PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD CURSO 2017-2018	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Instrucciones:	**a)** Duración: 1 hora y 30 minutos **b)** Elija una de las dos opciones propuestas y conteste los ejercicios de la opción elegida. **c)** En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima que le corresponde. **d)** Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. **e)** Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma. Justifique las respuestas.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

a) **(1 punto)** Plantee, sin resolver, las restricciones de este problema e indique la función a optimizar.

"Un ganadero alimenta a sus ovejas con maíz y pienso. Cada kilogramo de maíz aporta 600 g de hidratos de carbono y 200 g de proteínas, mientras que cada kilogramo de pienso aporta 300 g de hidratos de carbono y 600 g de proteínas. Cada oveja necesita diariamente como mínimo 1800 g de hidratos de carbono y 2400 g de proteínas. Si 1 kg de maíz cuesta 0'50 euros y 1 kg de pienso cuesta 0'25 euros, calcule cuantos kilogramos de cada producto tendría que comprar el ganadero para alimentar cada día a una oveja con un gasto mínimo."

b) **(1.5 puntos)** Represente el recinto limitado por las siguientes restricciones, calculando sus vértices

$$x \geq 0 \qquad x \leq 2y+2 \qquad x+y \leq 5$$

Calcule el máximo de $F(x,y)=4x+3y$ en dicho recinto, así como el punto donde se alcanza.

EJERCICIO 2

La función de costes de una empresa se puede determinar mediante la expresión

$$f(x)=40-6x+x^2, \text{ para } x \geq 0$$

donde x representa la cantidad producida de un determinado artículo.

a) **(1 punto)** ¿Disminuye el coste alguna vez? Determine la cantidad producida de dicho artículo cuando el coste es mínimo y cuál es dicho coste.

b) **(0.8 puntos)** ¿Cuál sería el coste si no se produjese nada de ese artículo? Si el coste fuese 80, ¿Cuántas serían las unidades producidas?

c) **(0.7 puntos)** Represente gráficamente la función.

EJERCICIO 3

En una determinada población residen 5000 personas en el centro y 10000 en la periferia. Se sabe que el 95% de los residentes en el centro y que el 20% de los que viven en la periferia opina que el Ayuntamiento debería restringir el acceso de vehículos privados al centro urbano. Se elige al azar un residente de la población.

a) **(1.25 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que esté a favor de restringir el acceso de vehículos privados al centro de la ciudad?

b) **(0.5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que de que resida en el centro y esté a favor de la restricción de acceso?

c) **(0.75 puntos)** Si la persona elegida opina que se debería restringir el acceso, ¿cuál es la probabilidad de que de que resida en el centro de la ciudad?

EJERCICIO 4

Se dispone de cuatro tornillos de 1, 2, 3 y 4 gramos de peso respectivamente.

a) **(1.25 puntos)** Mediante muestreo aleatorio simple, exprese todas las muestras posibles de tamaño 2.

b) **(1.25 puntos)** Determine la media y la varianza de los pesos medios muestrales.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

a) **(1.2 puntos)** ¿Se verifica la igualdad $(A+B)^2 = A^2+B^2+2A\cdot B$?

b) **(1.3 puntos)** Resuelva la ecuación matricial $X\cdot A = 2B^t + I_2$.

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^3+ax^2 & si \quad x<1 \\ bx+\dfrac{2}{x} & si \quad x\geq 1\end{cases}$.

a) **(1.5 puntos)** Calcule los valores de *a* y *b* para que la función sea continua y derivable en *x = 1*.

b) **(1 punto)** Para *b = 3*, determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa función en el punto de abscisa *x = 2*.

EJERCICIO 3

Un campus universitario dispone de 3000 plazas numeradas de aparcamiento para vehículos, distribuidos en tres zonas A, B y C. La zona A está constituida por las plazas del 1 al 1500, estando 1350 de ellas protegidas del sol. La zona B la conforman las plazas numeradas desde 1501 a 2500, estando el 80% protegidas del sol. La zona C contiene plazas numeradas desde 2501 hasta 3000, estando protegidas solamente 250 protegidas del sol. Aleatoriamente se elige una de las plazas de aparcamiento del campus.

a) **(0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que esté en la zona A o en la B?

b) **(0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que no esté protegida del sol?

c) **(1 punto)** Si se ha elegido una plaza protegida del sol, ¿cuál es la probabilidad de que esté ubicada en la zona B?

EJERCICIO 4

En un estudio sobre la utilización de nuevas tecnologías entre los estudiantes de Bachillerato, se ha realizado una encuesta a 500 estudiantes elegidos mediante muestreo aleatorio simple, resultando que 380 de ellos son usuarios de una determinada red social.

a) **(1.5 puntos)** Calcule un intervalo de confianza al 97% para estimar la proporción de estudiantes que son usuarios de esa red social

b) **(1 punto)** Suponiendo que se mantiene la proporción muestral, determine el número mínimo de estudiantes a los que sería preciso entrevistar para que, con un nivel de confianza del 96%, el error cometido al estimar la proporción de usuarios de la citada red social no supere el 2%.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

a) **(1 punto)** Plantee, sin resolver, las restricciones de este problema e indique la función a optimizar.

