Universidades Públicas de Andalucía

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA
PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
CURSO 2016-2017

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Instrucciones:	**a)** Duración: 1 hora y 30 minutos **b)** Elija una de las dos opciones propuestas y conteste los ejercicios de la opción elegida. **c)** En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima que le corresponde. **d)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. **e)** Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma. Justifique las respuestas.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

a) **(1.5 puntos)** Justifique cuáles de las siguientes operaciones pueden realizarse y, en tal caso, calcule el resultado:

$$A^2 \qquad A-B \qquad A\cdot B \qquad A\cdot B^t.$$

b) **(1 punto)** Halle la matriz X tal que $A^t + B\cdot X = 3B$.

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x)=x^3+ax^2+bx$

a) **(1 punto)** Halle a y b sabiendo que la función tiene un mínimo en el punto de abscisa $x = -1$ y un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = -2$.

b) **(1.5 puntos)** Para $a = 6$ y $b = 9$, halle los puntos de corte con los ejes, estudie la monotonía y extremos y esboce la gráfica de la función.

EJERCICIO 3

Supongamos que el 20% de los votantes de Trump apoya la construcción del muro en la frontera con México y que solo el 5 % de los que no lo votaron la apoya. En un grupo formado por 5000 votantes de Trump y 10000 estadounidenses que no lo votaron se elige una persona al azar.

a) **(1 punto)** ¿Cuál es la probabilidad de que ésta apoye la construcción del muro?

b) **(0.75 puntos)** Si la persona elegida apoya la construcción del muro, ¿cuál es la probabilidad de que no haya votado a Trump?

c) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que sea votante de Trump o apoye la construcción del muro.

EJERCICIO 4

El tiempo de vida de una determinada especie de tortuga es una variable aleatoria que sigue una ley Normal de desviación típica 10 años. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 tortugas y se obtienen los siguientes valores:

46 38 59 29 34 32 38 21 44 34

a) **(1.5 puntos)** Determine un intervalo de confianza, al 95 %, para la vida media de dicha especie de tortugas.

b) **(1 punto)** Calcule el tamaño mínimo que debe tener una muestra para que el error de estimación de la vida media no sea superior a 5 años, con un nivel de confianza del 98 %.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

a) **(0.8 puntos)** Represente el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$x+y\le 3 \qquad 2x+y\ge 4 \qquad y\ge -1$$

b) **(0.25 puntos)** Razone si el punto (2, 1) pertenece al recinto anterior.

c) **(1.2 puntos)** Obtenga los vértices del recinto y los valores mínimo y máximo de la función $F(x,y)=5x+4y$ en ese recinto, indicando en qué puntos se alcanzan.

d) **(0.25 puntos)** Razone si la función *F* puede alcanzar el valor 9 en el recinto anterior.

EJERCICIO 2

Se consideran las siguientes funciones $f\left(x\right)=\dfrac{5x-16}{x}$ y $g\left(x\right)=x^2$.

a) **(1 punto)** Determine la abscisa del punto donde se verifique que $f\,'(x)=g\,'(x)$.

b) **(1.5 puntos)** Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de cada función en el punto de abscisa x = 2 y determine el punto de corte de ambas rectas tangentes, si existe.

EJERCICIO 3

Una urna contiene 5 bolas rojas y 3 verdes. Se extrae una bola y se reemplaza por 2 bolas del otro color. A continuación, se extrae una segunda bola.

a) **(1.25 puntos)** Calcule la probabilidad de que la segunda bola extraída sea verde.

b) **(1.25 puntos)** Halle la probabilidad de que la primera haya sido roja, sabiendo que la segunda también ha sido roja.

EJERCICIO 4

En una muestra, elegida al azar, de 100 estudiantes de una Universidad, se ha observado que 25 desayunan en la cafetería del campus.

a) **(1.25 puntos)** Determine, con un nivel de confianza del 95 %, un intervalo de confianza para estimar la proporción de estudiantes de esa Universidad que desayunan en la cafetería.

b) **(1.25 puntos)** Si la proporción de estudiantes de esa Universidad que desayunan en la cafetería del campus en una muestra aleatoria es de 0.2, y el error cometido en la estimación ha sido inferior a 0.03, con un nivel de confianza del 92.5 % calcule el tamaño mínimo de la muestra.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

a) **(1.5 puntos)** Justifique cuáles de las siguientes operaciones pueden realizarse y, en tal caso, calcule el resultado:

$$A^2 \qquad A-B \qquad A\cdot B \qquad A\cdot B^t.$$

b) **(1 punto)** Halle la matriz X tal que $A^t+B\cdot X=3B$.

a)

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$2\times\boxed{3 \cdot 2}\times 3 \qquad \text{¡No es posible!}$$

A^2 no es posible pues no coincide el nº de columnas (3) del primer factor del producto (A) con el nº de filas (2) del segundo factor del producto (A).

