PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD CURSO 2017-2018	MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Instrucciones:
a) Duración: 1 hora y 30 minutos
b) Elija una de las dos opciones propuestas y conteste los ejercicios de la opción elegida.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima que le corresponde.
d) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos.
e) Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma. Justifique las respuestas.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Sea el siguiente sistema de inecuaciones:

$$x+2y\le 11 \qquad x\ge 2y-5 \qquad 3x+y\le 18 \qquad x\ \ge\ 0 \qquad y\ \ge\ 0$$

a) **(1.8 puntos)** Represente gráficamente la región que definen y calcule sus vértices.

b) **(0.5 puntos)** Halle los puntos de esa región en los que la función $F(x,y)=2x+3y$ alcanza los valores mínimo y máximo y calcule dichos valores.

b) **(0.2 puntos)** Justifique si el punto (5.5, 2) pertenece a la región factible.

EJERCICIO 2

El consumo de cereales en una ciudad, en miles de toneladas, viene dado por la función $c(t)=t^3-15t^2+63t+10$, para $0\le t\le 12$, donde *t* representa el tiempo.

a) **(0.8 puntos)** ¿En qué instante se alcanza el máximo consumo de cereales y cuantas toneladas se consumen en ese momento?

b) **(0.7 puntos)** ¿En qué intervalo de tiempo decrece el consumo de cereales?

c) **(1 punto)** Represente gráficamente la función.

EJERCICIO 3

En una localidad, el 25% de los habitantes asiste periódicamente a la consulta del dentista, el 10% se hace una analítica y el 8% hace ambas cosas.

a) **(0.5 puntos)** ¿Razone si los sucesos "Asistir a la consulta del dentista" y "Hacerse una analítica" son independientes?

b) **(1 punto)** ¿Qué porcentaje de habitantes ni se hace una analítica ni va al dentista?

c) **(1 punto)** Si elegimos un habitante al azar de esa localidad de entre los que van al dentista, ¿cuál es la probabilidad de que se haga una analítica?

EJERCICIO 4

En una zona escolar formada por tres centros de secundaria, se desea estimar la proporción de este alumnado que lleva teléfono móvil al instituto. Se toma una muestra aleatoria simple de 121 estudiantes, de los cuales 74 lo llevan.

a) **(1.2 puntos)** Determine un intervalo de confianza al 97% para la proporción de estudiantes que son usuarios que lleva el móvil al instituto. ¿Entre qué dos porcentajes varía esa proporción a ese nivel de confianza?

b) **(0.5 puntos)** Si con la misma muestra se disminuye el nivel de confianza, ¿qué efecto tendrá esta disminución en el error de la estimación?

c) **(0.8 puntos)** Si en la misma zona se elige mediante muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional otra muestra de 121 estudiantes, considerando que el segundo centro escolar tiene el doble de alumnos que el primero y el tercero tiene el triple que el primero, ¿Cuántos alumnos de cada centro se deben tomar para construir la muestra?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) **(1 punto)** Calcule $A^{2018} + A^{2019}$.

b) **(1.5 puntos)** Resuelva la ecuación matricial $X \cdot A + B \cdot B^t = 2A$.

EJERCICIO 2

El beneficio, en miles de euros, que ha obtenido una almazara lo largo de 50 años viene dado por

$B(t) = \begin{cases} -0.04t^2 + 2.4t & si \quad 0 \le t < 40 \\ \dfrac{40t - 320}{t} & si \quad 40 \le t \le 50 \end{cases}$, donde t es el tiempo transcurrido.

a) **(1 punto)** Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función *B(t)* en el intervalo [0, 50].

b) **(1 punto)** Estudie la monotonía de la función B(t) y determine en qué momento fueron mayores los beneficios de la almazara, así como el beneficio máximo.

c) **(0.5 puntos)** Represente la gráfica de la función y explique la evolución del beneficio.

EJERCICIO 3

Un hotel dispone de tres lavadoras industriales L_1, L_2 y L_3 para el servicio de lavandería. El 50% de los lavados los realiza L_1, el 30% los hace L_2 y el resto L_3. La lavadora L_1 produce un 5% de lavados defectuosos, L_2 produce un 15% y L_3 un 20%. Se elige al azar un lavado de hotel.

a) **(1.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que no sea defectuoso**.**

b) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que el lavado haya sido realizado por L_1, sabiendo que ha sido defectuoso.

EJERCICIO 4

La edad de los empleados de una empresa sigue una ley Normal de varianza 64 y media desconocida. Se toma una muestra aleatoria simple de 16 empleados de dicha empresa abatiéndose las siguientes edades:

30 42 38 45 52 60 21 26 33 44 28 49 37 41 38 40.

a) **(1.5 puntos)** Obtenga un intervalo de confianza para estimar la media de los empleados, con un nivel de confianza del 97%.

b) **(1 punto)** Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar la edad media de los empleados, con un error inferior a 2 años y nivel de confianza del 99%.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Sea el siguiente sistema de inecuaciones:

$$x+2y\leq 11 \qquad x\geq 2y-5 \qquad 3x+y\leq 18 \qquad x\geq 0 \qquad y\geq 0$$

a) **(1.8 puntos)** Represente gráficamente la región que definen y calcule sus vértices.

b) **(0.5 puntos)** Halle los puntos de esa región en los que la función $F(x,y)=2x+3y$ alcanza los valores mínimo y máximo y calcule dichos valores.

b) **(0.2 puntos)** Justifique si el punto (5.5, 2) pertenece a la región factible.

a) Es un problema de programación lineal.

