Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2017/2018 IKASTURTEA

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

Realiza una de las opciones A o B

OPCIÓN A

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases}(a-3)x+(a-2)y+2z=-1\\(2a-6)x+(3a-6)y+5z=-1\\(3-a)x+(a-2)z=a^2-4a+5\end{cases}$$ (3 puntos)

A2) Halla el simétrico del punto $P\equiv(2,5,2)$ respecto de la recta

$$r\equiv\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}$$ (2 puntos)

A3) Demuestra que existe $\alpha\in(0,2)$ tal que $f\,'(\alpha)=1$, siendo

$$f(x)=\sin\left(\frac{\pi+\pi x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\ln\left(2e^x+2x-x^2\right)$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (2 puntos)

A4) La gráfica de la función $f(x)=\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ divide al cuadrado de centro (0, 0) y lado 2 en tres regiones. Calcula el área de cada una de esas tres regiones. (3 puntos)

OPCIÓN B

B1) Calcula el valor del parámetro t para que se cumpla la igualdad $\left|A^{-1}\right|=-1$, siendo A la siguiente matriz:

$$A=\begin{pmatrix} t & 2 & t+2 \\ -t & t & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2 puntos)

B2) Halla la ecuación continua de la recta que corta perpendicularmente a las rectas

$$r\equiv\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ 2x+z-5=0 \end{cases} \quad y \quad s\equiv\frac{x-2}{-2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-1}{1}$$

(3 puntos)

B3) Calcular las siguientes integrales indefinidas:

$$\int\frac{x+1}{x^2+3x-4}\,dx$$ (1 punto)

$$\int\frac{e^x}{1+2e^x+e^{2x}}\,dx$$ (1 punto)

B4) Halla los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función

$$f(x)=x^4-x^2$$ (3 puntos)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

A1**)** Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real *a* y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases}(a-3)x+(a-2)y+2z=-1\\(2a-6)x+(3a-6)y+5z=-1\\(3-a)x+(a-2)z=a^2-4a+5\end{cases}$$

(3 puntos)

Aplicamos el método de Gauss.

$$\begin{cases}(a-3)x+(a-2)y+2z=-1\\2(a-3)x+3(a-2)y+5z=-1\\-(a-3)x+(a-2)z=a^2-4a+5\end{cases} \Rightarrow A/B=\left(\begin{array}{ccc|c}a-3 & a-2 & 2 & -1\\2(a-3) & 3(a-2) & 5 & -1\\-(a-3) & 0 & a-2 & a^2-4a+5\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc}\text{Fila } 3^a+\text{Fila } 1^a & & & \\-(a-3) & 0 & a-2 & a^2-4a+5\\a-3 & a-2 & 2 & -1\\\hline 0 & a-2 & a & a^2-4a+4\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{cccc}\text{Fila } 2^a-2\cdot\text{Fila } 1^a & & & \\2(a-3) & 3(a-2) & 5 & -1\\-2(a-3) & -2(a-2) & -4 & 2\\\hline 0 & a-2 & 1 & 1\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}a-3 & a-2 & 2 & -1\\0 & a-2 & 1 & 1\\0 & a-2 & a & a^2-4a+4\end{array}\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc}\text{Fila } 3^a-\text{Fila } 2^a & & & \\0 & a-2 & a & a^2-4a+4\\0 & -a+2 & -1 & -1\\\hline 0 & 0 & a-1 & a^2-4a+3\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}a-3 & a-2 & 2 & -1\\0 & a-2 & 1 & 1\\0 & 0 & a-1 & a^2-4a+3\end{array}\right)$$

Nos planteamos cuatro situaciones diferentes que estudiamos por separado según sea cada elemento de la diagonal principal nulo o todos no nulos.

CASO 1. $a\neq 1, a\neq 2, a\neq 3$

En este caso todos los elementos de la diagonal principal son no nulos y el sistema se puede resolver obteniendo una única solución. El sistema es compatible determinado.