$$A-B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\text{¡No es posible!}$$

$$2\times 3 \quad - \quad 3\times 2$$

A – B no es posible pues A y B no son matrices de la misma dimensión.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+0+1 & 1+0+1\\ 0+1+1 & 0+0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$2\times\boxed{3 \cdot 3}\times 2\longrightarrow 2\times 2$$

$A\cdot B$ si es posible pues coincide el nº de columnas (3) del primer factor del producto (A) con el nº de filas (3) del segundo factor del producto (B).

$$A\cdot B^t=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\text{¡No es posible!}$$

$$2\times\boxed{3 \cdot 2}\times 3$$

$A\cdot B^t$ no es posible pues no coincide el nº de columnas (3) del primer factor del producto (A) con el nº de filas (2) del segundo factor del producto (B^t).

b) Despejamos X en la ecuación matricial $A^t+B\cdot X=3B$.

$$A^t+B\cdot X=3B\Rightarrow B\cdot X=3B-A^t\Rightarrow X=B^{-1}\left(3B-A^t\right)$$

Determinamos la expresión de B^{-1} y de A^t.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}$$

$B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\1&1\end{pmatrix}$ no es cuadrada y no podemos calcular su inversa y no podemos resolver el problema con este procedimiento.

Procedemos de otra manera.

Averiguamos la dimensión de la matriz X.
Supongamos que la matriz X tiene dimensión *m x n*.

$$A^t+B\cdot X=3B\Rightarrow B\cdot X=3B-A^t$$

$$3\times\boxed{2\cdot m}\times n\longrightarrow 3\times n$$

Para que sea posible el producto $B\cdot X$ el valor de m debe ser 2.

Como $3B-A^t=3\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&3\\3&-1\\2&2\end{pmatrix}$ tiene dimensión 3x2 y la matriz $B\cdot X$ tiene dimensión *3xn* el valor de *n* debe ser 2.

La matriz X debe tener dimensión 2x2.

Supongamos $X=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ debe cumplirse que $B\cdot X=3B-A^t$.

$$B\cdot X=3B-A^t\Rightarrow\begin{pmatrix}0&1\\1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&3\\3&-1\\2&2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0+c&0+d\\a+0&b+0\\a+c&b+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&3\\3&-1\\2&2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}c=-1\\d=3\\a=3\\b=-1\\a+c=2\to 3+(-1)=2 \text{ ¡Se cumple!}\\b+d=2\to -1+3=2 \text{ ¡Se cumple!}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\b=-1\\c=-1\\d=3\end{cases}\Rightarrow\boxed{X=\begin{pmatrix}3&-1\\-1&3\end{pmatrix}}$$

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x)=x^3+ax^2+bx$

a) **(1 punto)** Halle *a* y *b* sabiendo que la función tiene un mínimo en el punto de abscisa *x* = –1 y un punto de inflexión en el punto de abscisa *x* = –2.

b) **(1.5 puntos)** Para *a* = 6 y *b* = 9, halle los puntos de corte con los ejes, estudie la monotonía y extremos y esboce la gráfica de la función.

a) Para que la función tenga un mínimo en *x = –1* debe anularse la derivada primera.

$$f(x)=x^3+ax^2+bx \Rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b$$
$$f'(-1)=0 \Rightarrow 3(-1)^2+2a(-1)+b=0 \Rightarrow 3-2a+b=0 \Rightarrow \boxed{b=2a-3}$$

Para que la función tenga un punto de inflexión en *x = –2* debe anularse la segunda derivada.

$$f'(x)=3x^2+2ax+b \Rightarrow f''(x)=6x+2a$$
$$f''(-2)=0 \Rightarrow 6(-2)+2a=0 \Rightarrow 2a=12 \Rightarrow \boxed{a=6}$$

Sustituimos en la primera igualdad obtenida.

$$\left.\begin{array}{l} b=2a-3 \\ a=6 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{b=12-3=9}$$

Los valores buscados son *a = 6* y *b = 9*.

b) Para *a* = 6 y *b* = 9 la función es $f(x)=x^3+6x^2+9x$.

Puntos de corte con los ejes.

Con eje OX. $x=0 \Rightarrow y=f(0)=0^3+6\cdot 0^2+9\cdot 0=0 \rightarrow A(0,0)$

Con eje OY. $y=0 \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow x^3+6x^2+9x=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x\left(x^2+6x+9\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow A(0,0) \\ x^2+6x+9=0 \Rightarrow x=\dfrac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot 1\cdot 9}}{2}=-3 \rightarrow B(-3,0) \end{cases}$$

Los puntos de corte con los ejes son A(0, 0) y B(–3, 0).

Monotonía.

Determinamos los puntos críticos de la función.