Representamos las rectas asociadas a las inecuaciones.

$x+2y=11$

x	$y=\dfrac{11-x}{2}$
5	3
3	4

$x=2y-5$

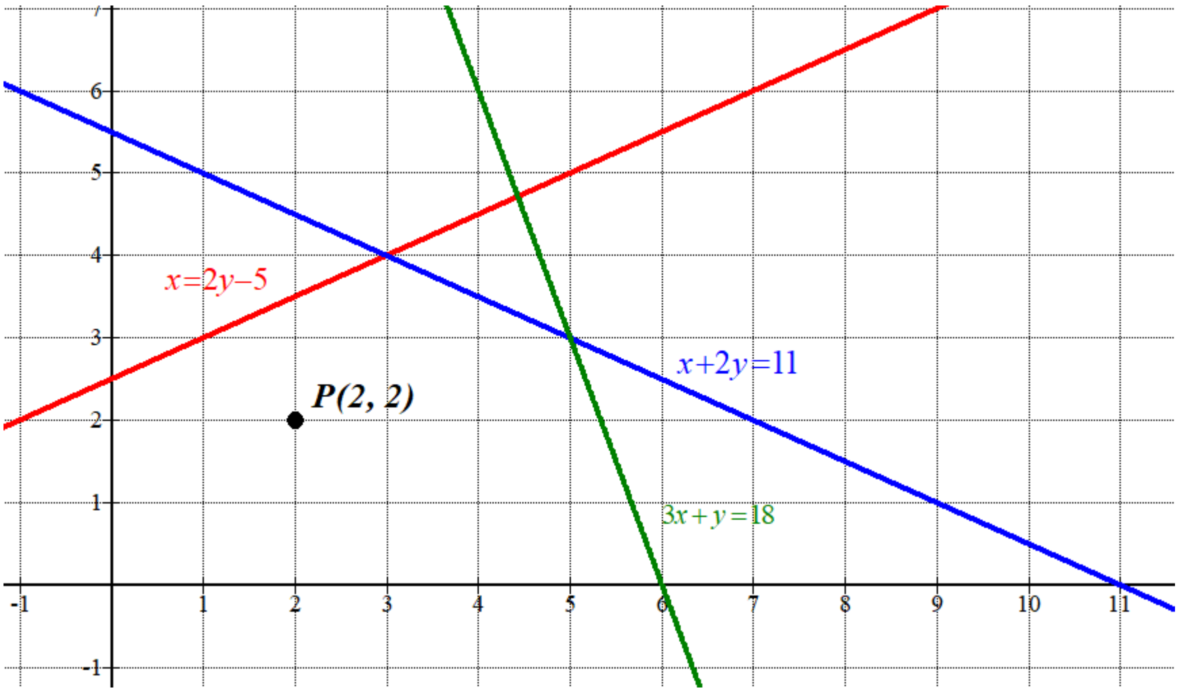
x	$y=\dfrac{x+5}{2}$
5	5
3	45

$3x+y=18$

x	$y=18-3x$
6	0
5	3

$x\geq 0 \qquad y\geq 0$

Pr *imer cuadrante*

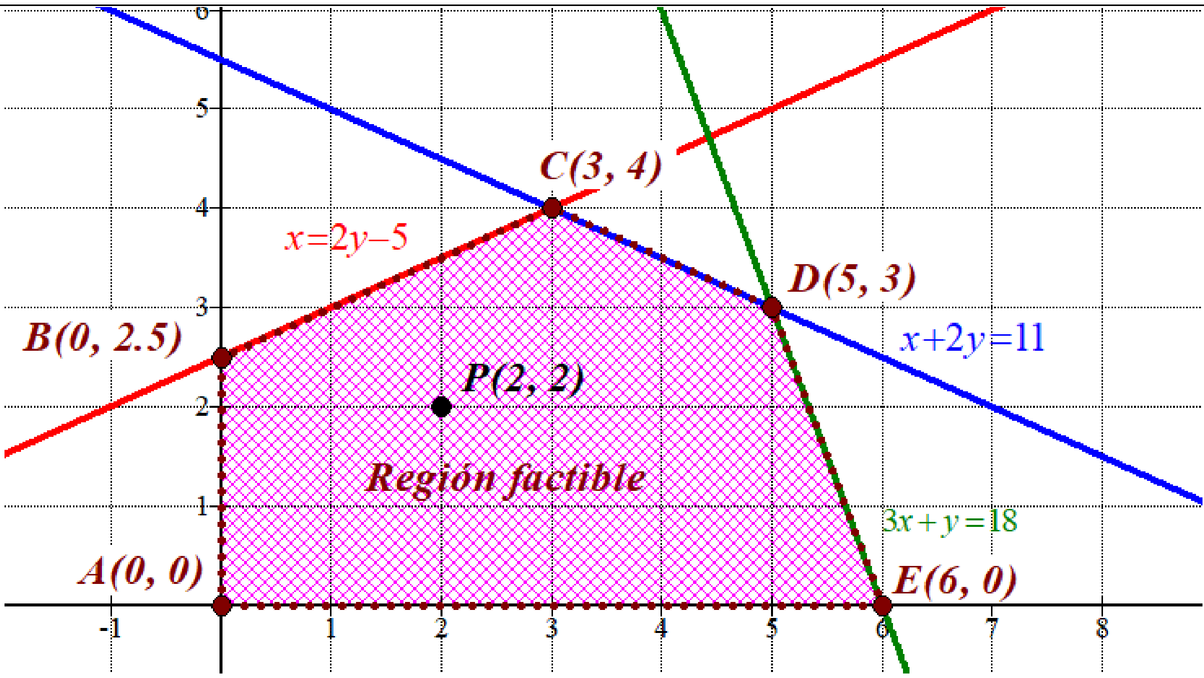


Comprobamos que el punto P(2, 2) cumple todas las restricciones.

$$2+2\cdot 2\leq 11 \qquad 2\geq 2\cdot 2-5 \qquad 3\cdot 2+2\leq 18 \qquad 2\geq 0 \qquad 2\geq 0$$

Por lo que la región que definen las inecuaciones es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja, azul y verde.

Coloreamos de rosa la región y determinamos los vértices resolviendo los sistemas de ecuaciones correspondientes.



$$B \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2y-5 \end{cases} \Rightarrow 0 = 2y-5 \Rightarrow y = \frac{5}{2} = 2.5 \Rightarrow \boxed{B(0, 2.5)}$$