Lo resolvemos a partir de la matriz equivalente a la ampliada obtenida con el método de Gauss y teniendo en cuenta que $a-1\neq 0;\ a-2\neq 0;\ a-3\neq 0$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a-3 & a-2 & 2 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & a^2-4a+3 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} (a-3)x+(a-2)y+2z=-1 \\ (a-2)y+z=1 \\ (a-1)z=a^2-4a+3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} (a-3)x+(a-2)y+2z=-1 \\ (a-2)y+z=1 \\ \boxed{z=\dfrac{a^2-4a+3}{a-1}=\dfrac{\cancel{(a-1)}(a-3)}{\cancel{a-1}}=a-3} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} (a-3)x+(a-2)y+2(a-3)=-1 \\ (a-2)y+a-3=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} (a-3)x+(a-2)y=-2a+5 \\ (a-2)y=4-a \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} (a-3)x+(a-2)y=-2a+5 \\ \boxed{y=\dfrac{4-a}{a-2}} \end{array}\right\} \Rightarrow (a-3)x+\cancel{(a-2)}\frac{4-a}{\cancel{a-2}}=-2a+5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a-3)x+4-a=-2a+5 \Rightarrow (a-3)x=1-a \Rightarrow \boxed{x=\frac{1-a}{a-3}}$$

La solución es $x=\dfrac{1-a}{a-3}$; $y=\dfrac{4-a}{a-2}$; $z=a-3$

CASO 2. $a=1$

En este caso la matriz ampliada equivalente obtenida por el método de Gauss queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-3 & 1-2 & 2 & -1 \\ 0 & 1-2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-1 & 1^2-4+3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema es compatible indeterminado. Lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{r} -2x-y+2z=-1 \\ -y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -2x-y+2z=-1 \\ \boxed{z=1+y} \end{array}\right\} \Rightarrow -2x-y+2(1+y)=-1 \Rightarrow -2x-y+2+2y=-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x=-3-y \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}}$$

Las soluciones son: $x=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}t;\ \ y=t;\ \ \ z=1+t$ con $t\in\mathbb{R}$

CASO 3. $a=2$

En este caso la matriz ampliada equivalente obtenida por el método de Gauss queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-3 & 2-2 & 2 & -1 \\ 0 & 2-2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-1 & 2^2-8+3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \\ 0 \quad 0 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad -2 \to \text{Nueva fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

El sistema es incompatible.

CASO 4. $a=3$

En este caso la matriz ampliada equivalente obtenida por el método de Gauss queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3-3 & 3-2 & 2 & -1 \\ 0 & 3-2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3-1 & 3^2-12+3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ 0 \quad -1 \quad -2 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad -1 \quad 2 \to \text{Nueva fila } 2^a \end{array}\right\} \Rightarrow$$

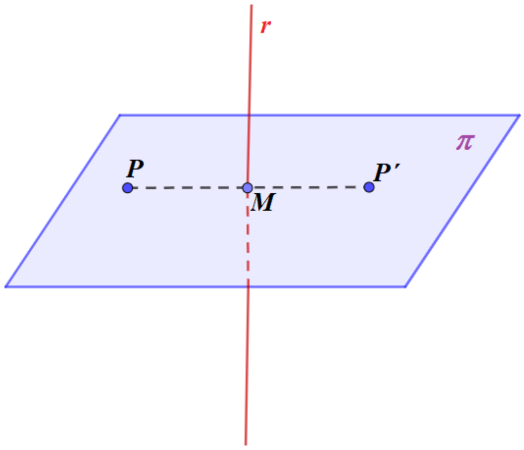
$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad -2 \quad 4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 4 \to \text{Nueva fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

El sistema es incompatible.