"Un ganadero alimenta a sus ovejas con maíz y pienso. Cada kilogramo de maíz aporta 600 g de hidratos de carbono y 200 g de proteínas, mientras que cada kilogramo de pienso aporta 300 g de hidratos de carbono y 600 g de proteínas. Cada oveja necesita diariamente como mínimo 1800 g de hidratos de carbono y 2400 g de proteínas. Si 1 kg de maíz cuesta 0.50 euros y 1 kg de pienso cuesta 0.25 euros, calcule cuantos kilogramos de cada producto tendría que comprar el ganadero para alimentar cada día a una oveja con un gasto mínimo."

b) **(1.5 puntos)** Represente el recinto limitado por las siguientes restricciones, calculando sus vértices

$$x \geq 0 \qquad x \leq 2y+2 \qquad x+y \leq 5$$

Calcule el máximo de $F(x,y)=4x+3y$ en dicho recinto, así como el punto donde se alcanza.

a) Es un problema de programación lineal.

Sea x = nº de kilos de maíz.
Sea y = nº de kilos de pienso.
Realizamos una tabla para establecer las inecuaciones.

	Hidratos de carbono	Proteínas	Precio
Kilos de maíz (x)	600x	200x	0.5x
Kilos de pienso (y)	300y	600y	0.25y
TOTALES	$600x+300y$	$200x+600y$	$0.5x+0.25y$

La función a optimizar (minimizar) es $C(x,y)=0.5x+0.25y$.

Las restricciones son:

"Las cantidades deben ser positivas" → $x \geq 0;\ \ y \geq 0$

"*Cada oveja necesita diariamente como mínimo 1800 g de hidratos de carbono y 2400 g de proteínas*" → $600x+300y \geq 1800$; $200x+600y \geq 2400$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0;\ \ y \geq 0 \\ 600x+300y \geq 1800 \\ 200x+600y \geq 2400 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \geq 0;\ \ y \geq 0 \\ 2x+y \geq 6 \\ x+3y \geq 12 \end{array}\right\}$$

b) Representamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región factible.

