor común}\\ \text{en la 3ª fila}\end{array}\right\}=-2\begin{vmatrix}x & y & z\\ a & b & c\\ -1 & 1 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{Permutamos fila 1ª y 3ª}\\ \text{por lo que el determinante cambia de signo}\end{array}\right\}=2\begin{vmatrix}-1 & 1 & 2\\ a & b & c\\ x & y & z\end{vmatrix}=2|A|=2(-1)=-2$$

Tenemos que $|B|=-2$ y que $|A|=-1$. Lo utilizamos para calcular el determinante de $A^2\cdot B^t$.

$$\left|A^2\cdot B^t\right|=\left|A\cdot A\cdot B^t\right|=|A|\cdot|A|\cdot\left|B^t\right|=|A|\cdot|A|\cdot|B|=(-1)(-1)(-2)=\boxed{-2}$$

Hemos utilizado que el determinante del producto de matrices es igual que el producto de cada uno de los determinantes y que el determinante de una matriz y su traspuesta es igual.

B2) Halla la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P \equiv (-4,0,5)$ y corta a las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x+y+1=0 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}$ (3 puntos)

Estudiamos la posición relativa de las rectas *r* y *s*. Para ello obtenemos un punto y un vector director de cada recta.

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x+y+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x=-1-y \end{cases} \Rightarrow -1-y+y+z-1=0 \Rightarrow z=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-1-t \\ y=t \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1,1,0) \\ P_r(-1,0,2) \end{cases}$$

$$s \equiv \left\{ \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1} \right. \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_s} = (2,1,1) \\ Q_s(2,3,0) \end{cases}$$

Vemos que los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas no son paralelas ni coincidentes.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-1,1,0) \\ \overrightarrow{v_s} = (2,1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-1}{2} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{0}{1}$$

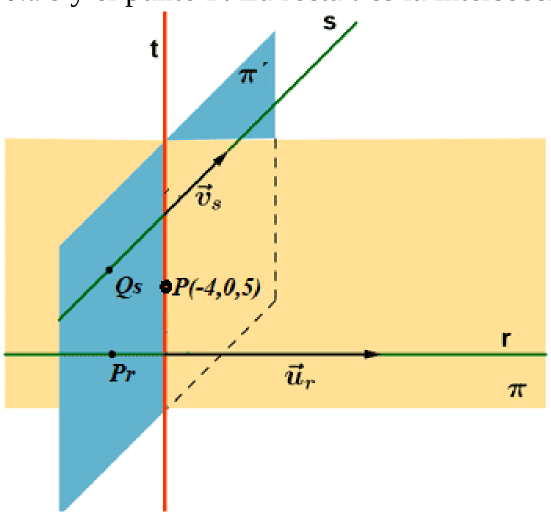
Las rectas se cortan o cruzan.

Averiguamos su posición relativa con el producto mixto $\left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right]$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-1,1,0) \\ \overrightarrow{v_s} = (2,1,1) \\ \overrightarrow{P_rQ_s} = (2,3,0)-(-1,0,2) = (3,3,-2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right] = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 2+3+4+3 = 12 \neq 0$$

Como el producto mixto es no nulo las rectas se cruzan.

La recta *t* pedida se obtiene hallando el plano π que contiene a la recta *r* y el punto P y el plano π´ que contiene la recta *s* y el punto P. La recta *t* es la intersección de los dos planos.



El plano π pasa por el punto P y tiene como vectores directores $\overrightarrow{u_r}=(-1,1,0)$ y $\overrightarrow{PP_r}$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{u_r}=(-1,1,0)\\ \vec{v}=\overrightarrow{PP_r}=(-1,0,2)-(-4,0,5)=(3,0,-3)\\ P(-4,0,5)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix}x+4 & y & z-5\\ -1 & 1 & 0\\ 3 & 0 & -3\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x-12-3z+15-3y=0\Rightarrow -3x-3y-3z+3=0\Rightarrow \pi\equiv x+y+z-1=0$$