A2) Halla el simétrico del punto $P \equiv (2,5,2)$ respecto de la recta

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$$ (2 puntos)

Vamos a determinar las coordenadas del punto P´ simétrico de P respecto de la recta *r* calculando previamente el plano π perpendicular a la recta, después el punto M de corte de recta y plano. Por último, hallamos el punto P´ sumándole al punto M el vector $\overrightarrow{PM}$ ya que M es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$.



Hallamos la ecuación del plano π. Su vector normal es el vector director de la recta.

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2} \Rightarrow \vec{v_r} = (2,-1,2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v_r} = (2,-1,2) \\ P(2,5,2) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \pi \equiv 2x - y + 2z + D = 0 \\ P(2,5,2) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow 4-5+4+D=0 \Rightarrow D=-3$$

$$\boxed{\pi \equiv 2x - y + 2z - 3 = 0}$$

Hallamos el punto M de corte de recta y plano.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 2x - y + 2z - 3 = 0 \\ r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \pi \equiv 2x - y + 2z - 3 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = -1+2\lambda \\ y = 2-\lambda \\ z = -1+2\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(-1+2\lambda) - (2-\lambda) + 2(-1+2\lambda) - 3 = 0 \Rightarrow -2+4\lambda-2+\lambda-2+4\lambda-3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9\lambda = 9 \Rightarrow \lambda = \frac{9}{9} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -1+2 = 1 \\ y = 2-1 = 1 \\ z = -1+2 = 1 \end{cases} \Rightarrow M(1,1,1)$$

Hallamos las coordenadas del punto P´.

$$\overrightarrow{PM} = (1,1,1) - (2,5,2) = (-1,-4,-1)$$

$$P' = M + \overrightarrow{PM} = (1,1,1) + (-1,-4,-1) = (0,-3,0)$$

El punto simétrico de P respecto de la recta *r* tiene coordenadas P ´(0, –3, 0).

A3) Demuestra que existe $\alpha \in (0,2)$ tal que $f'(\alpha)=1$, siendo

$$f(x)=\sin\left(\frac{\pi+\pi x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\ln\left(2e^x+2x-x^2\right)$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (2 puntos)

Por la fórmula del seno de la suma de dos ángulos:

$$\sin\left(\frac{\pi+\pi x}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi x}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

Por tanto:

$$f(x)=\sin\left(\frac{\pi+\pi x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\ln\left(2e^x+2x-x^2\right)=\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\ln\left(2e^x+2x-x^2\right)$$

Derivamos la función:

$$f(x)=\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\ln\left(2e^x+2x-x^2\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=2\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\left(-sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\ln\left(2e^x+2x-x^2\right)+\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\frac{2e^x+2-2x}{2e^x+2x-x^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=-\pi\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\ln\left(2e^x+2x-x^2\right)+\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\frac{2e^x+2-2x}{2e^x+2x-x^2}$$

Comprobamos que la derivada existe en el intervalo [0, 2] y para ello debe existir el $\ln\left(2e^x+2x-x^2\right)$ y la expresión $2e^x+2x-x^2$ debe ser positiva.

$$Si\ x\in[0,2]\Rightarrow e^x>0\Rightarrow 2e^x>0\Rightarrow 2x-x^2+2e^x>2x-x^2\Rightarrow 2x-x^2+2e^x>x(2-x)$$

Como $x(2-x)$ es positivo en el intervalo (0,2) y nulo en los extremos de ese intervalo, $2x-x^2+2e^x$ es positivo en [0,2].

Por tanto, la función *f(x)* y *f ´(x)* existe en el intervalo [0, 2]

Comprobamos que se cumplen las exigencias del teorema de Lagrange:

1. *f* es continua en [0,2] pues es producto de funciones continuas.
2. *f* es derivable en (0,2). Lo hemos comprobado calculando su derivada.

Aplicamos el teorema de Lagrange en el intervalo cerrado [0,2] y existe α en el intervalo abierto (0,2) tal que $f'(\alpha)=\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}$.