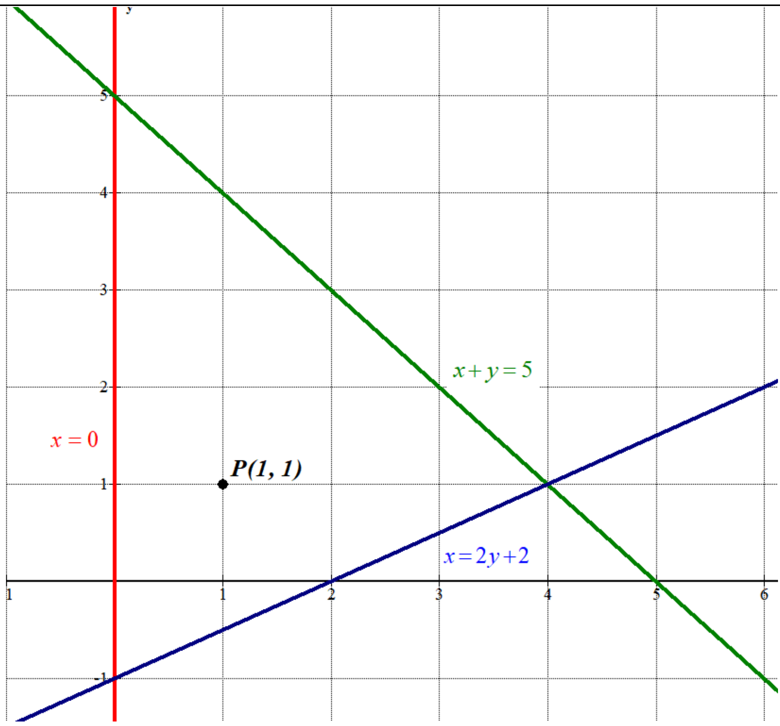
$x=0$: *Eje vertical*

$x=2y+2$

x	$y=\frac{x-2}{2}$
2	0
4	1

$x+y=5$

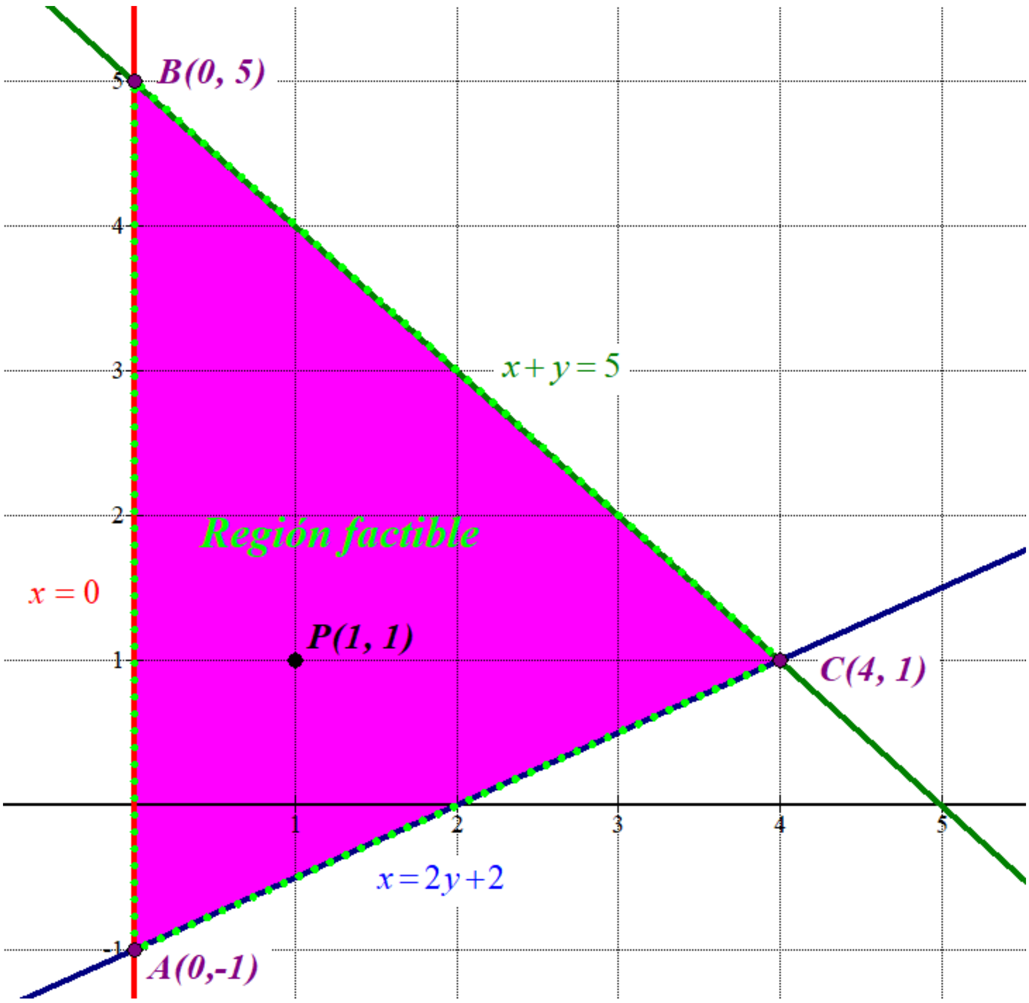
x	$y=5-x$
0	5
4	1



Comprobamos que el punto P(1, 1) cumple las inecuaciones.

$1 \geq 0$ $1 \leq 2 \cdot 1 + 2$ $1+1 \leq 5$ ¡¡Se cumplen!!

La región factible es la región del plano limitada por las rectas roja azul y verde.
La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo y marcamos los vértices y sus coordenadas.



Las coordenadas de los vértices se obtienen resolviendo los sistemas de ecuaciones correspondientes.

$$A \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2y + 2 \end{cases} \Rightarrow 0 = 2y + 2 \Rightarrow 2y = -2 \Rightarrow y = \frac{-2}{2} = -1 \rightarrow A(0,-1)$$

$$B \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow 0 + y = 5 \Rightarrow y = 5 \rightarrow B(0,5)$$

$$C \rightarrow \begin{cases} x = 2y + 2 \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow 2y + 2 + y = 5 \Rightarrow 3y = 3 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 2 + 2 = 4 \rightarrow C(4,1)$$

Valoramos la función $F(x,y) = 4x + 3y$ en cada uno de los vértices en busca del valor máximo.

A(0, –1) → $F(0,-1) = 4 \cdot 0 + 3(-1) = -3$
B(0, 5) → $F(0,5) = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 5 = 15$
C(4, 1) → $F(4,1) = 4 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = 19$ ¡Máximo!

La función alcanza un valor máximo de 19 y lo consigue en el punto C(4, 1).

EJERCICIO 2

La función de costes de una empresa se puede determinar mediante la expresión

$$f(x) = 40 - 6x + x^2 \text{, para } x \geq 0$$

donde *x* representa la cantidad producida de un determinado artículo.

a) **(1 punto)** ¿Disminuye el coste alguna vez? Determine la cantidad producida de dicho artículo cuando el coste es mínimo y cuál es dicho coste.

b) **(0.8 puntos)** ¿Cuál sería el coste si no se produjese nada de ese artículo? Si el coste fuese 80, ¿Cuántas serían las unidades producidas?

c) **(0.7 puntos)** Represente gráficamente la función.

a) La función es un trozo de parábola. Averigüemos su vértice.

$$f(x) = 40 - 6x + x^2 \Rightarrow f'(x) = -6 + 2x$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow -6 + 2x = 0 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = 3$.