$$C \rightarrow \begin{cases} x+2y = 11 \\ x = 2y-5 \end{cases} \Rightarrow 2y-5+2y = 11 \Rightarrow 4y = 16 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow x = 8-5 = 3 \Rightarrow \boxed{C(3,4)}$$

$$D \rightarrow \begin{cases} x+2y = 11 \\ 3x+y = 18 \end{cases} \Rightarrow x = 11-2y \Rightarrow 3(11-2y)+y = 18 \Rightarrow 33-6y+y = 18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5y = 18-33 \Rightarrow y = \frac{-15}{-5} = 3 \Rightarrow x = 11-6 = 5 \Rightarrow \boxed{D(5,3)}$$

$$E \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 3x+y = 18 \end{cases} \Rightarrow 3x = 18 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow \boxed{E(6,0)}$$

b) Valoramos la función objetivo $F(x,y) = 2x+3y$ en cada uno de los vértices en busca del valor máximo y mínimo.

A(0, 0) → $F(0,0) = 0$ ¡Mínimo!

B(0, 2.5) → $F(0,2.5) = 0+7.5 = 7.5$

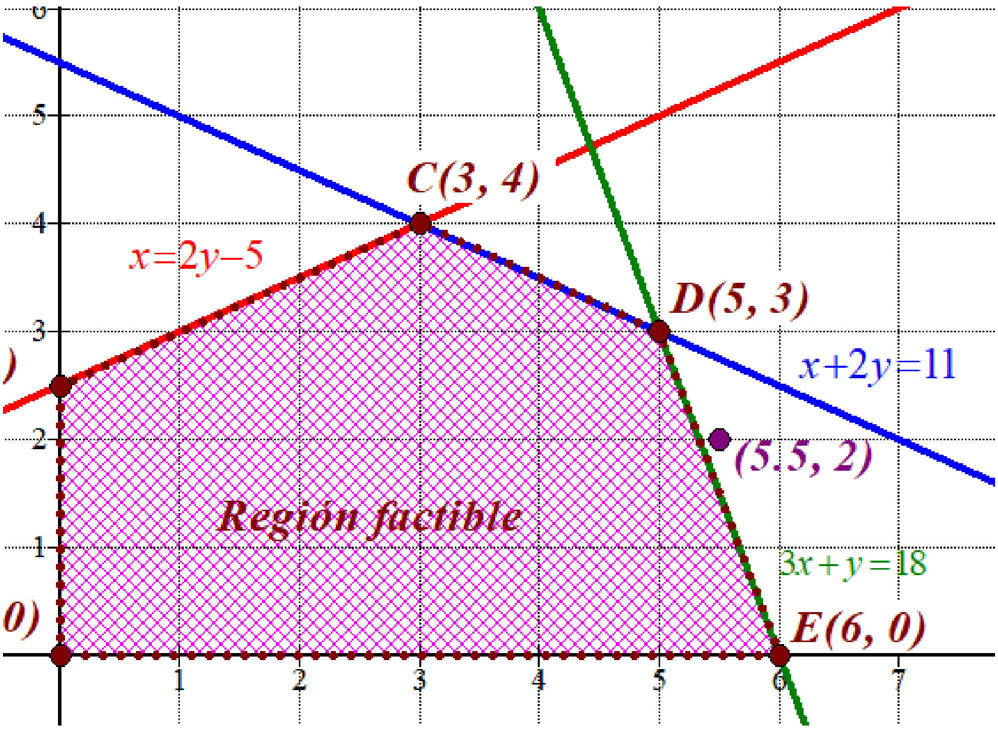
C(3, 4) → $F(3,4) = 6+12 = 18$

D(5, 3) → $F(5,3) = 10+9 = 19$ ¡Máximo!