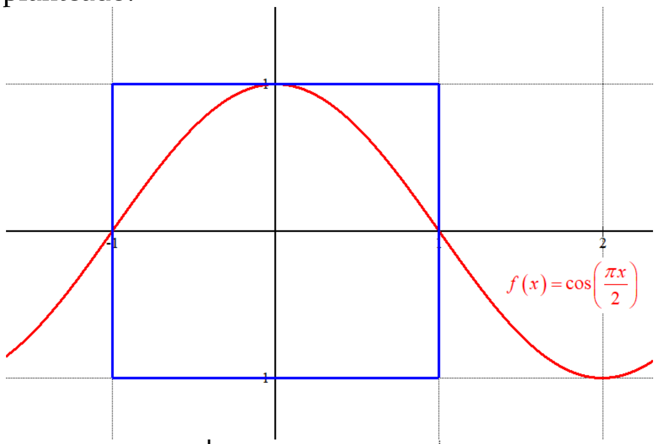
$$f'(\alpha)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{\cos^2\left(\frac{2\pi}{2}\right)\cdot\ln\left(2e^2+4-2^2\right)-\cos^2\left(\frac{0}{2}\right)\cdot\ln\left(2e^0+0-0^2\right)}{2}\Rightarrow$$

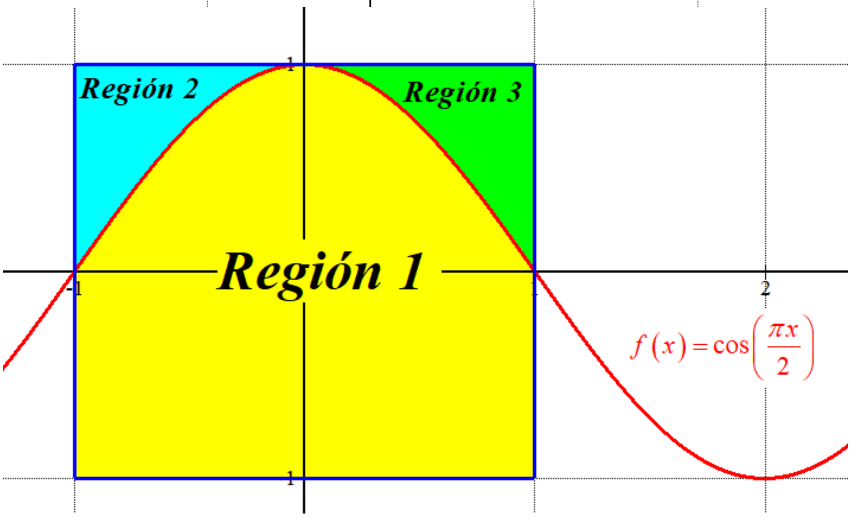
$$f'(\alpha)=\frac{\cos^2(\pi)\cdot\ln\left(2e^2\right)-\cos^2(0)\cdot\ln(2)}{2}=\frac{\ln\left(2e^2\right)-\ln(2)}{2}=\frac{\ln\left(\frac{2e^2}{2}\right)}{2}\Rightarrow$$

$$f'(\alpha)=\frac{\ln\left(e^2\right)}{2}=\frac{2}{2}=1$$

A4) La gráfica de la función $f(x)=\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ divide al cuadrado de centro (0, 0) y lado 2 en tres regiones. Calcula el área de cada una de esas tres regiones. (3 puntos)

Dibujamos el recinto planteado.





Observamos que la región 2 y 3 son simétricas y por tanto tienen el mismo valor de área.
El área del cuadrado es 4 unidades cuadradas.
Por lo tanto, basta hallar el área del recinto azul para determinar el área del resto.