- En $(0,3)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = -6 + 2 = -4 < 0$. La función decrece en $(0,3)$.
- En $(3,+\infty)$ tomamos $x = 5$ y la derivada vale $f'(5) = -6 + 2 \cdot 5 = 4 > 0$. La función crece en $(3,+\infty)$.

El coste disminuye entre $x = 0$ y $x = 3$. El coste es mínimo se produce en $x = 3$ y dicho coste mínimo es de $f(3) = 40 - 6 \cdot 3 + 3^2 = 31$.

b) Nos piden *f(0)* → $f(0) = 40 - 6 \cdot 0 + 0^2 = 40$

Produciendo 0 artículos el coste es de 40.

Nos piden averiguar el valor de *x* para el que $f(x) = 80$.

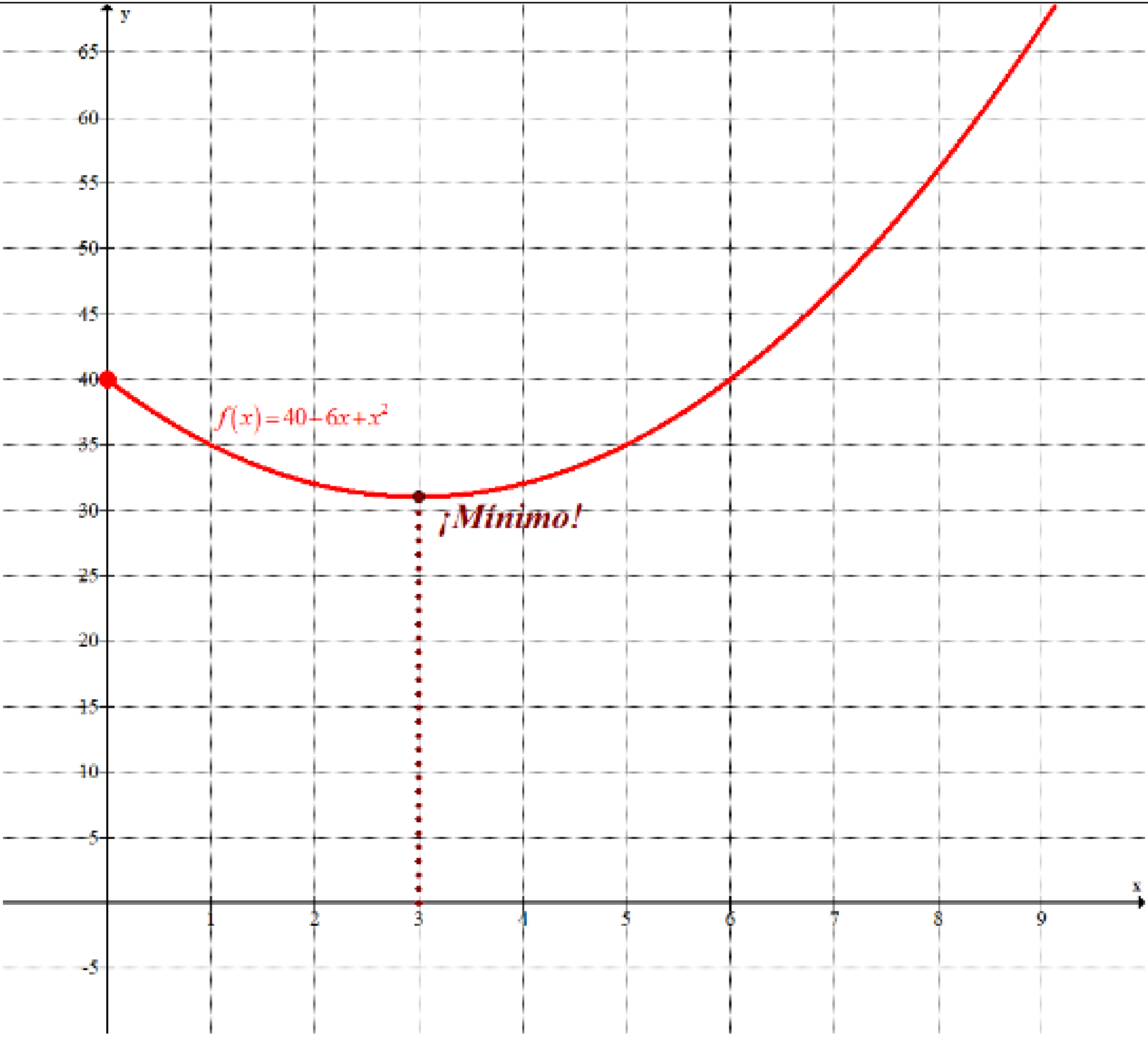
$$f(x) = 80 \Rightarrow 40 - 6x + x^2 = 80 \Rightarrow x^2 - 6x - 40 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(-40)}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{196}}{2} = \begin{cases} \dfrac{6+14}{2} = \boxed{10 = x} \\ \dfrac{6-14}{2} = -4 \notin [0.+\infty) \end{cases}$$