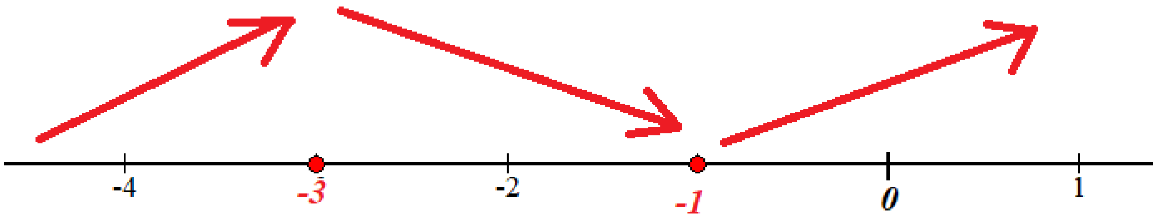
$$f(x)=x^3+6x^2+9x \Rightarrow f'(x)=3x^2+12x+9$$
$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2+12x+9=0 \Rightarrow x^2+4x+3=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 1\cdot 3}}{2}=\frac{-4\pm 2}{2}=\begin{cases} \dfrac{-4+2}{2}=-1 \\ \dfrac{-4-2}{2}=-3 \end{cases}$$

La función presenta dos puntos críticos: *x = –1* y *x = –3*.

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En $(-\infty,-3)$ tomamos $x = -10$ y la derivada vale
  $f'(10) = 3\cdot 10^2 + 12\cdot 10 + 9 = 429 > 0$. La función crece en $(-\infty,-3)$.
- En $(-3,-1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale
  $f'(-2) = 3(-2)^2 + 12(-2) + 9 = -3 < 0$. La función decrece en $(-3,-1)$.
- En $(-1,+\infty)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = 3\cdot 0^2 + 12\cdot 0 + 9 = 9 > 0$. La función crece en $(-1,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en $(-\infty,-3)\cup(-1,+\infty)$ y decrece en $(-3,-1)$.

Extremos.

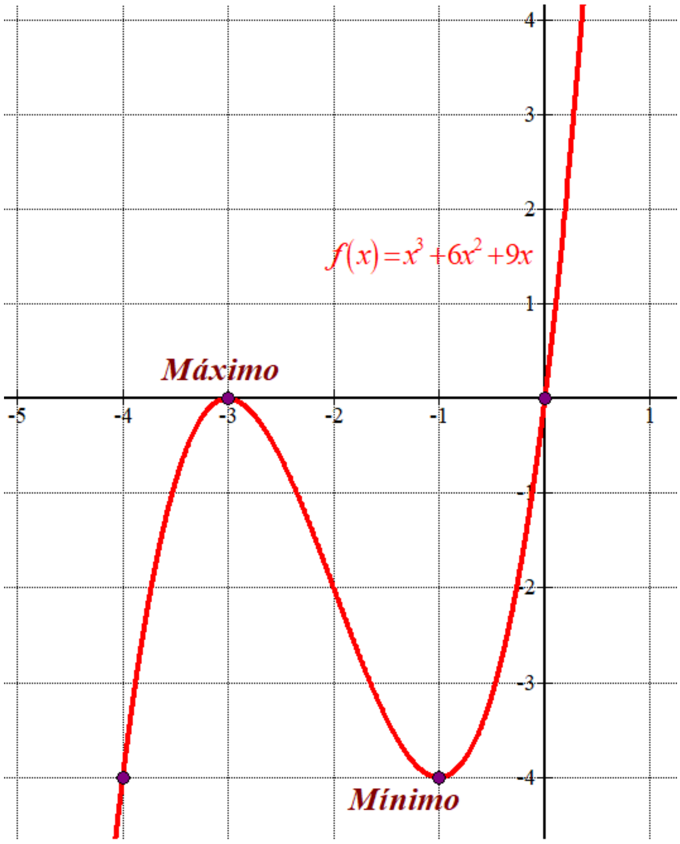
A la vista de la imagen superior podemos decir que la función tiene un máximo relativo en $x = -3$. Como $f(-3) = (-3)^3 + 6(-3)^2 + 9(-3) = 0$ el máximo relativo tiene coordenadas (–3, 0).

A la vista de la imagen superior podemos decir que la función tiene un mínimo relativo en $x = -1$. Como $f(-1) = (-1)^3 + 6(-1)^2 + 9(-1) = -4$ el máximo relativo tiene coordenadas (–1, –4).

Representación gráfica.

Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

x	$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$
-5	-20
-4	-4
-3	0 *Máximo*
-1	-4 *Mínimo*
0	0
1	16
2	50



EJERCICIO 3

Supongamos que el 20% de los votantes de Trump apoya la construcción del muro en la frontera con México y que solo el 5 % de los que no lo votaron la apoya. En un grupo formado por 5000 votantes de Trump y 10000 estadounidenses que no lo votaron se elige una persona al azar.

a) **(1 punto)** ¿Cuál es la probabilidad de que ésta apoye la construcción del muro?

b) **(0.75 puntos)** Si la persona elegida apoya la construcción del muro, ¿cuál es la probabilidad de que no haya votado a Trump?

c) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que sea votante de Trump o apoye la construcción del muro.