El área del recinto azul (Región 2) se calcula con una integral definida entre –1 y 0 de la diferencia de la función *y = 1* y la función $f(x)=\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.

$$\text{Área Región 2} = \int_{-1}^{0} 1-\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx = \left[x-\frac{2}{\pi}sen\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]_{-1}^{0} =$$

$$=\left[0-\frac{2}{\pi}sen\left(\frac{0}{2}\right)\right]-\left[-1-\frac{2}{\pi}sen\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right]=1+\frac{2}{\pi}(-1)=\boxed{1-\frac{2}{\pi}u^2}$$

Área región 3 = Área región 2 = $1-\frac{2}{\pi}u^2$

Área región 1 = 4 – Área región 2 – Área región 3 $=4-2\left(1-\frac{2}{\pi}\right)=4-2+\frac{4}{\pi}=2+\frac{4}{\pi}u^2$

OPCIÓN B

B1) Calcula el valor del parámetro t para que se cumpla la igualdad $\left|A^{-1}\right| = -1$, siendo A la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} t & 2 & t+2 \\ -t & t & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(2 puntos)}$$

Utilizamos la propiedad de los determinantes que dice $\left|A^{-1}\right| = \dfrac{1}{|A|}$

Se puede demostrar esta propiedad utilizando que el determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de las matrices.

$$A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow \left|A \cdot A^{-1}\right| = |I| \Rightarrow |A| \cdot \left|A^{-1}\right| = 1 \Rightarrow |A| = \frac{1}{\left|A^{-1}\right|} = \frac{1}{-1} = -1$$

La condición dada en el ejercicio se convierte en que $|A| = -1$.

Averiguamos cuando se cumple esta condición.

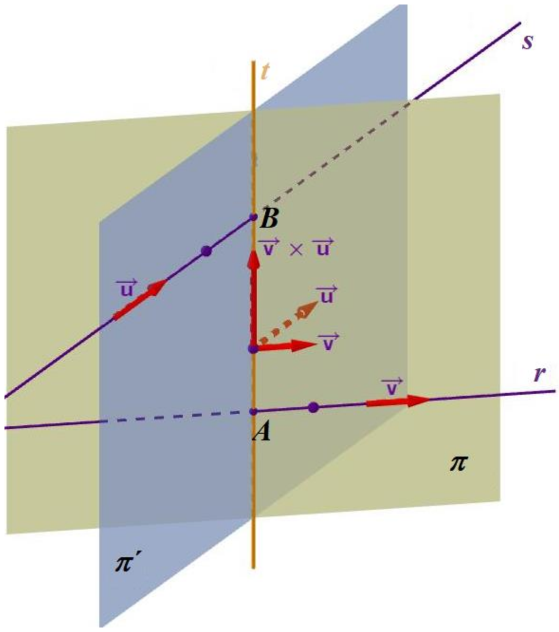
$$\left.\begin{array}{r} |A| = \begin{vmatrix} t & 2 & t+2 \\ -t & t & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2t^2 - t^2 - 2t + 4t = t^2 + 2t \\ |A| = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow t^2 + 2t = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 + 2t + 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Se cumple cuando $t = -1$.

B2) Halla la ecuación continua de la recta que corta perpendicularmente a las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z-3=0 \\ 2x+z-5=0 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x-2}{-2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{1}$$ (3 puntos)



Obtenemos las ecuaciones paramétricas y hallamos un punto y un vector director de cada una de las rectas.

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z-3=0 \\ 2x+z-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z-3=0 \\ z=5-2x \end{cases} \Rightarrow x+y+5-2x-3=0 \Rightarrow y=-2+x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\beta \\ y=-2+\beta \\ z=5-2\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(1,1,-2) \\ P_r(0,-2,5) \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x-2}{-2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=2-2\alpha \\ y=-3+\alpha \\ z=1+\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_s}=(-2,1,1) \\ Q_s(2,-3,1) \end{cases}$$

El producto vectorial de los vectores directores $\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{u_s}$ está en la dirección de la recta buscada.

$$\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = i+4j+k+2k-j+2i = 3i+3j+3k = (3,3,3)$$

Hallamos la recta t perpendicular común a las dos rectas como la intersección del plano π que tiene como vector director el producto vectorial $\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{u_s}$ y que contiene a la recta r con el plano π´ que tiene como vector director el producto vectorial $\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{u_s}$ y que contiene a la recta s.