Produciendo 10 artículos el coste es de 80.

c) Hacemos una tabla de valores y dibujamos el trozo de parábola que es la gráfica de la función del ejercicio.

x	$f(x) = 40 - 6x + x^2$
0	40
1	35
3	31 ¡Vértice!
5	35
6	40


y
65
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
-5
x
1
2
3
4
5
6
7
8
9
$f(x)=40-6x+x^2$
¡Mínimo!

EJERCICIO 3

En una determinada población residen 5000 personas en el centro y 10000 en la periferia. Se sabe que el 95% de los residentes en el centro y que el 20% de los que viven en la periferia opina que el Ayuntamiento debería restringir el acceso de vehículos privados al centro urbano. Se elige al azar un residente de la población.

a) **(1.25 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que esté a favor de restringir el acceso de vehículos privados al centro de la ciudad?

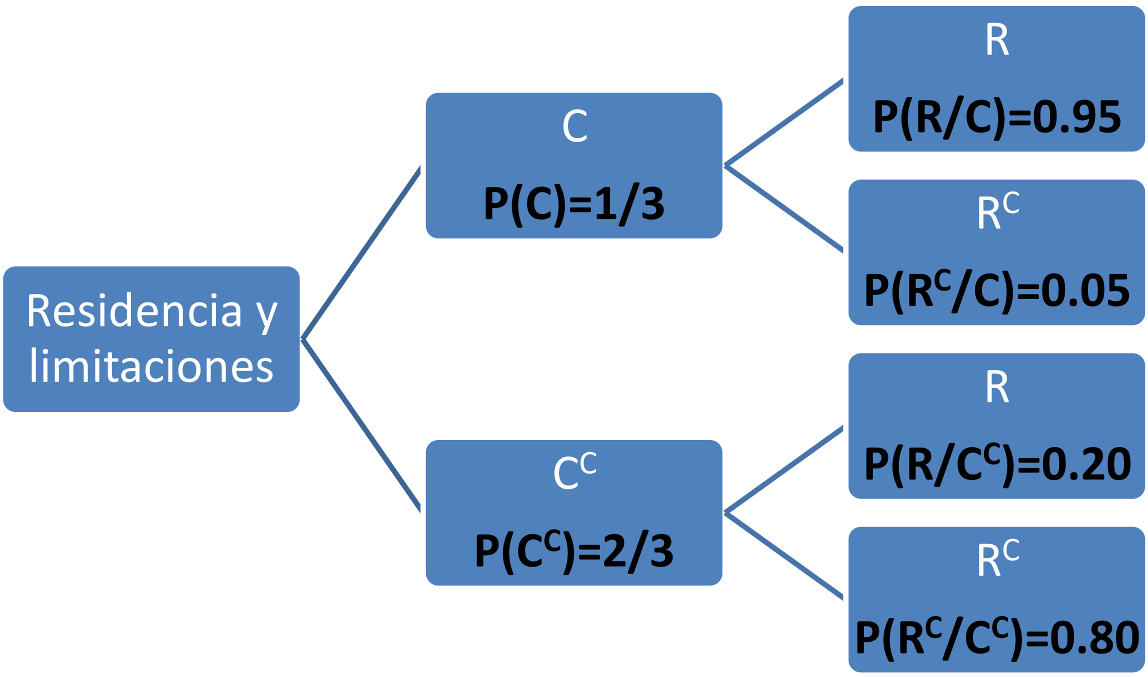
b) **(0.5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que de que resida en el centro y esté a favor de la restricción de acceso?

c) **(0.75 puntos)** Si la persona elegida opina que se debería restringir el acceso, ¿cuál es la probabilidad de que de que resida en el centro de la ciudad?

Realizamos un diagrama de árbol.

Llamamos C al suceso "residir en el centro", C^C al suceso "residir en la periferia" y R al suceso "Estar a favor de restringir el acceso de vehículos privados al centro de la ciudad".