Realizamos una tabla de contingencia para obtener toda la información del ejercicio.

	Apoyan el muro (M)	No apoyan el muro ($\overline{M}$)	
Votan a Trump (T)	**20 % de 5000**		**5000**
No votan a Trump ($\overline{T}$)	**5 % de 10000**		**10000**

Completamos la tabla.

	Apoyan el muro (M)	No apoyan el muro ($\overline{M}$)	
Votan a Trump (T)	**1000**	**4000**	**5000**
No votan a Trump ($\overline{T}$)	**500**	**9500**	**10000**
	1500	**13500**	**15000**

Respondemos a las preguntas planteadas utilizando la regla de Laplace.

a) $$P(M)=\frac{\text{nº de personas que apoyan el muro}}{\text{nº total de personas}}=\frac{1500}{15000}=\boxed{\frac{1}{10}=0.10}$$

b) $$P\left(\overline{T}/M\right)=\frac{\text{nº de no votantes de Trump que apoyan el muro}}{\text{nº de personas que apoyan el muro}}=\frac{500}{1500}=\boxed{\frac{1}{3}\simeq 0.33}$$

c) Hay 1000 votantes de Trump que apoyan el muro, 4000 votantes de Trump que no apoyan el muro y 500 no votantes de Trump que apoyan el muro.

$$P(T\cup M)=\frac{\text{nº de votantes de Trump o apoyan el muro}}{\text{nº total de personas}}=\frac{1000+500+4000}{15000}=\frac{5500}{15000}=\boxed{\frac{11}{30}\simeq 0.36}$$

EJERCICIO 4

El tiempo de vida de una determinada especie de tortuga es una variable aleatoria que sigue una ley Normal de desviación típica 10 años. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 tortugas y se obtienen los siguientes valores:

46 38 59 29 34 32 38 21 44 34

a) **(1.5 puntos)** Determine un intervalo de confianza, al 95 %, para la vida media de dicha especie de tortugas.

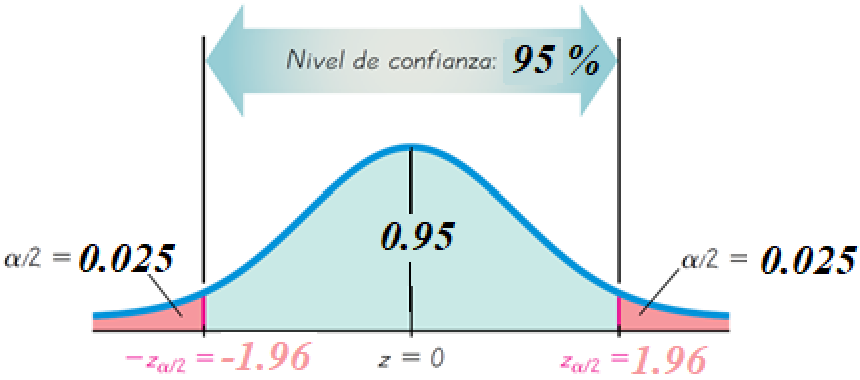
b) **(1 punto)** Calcule el tamaño mínimo que debe tener una muestra para que el error de estimación de la vida media no sea superior a 5 años, con un nivel de confianza del 98 %.

X = Tiempo de vida de una especie de tortuga en años.

X = N(μ, 10)

n = 10. $\bar{x} = \frac{46+38+59+29+34+32+38+21+44+34}{10} = 37.5 \text{ años}$

a) Determinamos $z_{\alpha/2}$ con un nivel de confianza del 95 %.



1 – ∝ = 0.95 → ∝ = 0.05 → ∝/2 = 0.025 → 1 – ∝/2 = 0.975 → $z_{\alpha/2}$ = **1.96**

Calculamos el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{10}{\sqrt{10}} \simeq 6.198$$

El intervalo de confianza para la media es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(37.5 - 6.198, \quad 37.5 + 6.198\right) = \left(31.302, 43.698\right)$$

b) ¿n?

Determinamos $z_{\alpha/2}$ con un nivel de confianza del 98 %.

1 – ∝ = 0.98 → ∝ = 0.02 → ∝/2 = 0.01 → 1 – ∝/2 = 0,99 → $z_{\alpha/2}$ = **2.33**

Igualamos el error del intervalo de confianza a 5.

$$Error = 5 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 5 \Rightarrow 2.33 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} = 5 \Rightarrow 2.33 \cdot 10 = 5\sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{10 \cdot 2.33}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \left(\frac{10 \cdot 2.33}{5} \right)^2 = 21.7156$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser entero y superior al hallado, es decir, de 22 tortugas.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

a) **(0.8 puntos)** Represente el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$x+y\leq 3 \qquad 2x+y\geq 4 \qquad y\geq -1$$

b) **(0.25 puntos)** Razone si el punto (2, 1) pertenece al recinto anterior.

c) **(1.2 puntos)** Obtenga los vértices del recinto y los valores mínimo y máximo de la función $F(x,y)=5x+4y$ en ese recinto, indicando en qué puntos se alcanzan.

d) **(0.25 puntos)** Razone si la función *F* puede alcanzar el valor 9 en el recinto anterior.

a) Representamos primero las rectas asociadas a las inecuaciones que delimitarán la región que queremos representar.