Ecuación del plano π.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_r}\times\overrightarrow{u_s}=(3,3,3)\\ \overrightarrow{v_r}=(1,1,-2)\\ P_r(0,-2,5)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix}x & y+2 & z-5\\ 3 & 3 & 3\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6x+3y+6+\cancel{3z}-\cancel{15}-\cancel{3z}+\cancel{15}+6y+12-3x=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow -9x+9y+18=0\Rightarrow \boxed{\pi\equiv x-y-2=0}$$

Ecuación del plano π´.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_r}\times\overrightarrow{u_s}=(3,3,3)\\ \overrightarrow{u_s}=(-2,1,1)\\ Q_s(2,-3,1)\in\pi´\end{array}\right\}\Rightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix}x-2 & y+3 & z-1\\ 3 & 3 & 3\\ -2 & 1 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{3x}-6-6y-18+3z-3+6z-\cancel{6}-3y-9-\cancel{3x}+\cancel{6}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -9y+9z-36=0\Rightarrow\Rightarrow \boxed{\pi´\equiv y-z+4=0}$$

Ecuación de la recta *t*.

$$\boxed{t\equiv\begin{cases}x-y-2=0\\ y-z+4=0\end{cases}}$$

B3) Calcular las siguientes integrales indefinidas:

$$\int \frac{x+1}{x^2+3x-4}\,dx \qquad \text{(1 punto)}$$

$$\int \frac{e^x}{1+2e^x+e^{2x}}\,dx \qquad \text{(1 punto)}$$

Para el cálculo de la primera integral realizamos una descomposición en fracciones simples del integrando.

$$x^2+3x-4=0 \Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4(-4)}}{2}=\frac{-3\pm 5}{2}=\begin{cases}\frac{-3+5}{2}=1\\ \frac{-3-5}{2}=-4\end{cases} \Rightarrow x^2+3x-4=(x-1)(x+4)$$

$$\frac{x+1}{x^2+3x-4}=\frac{x+1}{(x-1)(x+4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+4}$$

$$\frac{x+1}{(x-1)(x+4)}=\frac{A(x+4)+B(x-1)}{(x-1)(x+4)} \Rightarrow x+1=A(x+4)+B(x-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \rightarrow 1+1=A(1+4)+B(1-1) \rightarrow 2=5A \rightarrow A=\frac{2}{5} \\ x=-4 \rightarrow -4+1=A(-4+4)+B(-4-1) \rightarrow -3=-5B \rightarrow B=\frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{x^2+3x-4}=\frac{2/5}{x-1}+\frac{3/5}{x+4}$$

Aplicamos lo obtenido al cálculo de la primera integral.

$$\int \frac{x+1}{x^2+3x-4}\,dx=\int \frac{2/5}{x-1}+\frac{3/5}{x+4}\,dx=\int \frac{2/5}{x-1}\,dx+\int \frac{3/5}{x+4}\,dx=\frac{2}{5}\int \frac{1}{x-1}\,dx+\frac{3}{5}\int \frac{1}{x+4}\,dx=$$

$$=\boxed{\frac{2}{5}\ln|x-1|+\frac{3}{5}\ln|x+4|+K}$$

Calculamos la segunda integral.

$$\int \frac{e^x}{1+2e^x+e^{2x}}\,dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ e^x=t \rightarrow e^x dx=dt\\ dx=\frac{1}{e^x}dt\end{array}\right\}=\int \frac{\cancel{e^x}}{1+2t+t^2}\frac{1}{\cancel{e^x}}\,dt=\int \frac{1}{1+2t+t^2}\,dt=$$

$$=\int \frac{1}{(1+t)^2}\,dt=\int (1+t)^{-2}\,dt=\frac{(1+t)^{-1}}{-1}=-\frac{1}{1+t}=\boxed{-\frac{1}{1+e^x}+K}$$

B4) Halla los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función

$$f(x) = x^4 - x^2 \qquad \text{(3 puntos)}$$

Obtenemos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = x^4 - x^2 \Rightarrow f\,'(x) = 4x^3 - 2x$$

$$f\,'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 2x = 0 \Rightarrow 2x\left(2x^2 - 1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ o \\ 2x^2 - 1 = 0 \to x^2 = \dfrac{1}{2} \to x = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores críticos obtenidos.