Tenemos que $P(C)=\frac{5000}{15000}=\frac{1}{3}$, $P(C^C)=\frac{10000}{15000}=\frac{2}{3}$



a) Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(R)=P(C)P(R/C)+P(C^C)P(R/C^C)=\frac{1}{3}\cdot 0.95+\frac{2}{3}\cdot 0.20=\boxed{\frac{9}{20}=0.45}$$

b) $P(C\cap R)=P(C)P(R/C)=\frac{1}{3}\cdot 0.95=\boxed{\frac{19}{60}\simeq 0.316}$

c) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/R)=\frac{P(C\cap R)}{P(R)}=\frac{\frac{19}{60}}{\frac{9}{20}}=\frac{380}{540}=\boxed{\frac{19}{27}\simeq 0.704}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Pasamos los datos a valores absolutos.

Hay 15000 habitantes. 5000 en el centro y 10000 en la periferia. De los del centro el 95 % de ellos está a favor de la restricción de acceso, es decir, $0.95 \cdot 5000 = 4750$ habitantes del centro apoyan las restricciones y otros 250 no lo apoyan.
De los habitantes de la periferia el 20 % apoyan las restricciones, es decir, $0.20 \cdot 10000 = 2000$ apoyan las restricciones y otros 8000 no lo apoyan.

Ponemos todos estos datos en una tabla de contingencia.

	Apoya la restricción de acceso al centro	No apoya la restricción de acceso al centro	
Residente en el centro	**4750**	**250**	**5000**
Residente en la periferia	**2000**	**8000**	**10000**
	6750	**8250**	**15000**

a) $P(R) = \frac{6750}{15000} = \boxed{\frac{9}{20} = 0.45}$

b) $P(C \cap R) = \frac{4750}{1500} = \boxed{\frac{19}{60} \simeq 0.316}$

c) $P(C / R) = \frac{4750}{6750} = \boxed{\frac{19}{27} \simeq 0.704}$

EJERCICIO 4

Se dispone de cuatro tornillos de 1, 2, 3 y 4 gramos de peso respectivamente.

a) **(1.25 puntos)** Mediante muestreo aleatorio simple, exprese todas las muestras posibles de tamaño 2.

b) **(1.25 puntos)** Determine la media y la varianza de los pesos medios muestrales.

a) Supongo que el muestreo es con reemplazamiento. Hay 16 muestras con reemplazamiento de tamaño 2. Los resultados pueden verse en la tabla siguiente:

Muestras de tamaño 2	1 1	1 2	1 3	1 4	2 1	2 2	2 3	2 4	3 1	3 2	3 3	3 4	4 1	4 2	4 3	4 4
Media de la muestra	1	1.5	2	2.5	1.5		2.5	3	2	2.5	3	3.5	2.5	3	3.5	4

b) La media poblacional es $\mu = \dfrac{1+2+3+4}{4} = 2.5$

La media muestral coincide con la media poblacional $\bar{x} = \mu = 2.5$

La varianza poblacional es $\sigma^2 = \dfrac{(1-2.5)^2 + (2-2.5)^2 + (3-2.5)^2 + (4-2.5)^2}{4} = 1.25$

La varianza muestral es la varianza poblacional dividido entre el tamaño de la muestra

Varianza muestral $= \dfrac{\sigma^2}{2} = \dfrac{1.25}{2} = 0.625$

OTRA FORMA DE CALCULARLO

Hacemos una tabla con los valores de las medias de la muestra y sus frecuencias.

$\bar{x}_i$	n_i	$n_i \cdot \bar{x}_i$	$n_i \cdot \left(\bar{x}_i\right)^2$
1	**1**	**1**	**1**
1.5	**2**	**3**	**4.5**
2	**3**	**6**	**12**
2.5	**4**	**10**	**25**
3	**3**	**9**	**27**
3.5	**2**	**7**	**24.5**
4	**1**	**4**	**16**
Totales	**N = 16**	**40**	**110**

La media de la distribución muestral de medias es $\bar{x} = \dfrac{40}{16} = 2.5$

La varianza de la distribución muestral de medias es

Varianza de las medias muestrales $= \dfrac{\Sigma n_i \cdot \left(\bar{x}_i\right)^2}{N} - \left(\bar{x}\right)^2 = \dfrac{110}{16} - 2.5^2 = 0.625$

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

a) **(1.2 puntos)** ¿Se verifica la igualdad $(A+B)^2=A^2+B^2+2A\cdot B$?

b) **(1.3 puntos)** Resuelva la ecuación matricial $X\cdot A=2B^t+I_2$.

a) Calculamos el resultado de cada miembro de la igualdad y vemos si da el mismo resultado.

$$A+B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow (A+B)^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}A^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 4\end{pmatrix}\\ B^2=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ 2AB=2\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow A^2+B^2+2AB=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^2+B^2+2AB=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & 3\end{pmatrix}$$

Podemos apreciar que $(A+B)^2=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & 3\end{pmatrix}=A^2+B^2+2AB$.

No se verifica la igualdad.

b) Despejamos X en la ecuación matricial

$$X\cdot A=2B^t+I_2\Rightarrow X=\left(2B^t+I_2\right)A^{-1}$$

Calculamos la matriz inversa de A y la traspuesta de B.