$x+y=3$

x	$y=3-x$
3	0
1	2

$2x+y=4$

x	$y=4-2x$
2	0
1	2

$y=-1$

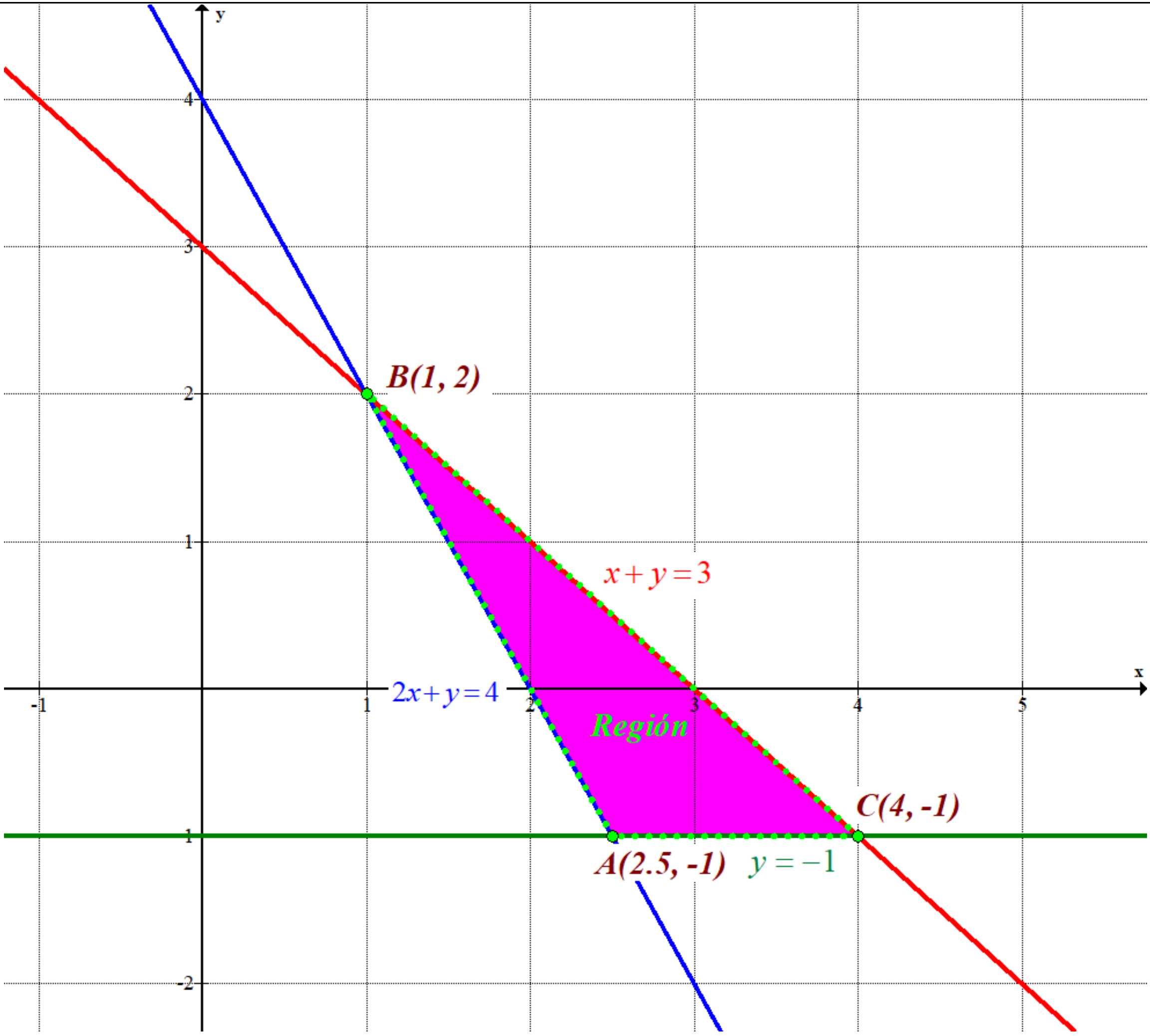
x	$y=-1$
0	-1
2	-1

Como las inecuaciones son $\{\ x+y\leq 3 \quad 2x+y\geq 4 \quad y\geq -1\ \}$ la región definida por ellas es la región del plano situada por debajo de la recta roja, y por encima de las rectas azul y verde.