El plano π´ pasa por el punto P y tiene como vectores directores $\overrightarrow{v_s}=(2,1,1)$ y $\overrightarrow{PQ_s}$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{v_s}=(2,1,1)\\ \vec{v}=\overrightarrow{PQ_s}=(2,3,0)-(-4,0,5)=(6,3,-5)\\ P(-4,0,5)\in\pi'\end{array}\right\}\Rightarrow \pi'\equiv\begin{vmatrix}x+4 & y & z-5\\ 2 & 1 & 1\\ 6 & 3 & -5\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5x-20+6y+\cancel{6z}-\cancel{30}-\cancel{6z}+\cancel{30}+10y-3x-12=0\Rightarrow -8x+16y-32=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi'\equiv x-2y+4=0$$

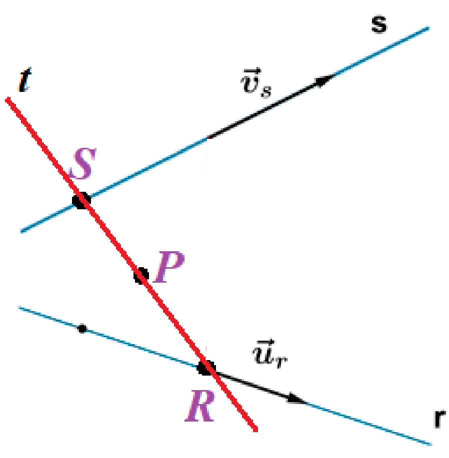
La recta *t* es la intersección de los planos π y π´. Su ecuación es:

$$\left.\begin{array}{l}\pi'\equiv x-2y+4=0\\ \pi\equiv x+y+z-1=0\end{array}\right\}\Rightarrow t\equiv\begin{cases}x-2y+4=0\\ x+y+z-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\boxed{x=2y-4}\\ x+y+z-1=0\end{cases}\Rightarrow 2y-4+y+z-1=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3y+z-5=0\Rightarrow \boxed{z=5-3y}\Rightarrow t\equiv\begin{cases}x=-4+2t\\ y=t\\ z=5-3t\end{cases}\Rightarrow \boxed{t\equiv\frac{x+4}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-5}{-3}}$$

OTRA FORMA DE HACERLO

Debemos encontrar un punto R de la recta *r* y un punto S de la recta *s* tal que junto con el punto P estén alineados.



$$r \equiv \begin{cases} x = -1-\alpha \\ y = \alpha \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow R(-1-\alpha, \alpha, 2)$$

$$s \equiv \left\{ \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1} \right. \Rightarrow \begin{cases} x = 2+2\beta \\ y = 3+\beta \\ z = \beta \end{cases} \Rightarrow S(2+2\beta, 3+\beta, \beta)$$

Como los puntos P, R y S deben estar alineados los vectores $\overrightarrow{RP}$ y $\overrightarrow{SP}$ deben tener coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{RP} = (-4,0,5)-(-1-\alpha,\alpha,2) = (-3+\alpha,-\alpha,3) \\ \overrightarrow{SP} = (-4,0,5)-(2+2\beta,3+\beta,\beta) = (-6-2\beta,-3-\beta,5-\beta) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-3+\alpha}{-6-2\beta} = \frac{-\alpha}{-3-\beta} = \frac{3}{5-\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-\alpha}{-3-\beta} = \dfrac{3}{5-\beta} \Rightarrow -5\alpha+\alpha\beta = -9-3\beta \Rightarrow & 3\beta-5\alpha+\alpha\beta = -9 \\ \dfrac{-3+\alpha}{-6-2\beta} = \dfrac{3}{5-\beta} \Rightarrow -15+3\beta+5\alpha-\alpha\beta = -18-6\beta \Rightarrow & \underline{9\beta+5\alpha-\alpha\beta = -3} \end{cases}$$

$$12\beta+0+0 = -12 \to \beta = \frac{-12}{12} = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{S(2-2, 3-1, -1) = (0,2,-1)}$$

No es necesario hallar las coordenadas del punto R. Basta con conocer las coordenadas de uno de los puntos. Usamos como vector director de la recta *t* el vector $\overrightarrow{SP}$.

$$\left.\begin{array}{l} P(-4,0,5) \in t \\ \vec{v}_t = \overrightarrow{SP} = (-4,0,5)-(0,2,-1) = (-4,-2,6) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{t \equiv \frac{x+4}{-4} = \frac{y}{-2} = \frac{z-5}{6}}$$

B3) Demuestra que existe $\alpha \in (2,3)$ tal que $f(\alpha) = -\frac{3}{2}$, siendo

$$f(x) = \cos(\pi x)\sqrt[3]{x^3 - 2x^2 - 1}$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (2 puntos)

Comprobamos que se puede aplicar el teorema de Bolzano a la función $g(x) = f(x) + \frac{3}{2}$ en el intervalo [2, 3].