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-2\neq 0 \text{ Existe la inversa de A.}$$

$$\mathrm{A}^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}}{-2}=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}+2 & -0\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow B^t=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

Sustituimos estos valores en la expresión $X = \left(2B^t + I_2\right)A^{-1}$

$$X = \left(2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+0 & 0+0 \\ -2-1/2 & 0-1/2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -5/2 & -1/2 \end{pmatrix}}$$

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^3+ax^2 & si \quad x<1 \\ bx+\dfrac{2}{x} & si \quad x\geq 1 \end{cases}$.

a) **(1.5 puntos)** Calcule los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $x = 1$.

b) **(1 punto)** Para $b = 3$, determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa función en el punto de abscisa $x = 2$.

a) Para que sea continua en $x = 1$ deben de coincidir los límites laterales en $x = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^3+ax^2=1^3+a\cdot 1^2=1+a \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} bx+\dfrac{2}{x}=b+\dfrac{2}{1}=b+2 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1) \end{array}\right\}\Rightarrow 1+a=b+2\Rightarrow \boxed{a=b+1}$$

Para que sea derivable en $x = 1$ deben de coincidir las derivadas laterales en $x = 1$.

$$f(x)=\begin{cases} x^3+ax^2 & si \quad x<1 \\ bx+\dfrac{2}{x} & si \quad x\geq 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 3x^2+2ax & si \quad x<1 \\ b-\dfrac{2}{x^2} & si \quad x>1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 3x^2+2ax=3\cdot 1^2+2a=3+2a \\ f'(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} b-\dfrac{2}{x^2}=b-\dfrac{2}{1^2}=b-2 \\ f'(1^-)=f'(1^+) \end{array}\right\}\Rightarrow 3+2a=b-2\Rightarrow \boxed{2a+5=b}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} a=b+1 \\ 2a+5=b \end{array}\right\}\Rightarrow a=2a+5+1\Rightarrow \boxed{-6=a}\Rightarrow \boxed{b=2(-6)+5}\Rightarrow \boxed{b=-12+5=-7}$$

La función es continua en $x = 1$ si $a = -6$ y $b = -7$.

b) Para $b = 3$ la función es $f(x)=\begin{cases} x^3+ax^2 & si \quad x<1 \\ 3x+\dfrac{2}{x} & si \quad x\geq 1 \end{cases}$

y la derivada es $f'(x)=\begin{cases} 3x^2+2ax & si \quad x<1 \\ 3-\dfrac{2}{x^2} & si \quad x>1 \end{cases}$.

La recta tangente en $x = 2$ tiene ecuación $y-f(2)=f'(2)(x-2)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=3\cdot 2+\dfrac{2}{2}=7 \\ f'(2)=3-\dfrac{2}{2^2}=2.5 \end{array}\right\}\Rightarrow y-7=2.5(x-2)\Rightarrow y=7+2.5x-5\Rightarrow \boxed{y=2.5x+2}$$

EJERCICIO 3

Un campus universitario dispone de 3000 plazas numeradas de aparcamiento para vehículos, distribuidos en tres zonas A, B y C. La zona A está constituida por las plazas del 1 al 1500, estando 1350 de ellas protegidas del sol. La zona B la conforman las plazas numeradas desde 1501 a 2500, estando el 80% protegidas del sol. La zona C contiene plazas numeradas desde 2501 hasta 3000, estando protegidas solamente 250 protegidas del sol. Aleatoriamente se elige una de las plazas de aparcamiento del campus.

a) **(0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que esté en la zona A o en la B?

b) **(0.75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que no esté protegida del sol?

c) **(1 punto)** Si se ha elegido una plaza protegida del sol, ¿cuál es la probabilidad de que esté ubicada en la zona B?

Realizamos una tabla de contingencia con los datos aportados en el problema.

	Plazas protegidas del sol	Plazas no protegidas del sol	
Zona A	**1350**		**1500**
Zona B	**80% de 1000**		**1000**
Zona C	**250**		**500**
Totales			**3000**

Completamos la tabla.

	Plazas protegidas del sol	Plazas no protegidas del sol	
Zona A	**1350**	**150**	**1500**
Zona B	**800**	**200**	**1000**
Zona C	**250**	**250**	**500**
Totales	**2400**	**600**	**3000**

a)

$$P(\text{Zona A o B}) = \frac{\text{nº de plazas en zona A + nº plazas en zona B}}{\text{nº total de plazas}} = \frac{1500+1000}{3000} = \boxed{\frac{5}{6} \simeq 0.83}$$

b) $$P(\text{No está protegida del sol}) = \frac{\text{nº de plazas no protegidas del sol}}{\text{nº de plazas}} = \frac{600}{3000} = \boxed{\frac{1}{5} = 0.2}$$

c)

$$P(\text{Zona B/Está protegida del sol}) = \frac{\text{Nº plazas de la zona B protegidas del sol}}{\text{Nº de plazas protegidas del sol}} =$$

$$= \frac{800}{2400} = \boxed{\frac{1}{3} \simeq 0.33}$$

EJERCICIO 4

En un estudio sobre la utilización de nuevas tecnologías entre los estudiantes de Bachillerato, se ha realizado una encuesta a 500 estudiantes elegidos mediante muestreo aleatorio simple, resultando que 380 de ellos son usuarios de una determinada red social.