Comprobamos que el punto P(2.5, 0) cumple las inecuaciones.

$$2.5+0\leq 3 \qquad 2\cdot 2.5+0\geq 4 \qquad 0\geq -1 \rightarrow \text{¡Se cumplen!}$$

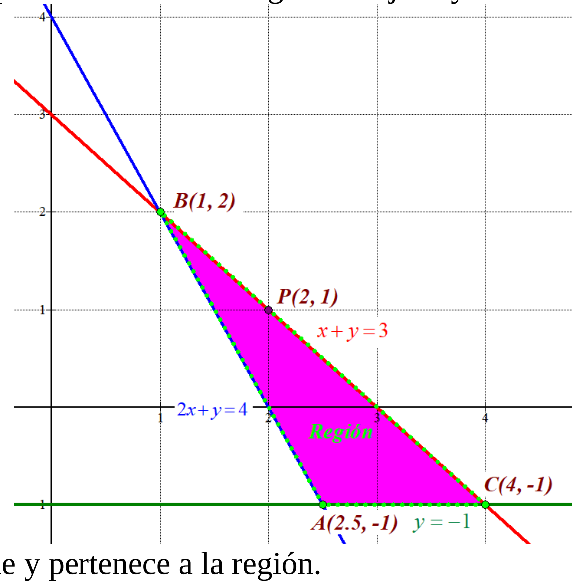
Coloreamos de rosa la región en el siguiente dibujo.



b) Comprobamos si el punto (2, 1) pertenece al recinto definido por las inecuaciones viendo si cumple dichas inecuaciones.

$$2+1\leq 3 \qquad 2\cdot 2+1\geq 4 \qquad 1\geq -1 \rightarrow \text{¡Se cumplen todas!}$$

También se puede comprobar si está en la región dibujada y coloreada de rosa.



El punto está en el borde y pertenece a la región.

c) Determinamos las coordenadas de los vértices resolviendo los sistemas de ecuaciones correspondientes.

A → $\left.\begin{array}{l} 2x+y=4 \\ y=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x-1=4 \Rightarrow 2x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{2}=2.5 \rightarrow \boxed{A(2.5,-1)}$

B → $\left.\begin{array}{l} x+y=3 \\ 2x+y=4 \end{array}\right\} \Rightarrow y=3-x \Rightarrow 2x+3-x=4 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=3-1=2 \rightarrow \boxed{B(1,2)}$

C → $\left.\begin{array}{l} x+y=3 \\ y=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow x-1=3 \Rightarrow x=4 \rightarrow \boxed{C(4,-1)}$

Valoramos la función $F(x,y)=5x+4y$ en cada uno de los vértices.

A(2.5, –1) → $F(2.5,-1)=5\cdot 2.5+4(-1)=\boxed{\underline{8.5}}$ ¡Mínimo!
B(1, 2) → $F(1,2)=5\cdot 1+4\cdot 2=\underline{13}$
C(4, –1) → $F(4,-1)=5\cdot 4+4(-1)=\boxed{\underline{16}}$ ¡Máximo!

El valor mínimo es 8.5 y se alcanza en el punto A(2.5, –1).
El valor máximo es 16 y se alcanza en el punto C(4, –1)

d) Lo alcanza, pues 9 es un valor comprendido entre el mínimo (8.5) y el máximo (16).

Si deseamos hallar un punto de la región donde se alcanza dicho valor.

$$\left.\begin{array}{l} F(x,y)=5x+4y \\ F(x,y)=9 \\ y=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow 5x-4=9 \Rightarrow 5x=13 \Rightarrow x=\frac{13}{5}=2.6$$

Se obtiene dicho valor (9) en varios puntos de la región, en particular en el punto (2.6, –1).

EJERCICIO 2

Se consideran las siguientes funciones $f(x)=\dfrac{5x-16}{x}$ y $g(x)=x^2$.

a) **(1 punto)** Determine la abscisa del punto donde se verifique que $f\,'(x)=g\,'(x)$.

b) **(1.5 puntos)** Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de cada función en el punto de abscisa $x = 2$ y determine el punto de corte de ambas rectas tangentes, si existe.

a)

$$\left.\begin{array}{l} f\,'(x)=\dfrac{5\cdot x-1\cdot(5x-16)}{x^2}=\dfrac{16}{x^2} \\ g\,'(x)=2x \\ f\,'(x)=g\,'(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{16}{x^2}=2x \Rightarrow 16=2x^3 \Rightarrow \frac{16}{2}=x^3 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt[3]{8}=2}$$

En $x = 2$ se cumple que $f\,'(x)=g\,'(x)$.

b) En $x = 2$ tenemos que $f\,'(2)=g\,'(2)=2\cdot 2=4$.