F(6, 0) → $F(6,0) = 12$

La función $F(x,y) = 2x+3y$ alcanza su mínimo valor (0) en el punto A(0, 0) y su máximo valor (19) en el punto D(5, 3).

c) El punto (5.5, 2) lo dibujamos en el plano y comprobamos si está en la región coloreada.



Es difícil apreciar si está dentro o fuera de la región factible dada su proximidad a la misma, aún más si el dibujo de esta región se ha hecho de forma manual.
Lo comprobamos viendo si cumple todas las inecuaciones.

$$(5.5,2) \to \begin{cases} ¿5.5+2\cdot 2 \le 11? \to ¿9.5 \le 11? \ \text{¡Cierto!} \\ ¿5.5 \ge 2\cdot 2-5? \to ¿5.5 \ge -1? \ \text{¡Cierto!} \\ ¿3\cdot 5.5+2 \le 18? \to ¿18.5 \le 18? \ \text{¡No se cumple!} \\ 5.5 \ge 0 \to \text{¡Cierto!} \\ 2 \ge 0 \to \text{¡Cierto!} \end{cases}$$

Al no cumplirse una de las inecuaciones el punto (5.5, 2) no pertenece a la región factible.

EJERCICIO 2

El consumo de cereales en una ciudad, en miles de toneladas, viene dado por la función $c(t)=t^3-15t^2+63t+10$, para $0\le t\le 12$, donde t representa el tiempo.

a) **(0.8 puntos)** ¿En qué instante se alcanza el máximo consumo de cereales y cuantas toneladas se consumen en ese momento?

b) **(0.7 puntos)** ¿En qué intervalo de tiempo decrece el consumo de cereales?

c) **(1 punto)** Represente gráficamente la función.

a) Utilizamos la derivada para localizar el máximo relativo de la función.

$$c(t)=t^3-15t^2+63t+10 \Rightarrow c'(t)=3t^2-30t+63$$

$$c'(t)=0 \Rightarrow 3t^2-30t+63=0 \Rightarrow t^2-10t+21=0 \Rightarrow t=\frac{10\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot 1\cdot 21}}{2}$$

$$t=\frac{10\pm\sqrt{100-84}}{2}=\frac{10\pm 4}{2}=\begin{cases}\dfrac{10+4}{2}=7=t\\[2mm]\dfrac{10-4}{2}=3=t\end{cases}$$

Los dos puntos críticos de la función obtenidos pertenecen al intervalo de definición de la función.

Para obtener donde se alcanza el máximo valoramos la función $c(t)=t^3-15t^2+63t+10$ en estos valores: $t = 3$, $t = 7$ y en los extremos del intervalo de definición [0, 12].

$$c(t)=t^3-15t^2+63t+10 \Rightarrow \begin{cases}c(0)=0^3-15\cdot 0^2+63\cdot 0+10=10\\ c(3)=3^3-15\cdot 3^2+63\cdot 3+10=91\\ c(7)=7^3-15\cdot 7^2+63\cdot 7+10=59\\ c(12)=12^3-15\cdot 12^2+63\cdot 12+10=334\end{cases}$$

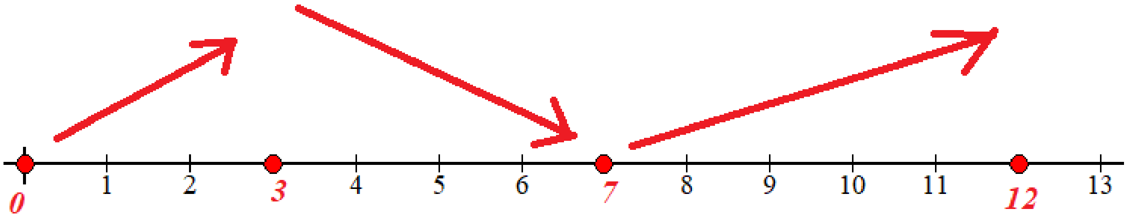
El máximo consumo de cereales es de 334 000 toneladas y se produce en el valor $t = 12$.

b) Ya hemos obtenido los puntos críticos de la función: $t = 3$ y $t = 7$.