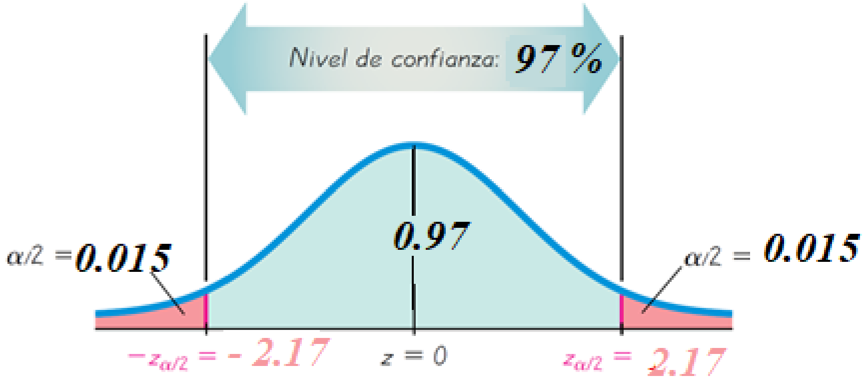
a) **(1.5 puntos)** Calcule un intervalo de confianza al 97% para estimar la proporción de estudiantes que son usuarios de esa red social

b) **(1 punto)** Suponiendo que se mantiene la proporción muestral, determine el número mínimo de estudiantes a los que sería preciso entrevistar para que, con un nivel de confianza del 96%, el error cometido al estimar la proporción de usuarios de la citada red social no supere el 2%.

n = 500. $p=\dfrac{380}{500}=0.76 \rightarrow q=1-p=1-0.76=0.24$

a) Con un nivel de confianza del 97 % tenemos

$$1-\propto = 0{,}97 \rightarrow \propto = 0{,}03 \rightarrow \propto/2 = 0'015 \rightarrow 1-\propto/2 = 0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.17}$$



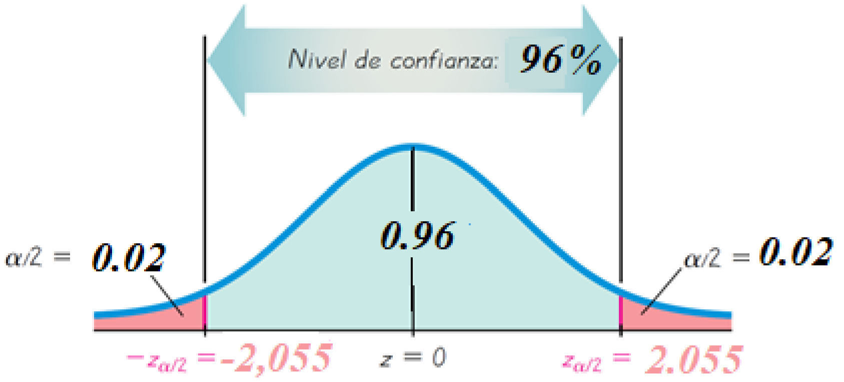
$$Error = z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}} = 2.17\cdot\sqrt{\frac{0.76\cdot 0.24}{500}} \simeq 0.041446$$

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$\left(p-Error,\ p+Error\right) = \left(0.76-0.041446,\quad 0.76+0.041446\right) = \left(0.718554,\ 0.801446\right)$$

b) Con un nivel de confianza del 96 % tenemos

$$1-\propto = 0{,}96 \rightarrow \propto = 0{,}04 \rightarrow \propto/2 = 0'02 \rightarrow 1-\propto/2 = 0{,}98 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.05+2.06}{2} = 2.055$$



Igualamos el error a 0.02.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow 0.02 = 2.055 \cdot \sqrt{\frac{0.76 \cdot 0.24}{n}} \Rightarrow \frac{0.02}{2.055} = \sqrt{\frac{0.76 \cdot 0.24}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.02}{2.055}\right)^2 = \frac{0.76 \cdot 0.24}{n} \Rightarrow n = \frac{0.76 \cdot 0.24}{\left(\frac{0.02}{2.055}\right)^2} \simeq 1925.6994$$

Como el número de estudiantes debe ser entero y superior al número obtenido el mínimo número de estudiantes que debemos elegir para que el error en la proporción de usuarios de una determinada red social sea menor del 2 % es de 1926.