Obtenemos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f(x)* en $x = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=\dfrac{5\cdot 2-16}{2}=-3 \\ f\,'(2)=4 \\ y-f(2)=f\,'(2)(x-2) \end{array}\right\} \Rightarrow y-(-3)=4(x-2) \Rightarrow y+3=4x-8 \Rightarrow \boxed{y=4x-11}$$

Obtenemos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *g(x)* en $x = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} g(2)=2^2=4 \\ g\,'(2)=4 \\ y-g(2)=g\,'(2)(x-2) \end{array}\right\} \Rightarrow y-4=4(x-2) \Rightarrow y-4=4x-8 \Rightarrow \boxed{y=4x-4}$$

Estas rectas no se cortan pues tienen la misma pendiente: $f\,'(2)=g\,'(2)=4$ y por tanto son paralelas.
De todas formas, planteamos el sistema formado por sus ecuaciones e intentamos resolverlo.

$$\left.\begin{array}{l} y=4x-11 \\ y=4x-4 \end{array}\right\} \Rightarrow 4x-11=4x-4 \Rightarrow \text{¡¡}-7=0\text{!! ¡Imposible!}$$

Las rectas tangentes no se cortan en ningún punto.

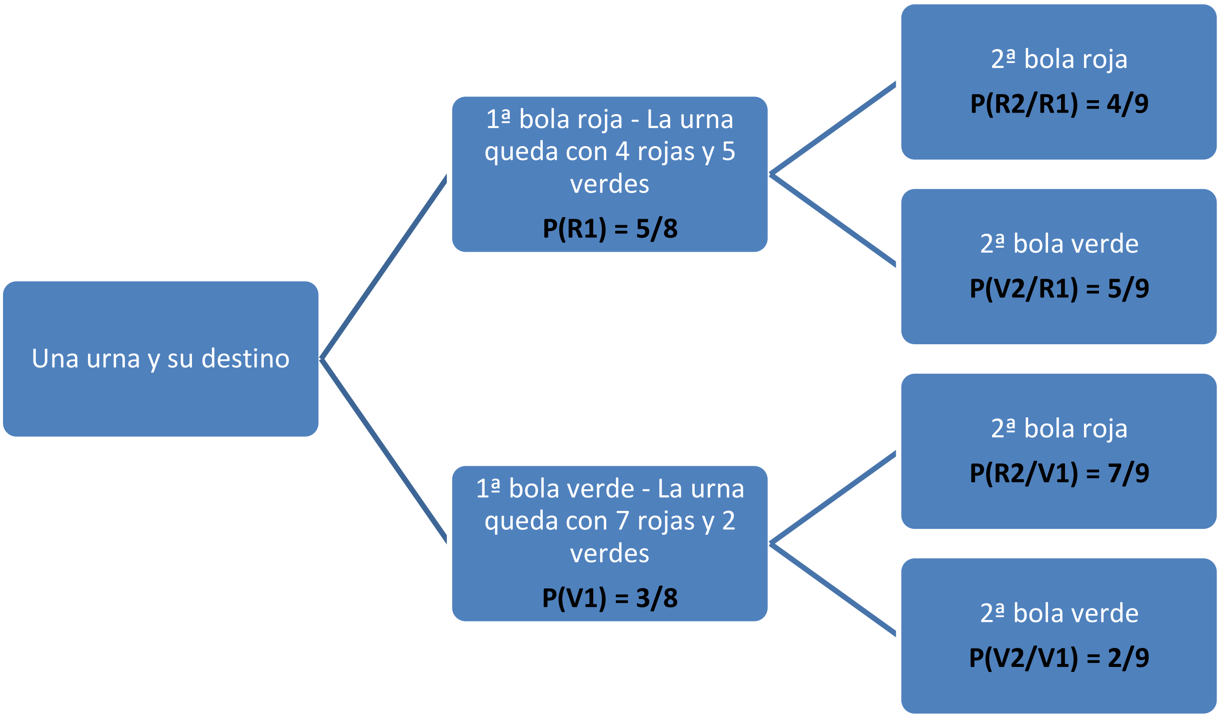
EJERCICIO 3

Una urna contiene 5 bolas rojas y 3 verdes. Se extrae una bola y se reemplaza por 2 bolas del otro color. A continuación, se extrae una segunda bola.

a) **(1.25 puntos)** Calcule la probabilidad de que la segunda bola extraída sea verde.

b) **(1.25 puntos)** Halle la probabilidad de que la primera haya sido roja, sabiendo que la segunda también ha sido roja.

Realizamos un diagrama de árbol para establecer las probabilidades de los distintos sucesos.