- En $\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f\,'(-1) = 4(-1)^3 - 2(-1) = -2 < 0$.

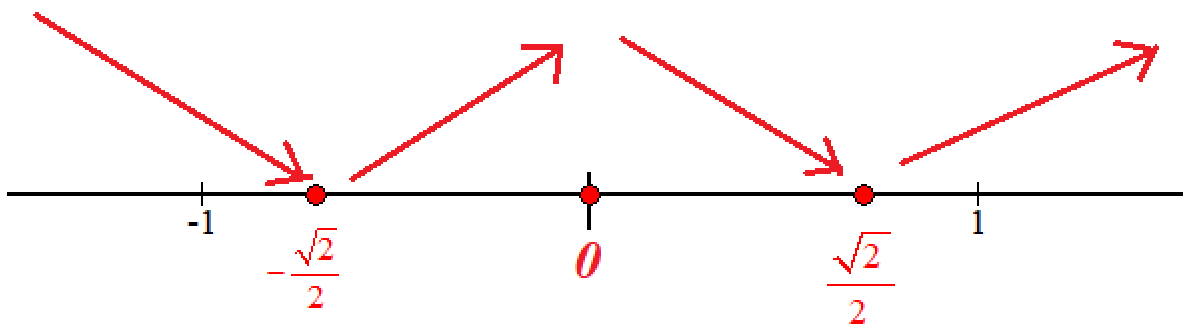
  La función decrece en $\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
- En $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ tomamos $x = -0.1$ y la derivada vale

  $f\,'(-0.1) = 4(-0.1)^3 - 2(-0.1) = 0.196 > 0$. La función crece en $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$
- En $\left(0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ tomamos $x = 0.1$ y la derivada vale

  $f\,'(0.1) = 4(0.1)^3 - 2(0.1) = -0.196 < 0$. La función decrece en $\left(0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$
- En $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f\,'(1) = 4(1)^3 - 2 = 2 > 0$. La función

  crece en $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$

La función sigue el esquema siguiente.



La función presenta un mínimo relativo en $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ y otro en $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ y un máximo relativo en $x=0$. Como $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$,
$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$, y $f(0)=0^4-0^2=0$ los mínimos relativos tienen coordenadas $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{4}\right)$ y el máximo relativo está en (0, 0).

Para hallar los puntos de inflexión utilizamos la segunda derivada

$$f\,'(x)=4x^3-2x \Rightarrow f\,''(x)=12x^2-2$$

$$f\,''(x)=0 \Rightarrow 12x^2-2=0 \Rightarrow x=\sqrt{\frac{2}{12}}=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$$

Comprobamos que la derivada tercera no se anula en estos valores.

$$f\,''(x)=12x^2-2 \Rightarrow f\,'''(x)=24x \Rightarrow \begin{cases} f\,'''\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=-\frac{24}{\sqrt{6}}\neq 0 \\ f\,'''\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=\frac{24}{\sqrt{6}}\neq 0 \end{cases}$$

La función presenta puntos de inflexión en $x=\frac{-1}{\sqrt{6}}$ y en $x=\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Como $f\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}\right)=\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}\right)^4-\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}\right)^2=\frac{1}{36}-\frac{1}{6}=-\frac{5}{36}$, $f\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^4-\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2=-\frac{5}{36}$, las coordenadas de los puntos de inflexión son $\left(\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{-5}{36}\right)$ y $\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-5}{36}\right)$.