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En $(0,3)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $c'(2)=3\cdot 2^2-30\cdot 2+63=15>0$. La función crece en el intervalo $(0,3)$.
- En $(3,7)$ tomamos $x = 5$ y la derivada vale $c'(5)=3\cdot 5^2-30\cdot 5+63=-12<0$. La función decrece en el intervalo $(3,7)$.
- En $(7,12)$ tomamos $x = 10$ y la derivada vale $c'(10)=3\cdot 10^2-30\cdot 10+63=63>0$. La función crece en el intervalo $(7,12)$.

La función sigue el esquema siguiente:

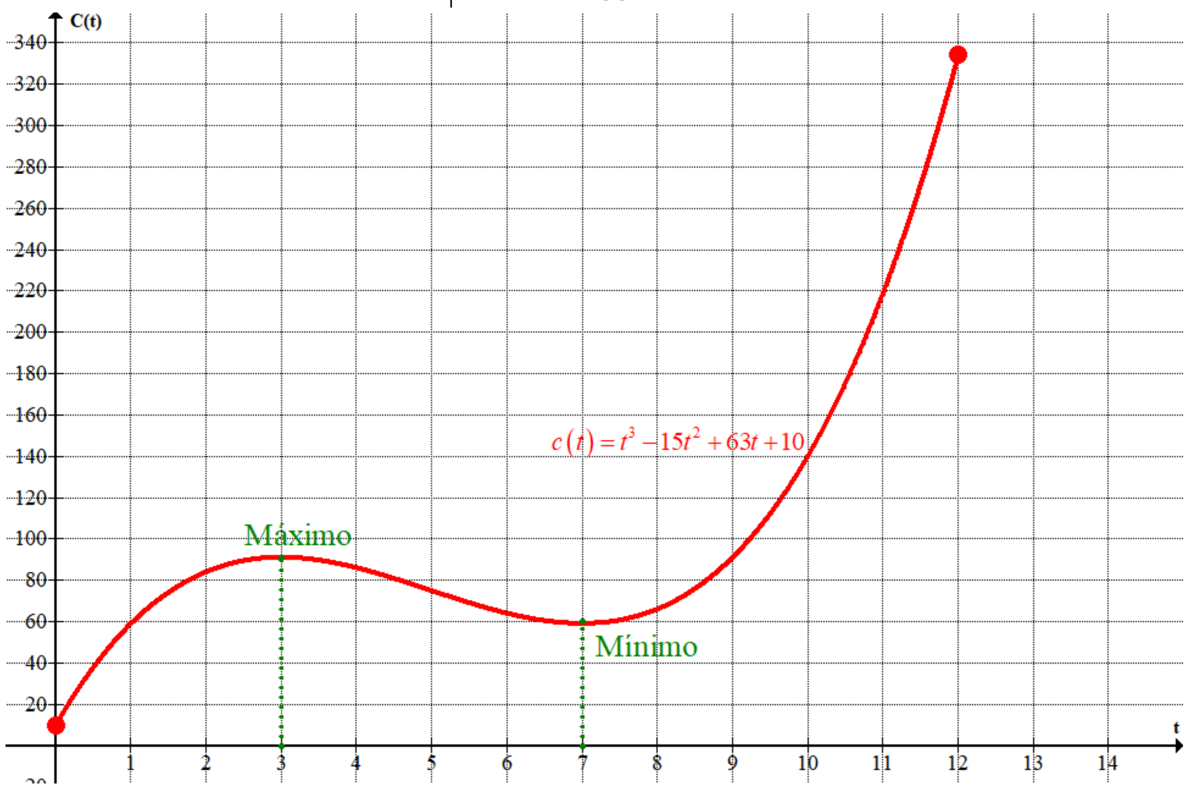


Por lo que se observa en el dibujo el consumo de cereales decrece entre $t = 3$ y $t = 7$.

c) Tenemos hecho el estudio de la monotonía de la función, que también nos permite afirmar que en $t = 3$ hay un máximo relativo y en $t = 7$ un mínimo relativo.

Obtenemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

t	$c(t) = t^3 - 15t^2 + 63t + 10$
0	10
1	59
3	91
5	75
7	59
10	140
12	334



EJERCICIO 3

En una localidad, el 25% de los habitantes asiste periódicamente a la consulta del dentista, el 10% se hace una analítica y el 8% hace ambas cosas.

a) **(0.5 puntos)** ¿Razone si los sucesos "Asistir a la consulta del dentista" y "Hacerse una analítica" son independientes?

b) **(1 punto)** ¿Qué porcentaje de habitantes ni se hace una analítica ni va al dentista?

c) **(1 punto)** Si elegimos un habitante al azar de esa localidad de entre los que van al dentista, ¿cuál es la probabilidad de que se haga una analítica?

a) Llamamos A al suceso "Asiste a la consulta del dentista" y B al suceso "Se hace una analítica".

Sabemos que $P(A)=0.25$, $P(B)=0.10$ y que $P(A\cap B)=0.08$

Debemos comprobar si $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B)=0.08 \\ P(A)\cdot P(B)=0.25\cdot 0.10=0.025 \end{array}\right\} \Rightarrow P(A\cap B)=0.08\neq 0.025=P(A)\cdot P(B)$$

Como la igualdad no se cumple los sucesos A y B no son independientes.

b) Hacemos una tabla de contingencia para averiguar lo pedido.