He llamado R1 y R2 a sacar bola roja en 1ª y 2ª extracción y V1 y V2 a sacar bola verde en 1ª y 2ª extracción.

a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(V2) = P(R1)P(V2/R1) + P(V1)P(V2/V1) = \frac{5}{8}\cdot\frac{5}{9} + \frac{3}{8}\cdot\frac{2}{9} = \boxed{\frac{31}{72} \simeq 0.43}$$

b) Es una probabilidad a posteriori, aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(R1/R2) = \frac{P(R1 \cap R2)}{P(R2)} = \frac{P(R1)P(R2/R1)}{P(R2)} = \frac{P(R1)P(R2/R1)}{P(R1)P(R2/R1) + P(V1)P(R2/V1)} =$$

$$= \frac{\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{9}}{\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{9} + \frac{3}{8}\cdot\frac{7}{9}} = \boxed{\frac{20}{41} \simeq 0.49}$$

EJERCICIO 4

En una muestra, elegida al azar, de 100 estudiantes de una Universidad, se ha observado que 25 desayunan en la cafetería del campus.

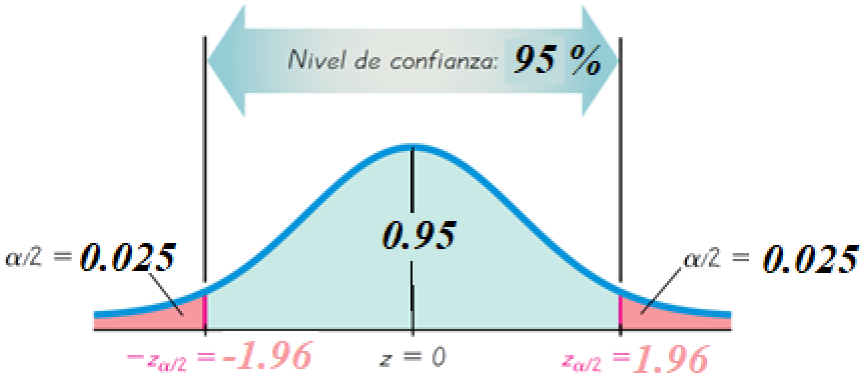
a) **(1.25 puntos)** Determine, con un nivel de confianza del 95 %, un intervalo de confianza para estimar la proporción de estudiantes de esa Universidad que desayunan en la cafetería.

b) **(1.25 puntos)** Si la proporción de estudiantes de esa Universidad que desayunan en la cafetería del campus en una muestra aleatoria es de 0.2, y el error cometido en la estimación ha sido inferior a 0.03, con un nivel de confianza del 92.5 % calcule el tamaño mínimo de la muestra.

n = 100. $p = \frac{25}{100} = 0.25 \rightarrow q = 1 - p = 1 - 0.25 = 0.75$

a) Determinamos $z_{\alpha/2}$ con un nivel de confianza del 95 %.

$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.25 \cdot 0.75}{100}} \simeq 0.08487$$

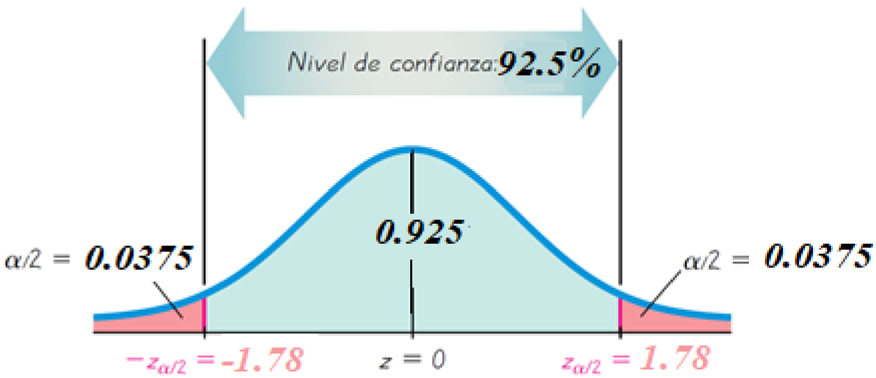
El intervalo de confianza para la proporción es:

$$\left(p - Error,\ p + Error\right) = \left(0.25 - 0.08487,\quad 0.25 + 0.08487\right) = \left(0.16513, 0.33487\right)$$

b) La proporción es $p = 0.2 \rightarrow q = 1 - p = 1 - 0.2 = 0.8$.

Determinamos $z_{\alpha/2}$ con un nivel de confianza del 92.5 %.

$1 - \alpha = 0{,}925 \rightarrow \alpha = 0{,}075 \rightarrow \alpha/2 = 0'0375 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}9625 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.78}$



Igualamos el error a 0.03.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow 0.03 = 1.78 \cdot \sqrt{\frac{0.2 \cdot 0.8}{n}} \Rightarrow \frac{0.03}{1.78} = \sqrt{\frac{0.2 \cdot 0.8}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.03}{1.78}\right)^2 = \frac{0.2 \cdot 0.8}{n} \Rightarrow n = \frac{0.2 \cdot 0.8}{\left(\frac{0.03}{1.78}\right)^2} \simeq 563.271$$

Como el número de estudiantes debe ser entero y superior al número obtenido, el mínimo número de estudiantes que debemos elegir para que el error en la proporción de usuarios de la cafetería sea menor de 0.03 es de 564.