La función *g(x)* es continua en el intervalo [2, 3] pues es continua la función coseno y la función raíz cúbica.

La función toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo:

$$g(x) = f(x) + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} + \cos(\pi x)\sqrt[3]{x^3 - 2x^2 - 1} \Rightarrow \begin{cases} g(2) = \frac{3}{2} + \cos(2\pi)\sqrt[3]{2^3 - 2\cdot 2^2 - 1} = \frac{1}{2} > 0 \\ g(3) = \frac{3}{2} + \cos(3\pi)\sqrt[3]{3^3 - 2\cdot 3^2 - 1} = \frac{-1}{2} < 0 \end{cases}$$

Se cumplen las condiciones exigidas por el teorema de Bolzano y con su aplicación sabemos que existe $\alpha \in (2,3)$ tal que $g(\alpha) = 0$.

Por lo que existe $\alpha \in (2,3)$ tal que $g(\alpha) = f(\alpha) + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow f(\alpha) = -\frac{3}{2}$

B4) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x)=-x^2+3x$ y $g(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & x\le 2\\ 3-x & x>2\end{cases}$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

(3 puntos)

Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

Si $x \le 2$ buscamos los puntos de corte entre las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=-x^2+3x \\ g(x)=\frac{x}{2} \\ f(x)=g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x}{2}=-x^2+3x \Rightarrow x=-2x^2+6x \Rightarrow 2x^2-5x=0 \Rightarrow x(2x-5)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \in (-\infty,2] \\ o \\ 2x-5=0 \Rightarrow x=\frac{5}{2}=2.5 \notin (-\infty,2] \end{cases}$$

Si $x > 2$ buscamos los puntos de corte entre las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=-x^2+3x \\ g(x)=3-x \\ f(x)=g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow 3-x=-x^2+3x \Rightarrow x^2-4x+3=0 \Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-12}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{4+2}{2}=3 \in (2,+\infty) \\ o \\ x=\frac{4-2}{2}=1 \notin (2,+\infty) \end{cases}$$

Las gráficas de las funciones se cortan en $x = 0$ y en $x = 3$.
El área del recinto limitado por las funciones *f(x)* y *g(x)* será la suma del valor absoluto de dos integrales definidas: Una entre 0 y 2 de $f(x)-g(x)=\left(-x^2+3x\right)-\left(\frac{x}{2}\right)$ y otra entre 2 y 3 de $f(x)-g(x)=\left(-x^2+3x\right)-\left(3-x\right)$.

Calculamos el valor de esas dos integrales definidas.

$$\int_0^2 f(x)-g(x)\,dx=\int_0^2 -x^2+3x-\frac{x}{2}\,dx=\int_0^2 -x^2+\frac{5x}{2}\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{4}\right]_0^2=$$

$$=\left[-\frac{2^3}{3}+\frac{5\cdot 2^2}{4}\right]-\left[-\frac{0^3}{3}+\frac{5\cdot 0^2}{4}\right]=-\frac{8}{3}+5=\boxed{\frac{7}{3}}$$

$$\int_2^3 f(x)-g(x)\,dx=\int_2^3 -x^2+3x-(3-x)\,dx=\int_2^3 -x^2+4x-3dx=\left[-\frac{x^3}{3}+2x^2-3x\right]_2^3=$$

$$=\left[-\frac{3^3}{3}+2\cdot 3^2-3\cdot 3\right]-\left[-\frac{2^3}{3}+2\cdot 2^2-3\cdot 2\right]=-9+18-9+\frac{8}{3}-8+6=\boxed{\frac{2}{3}}$$

El área del recinto es la suma de estos dos valores → $\frac{7}{3}+\frac{2}{3}=\frac{9}{3}=3$ u^2.

No pide dibujarlo pero lo hacemos para comprobar la bondad de la solución obtenida.