	Se hace una analítica	No se hace una analítica	
Asiste a la consulta del dentista	**8**		**25**
No asiste a consulta del dentista			
	10		**100**

Completamos la tabla.

	Se hace una analítica	No se hace una analítica	
Asiste a la consulta del dentista	**8**	**17**	**25**
No asiste a consulta del dentista	**2**	**73**	**75**
	10	**90**	**100**

Hay un 73 % que no se hacen una analítica ni asiste a la consulta del dentista.

OTRA FORMA.

Nos piden calcular $P(\overline{A}\cap\overline{B})$.

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(A\cap B)]$$

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=1-[0.25+0.10-0.08]=1-0.27=0.73$$

El porcentaje de personas que no se hacen una analítica ni asiste a la consulta del dentista es del 73 %.

c) Nos piden calcular $P(B/A)$.

$$P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{0.08}{0.25}=0.32$$

La probabilidad pedida es de 0.32

EJERCICIO 4

En una zona escolar formada por tres centros de secundaria, se desea estimar la proporción de este alumnado que lleva teléfono móvil al instituto. Se toma una muestra aleatoria simple de 121 estudiantes, de los cuales 74 lo llevan.

a) **(1.2 puntos)** Determine un intervalo de confianza al 97% para la proporción de estudiantes que son usuarios que lleva el móvil al instituto. ¿Entre qué dos porcentajes varía esa proporción a ese nivel de confianza?

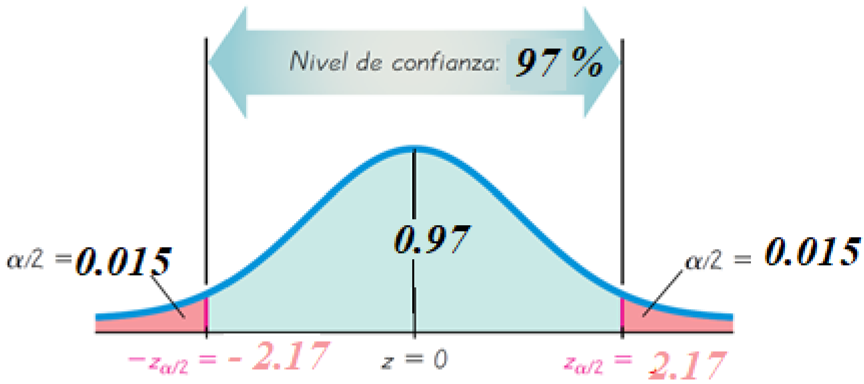
b) **(0.5 puntos)** Si con la misma muestra se disminuye el nivel de confianza, ¿qué efecto tendrá esta disminución en el error de la estimación?

c) **(0.8 puntos)** Si en la misma zona se elige mediante muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional otra muestra de 121 estudiantes, considerando que el segundo centro escolar tiene el doble de alumnos que el primero y el tercero tiene el triple que el primero, ¿Cuántos alumnos de cada centro se deben tomar para construir la muestra?

n =1210. $p=\dfrac{74}{121}\simeq 0.61 \rightarrow q=1-p=1-\dfrac{74}{121}=\dfrac{47}{121}$

a) Con un nivel de confianza del 97 % tenemos

$$1-\alpha = 0{,}97 \rightarrow \alpha = 0{,}03 \rightarrow \alpha/2 = 0'015 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.17}$$



$$Error = z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}} = 2.17\cdot\sqrt{\frac{\frac{74}{121}\cdot\frac{47}{121}}{121}} \simeq 0.09615$$

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$\left(p-Error,\ p+Error\right)=\left(0.61157-0.09615,\quad 0.61157+0.09615\right)=\left(0.51542,\ 0.70772\right)$$

El porcentaje del alumnado que lleva teléfono móvil al instituto estará entre el 51.542 % y el 70.772 % con un nivel de confianza del 97 %.

b) Si disminuimos el nivel de confianza (la zona azul del dibujo entonces disminuye el valor de $z_{\alpha/2}$ y el error dado por la fórmula $Error = z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}$ será también menor.

c) Llamamos N_1 , N_2 y N_3 al número de alumnos del primer, segundo y tercer centro.

Por un lado tenemos $N_1 + N_2 + N_3 = 121$, y por otro lado $N_2 = 2\cdot N_1$ y $N_3 = 3\cdot N_1$., por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} N_1+N_2+N_3=121 \\ N_2=2\cdot N_1 \\ N_3=3\cdot N_1 \end{array}\right\} \Rightarrow N_1+2\cdot N_1+3\cdot N_1=121 \Rightarrow 6\cdot N_1=121 \Rightarrow N_1=\frac{121}{6}\simeq 20.16$$

Como el número de alumnos debe ser entero tomaremos $N_1 = 20$, tenemos $N_2 = 2\cdot 20 = 40$ y $N_3 = 3\cdot 20 = 60$, pero al sumar sale 120 no 121, por tanto hay que tomar un alumno más de un centro y tenemos tres soluciones posibles:

$$\left.\begin{array}{l} N_1=20 \\ N_2=40 \\ N_3=61 \end{array}\right\} \quad o \quad \left.\begin{array}{l} N_1=20 \\ N_2=41 \\ N_3=60 \end{array}\right\} \quad o \quad \left.\begin{array}{l} N_1=21 \\ N_2=40 \\ N_3=60 \end{array}\right\}$$

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

a) **(1 punto)** Calcule $A^{2018}+A^{2019}$.

b) **(1.5 puntos)** Resuelva la ecuación matricial $X\cdot A+B\cdot B^t=2A$.

a) Obtenemos la expresión de A^{2018} y de A^{2019}.

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0 & 0+0\\ 1-1 & 0+(-1)(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=Id$$

$$A^3=A^2\cdot A=Id\cdot A=A$$

$$A^4=A^2\cdot A^2=Id\cdot Id=Id$$

$$A^5=A^4\cdot A=Id\cdot A=A$$

...

$$A^{2018}=\{\text{Exponente par}\}=Id$$

$$A^{2019}=\{\text{Exponente impar}\}=A$$

Calculamos la expresión pedida.

$$A^{2018}+A^{2019}=Id+A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{2018}+A^{2019}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}}$$

b) Despejo X en la ecuación matricial $X\cdot A+B\cdot B^t=2A$

$$X\cdot A+B\cdot B^t=2A\Rightarrow X\cdot A=2A-B\cdot B^t\Rightarrow X=\left(2A-B\cdot B^t\right)A^{-1}$$

Determinamos la inversa de A y la traspuesta de B.

$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1\neq 0$ → Existe la inversa de A.

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sustituimos en la expresión obtenida al despejar en la ecuación matricial.

$$X = \left(2A - B \cdot B^t\right) A^{-1} = \left(2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1+1 & 2 \\ 2 & 4+1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -7 & 7 \end{pmatrix}}$$

EJERCICIO 2

El beneficio, en miles de euros, que ha obtenido una almazara lo largo de 50 años viene dado por

$$B(t)=\begin{cases}-0.04t^2+2.4t & si \quad 0\le t<40\\ \dfrac{40t-320}{t} & si \quad 40\le t\le 50\end{cases}$$, donde t es el tiempo transcurrido.

a) **(1 punto)** Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función *B(t)* en el intervalo [0, 50].

b) **(1 punto)** Estudie la monotonía de la función B(t) y determine en qué momento fueron mayores los beneficios de la almazara, así como el beneficio máximo.

c) **(0.5 puntos)** Represente la gráfica de la función y explique la evolución del beneficio.

a) Es una función a trozos donde una de las ramas es una parábola, que es continua y la otra es un cociente de dos polinomios, cuyo denominador solo se anula para $t = 0$ que no pertenece a su intervalo de definición [40, 50].
Por lo que la función es continua.

Estudiamos su derivabilidad. Calculamos la derivada de B(t) y comprobamos la derivabilidad en $t = 40$.

$$B(t)=\begin{cases}-0.04t^2+2.4t & si \quad 0\le t<40\\ \dfrac{40t-320}{t} & si \quad 40\le t\le 50\end{cases} \Rightarrow B'(t)=\begin{cases}-0.08t+2.4 & si \quad 0\le t<40\\ \dfrac{40\cdot t-(40t-320)\cdot 1}{t^2}=\dfrac{320}{t^2} & si \quad 40< t\le 50\end{cases}$$

Calculamos la derivada por la derecha y por la izquierda de $t = 40$.

$$\begin{cases}B\left(40^-\right)=\lim\limits_{t\to 40^-}-0.08t+2.4=-0.8\\ B'\left(40^+\right)=\lim\limits_{t\to 40^+}\dfrac{320}{t^2}=\dfrac{320}{1600}=0.2\end{cases} \Rightarrow B\left(40^-\right)=-0.8\neq 0.2=B'\left(40^+\right)$$

La función no es derivable en $t = 40$.
La función es continua en el intervalo [0, 50] y derivable en [0, 40) ∪ (40, 50]

b) Utilizamos la derivada para encontrar los puntos críticos de la función.

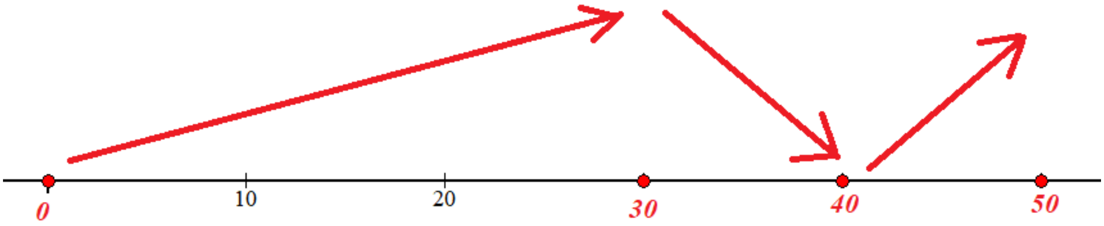
$$B'(t)=\begin{cases}-0.08t+2.4 & si \quad 0\le t<40\\ \dfrac{320}{t^2} & si \quad 40< t\le 50\end{cases}$$

$$B'(t)=0\Rightarrow\begin{cases}-0.08t+2.4=0\to t=\dfrac{2.4}{0.08}=30\in[0,40)\\ \dfrac{320}{t^2}=0\to \text{¡Imposible!}\end{cases}$$

El único punto crítico está en t = 30.
Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $t = 30$ y $t = 40$.

- En $(0,30)$ tomamos $t = 10$ y la derivada vale $B'(10)=-0.08\cdot 10+2.4=1.6>0$. La función crece en $(0,30)$.
- En $(30,40)$ tomamos $t = 35$ y la derivada vale $B'(35)=-0.08\cdot 35+2.4=-0.4<0$. La función decrece en $(30,40)$.
- En $(40,50)$ tomamos $t = 45$ y la derivada vale $B'(45)=\dfrac{320}{45^2}>0$. La función crece en $(40,50)$.

La función sigue el esquema siguiente.



Los beneficios B(t) crecen durante los 30 primeros años, decrecen entre el año 30 y 40 y vuelven a crecer entre el año 40 y 50.

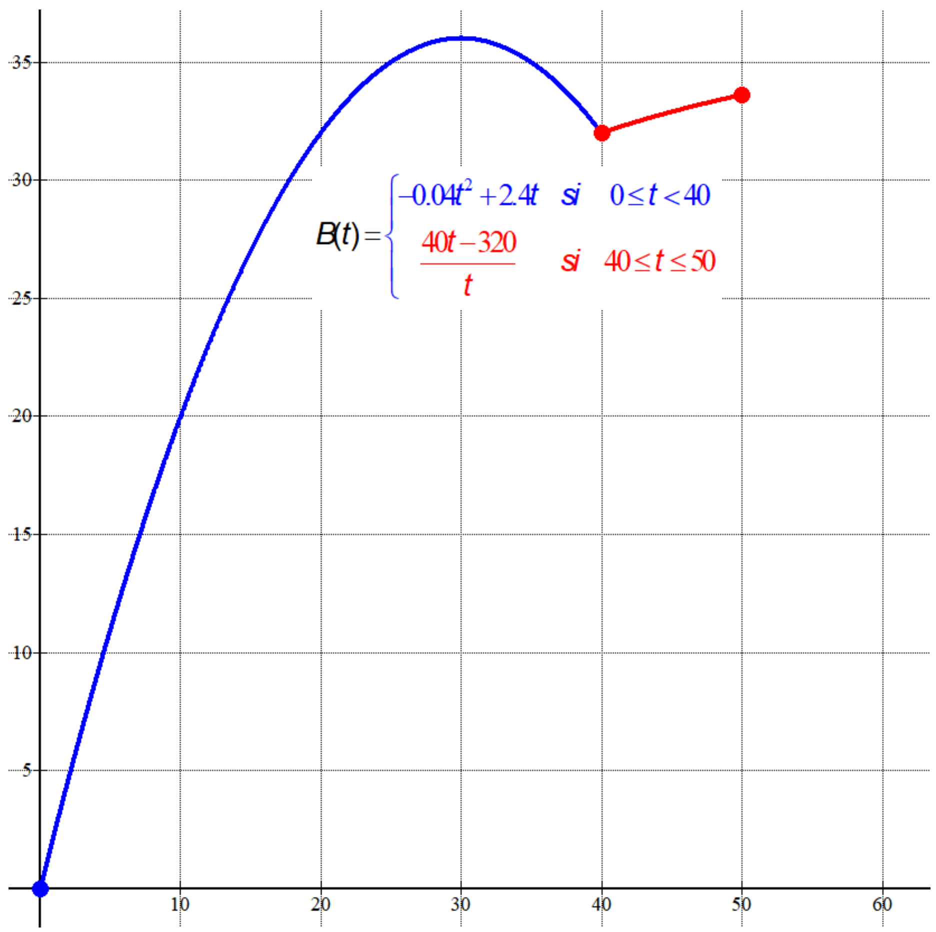
Valoramos los beneficios para $t = 0$, $t = 30$, $t = 40$ y $t = 50$ para encontrar el beneficio máximo conseguido.

$$B(0) = -0.04 \cdot 0^2 + 2.4 \cdot 0 = 0$$
$$B(30) = -0.04 \cdot 30^2 + 2.4 \cdot 30 = 36 \text{ ¡MÁXIMO!}$$
$$B(40) = \frac{40 \cdot 40 - 320}{40} = 32$$
$$B(50) = \frac{40 \cdot 50 - 320}{50} = 33.6$$

El máximo absoluto del beneficio se alcanza el año 30 y es de 36000 €.

c) Sabemos que la función es continua, que su máximo valor es de 36. Obtenemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

t	$B(t)$
0	0
10	$-4+24=20$
30	36
40	32
50	33.6



EJERCICIO 3

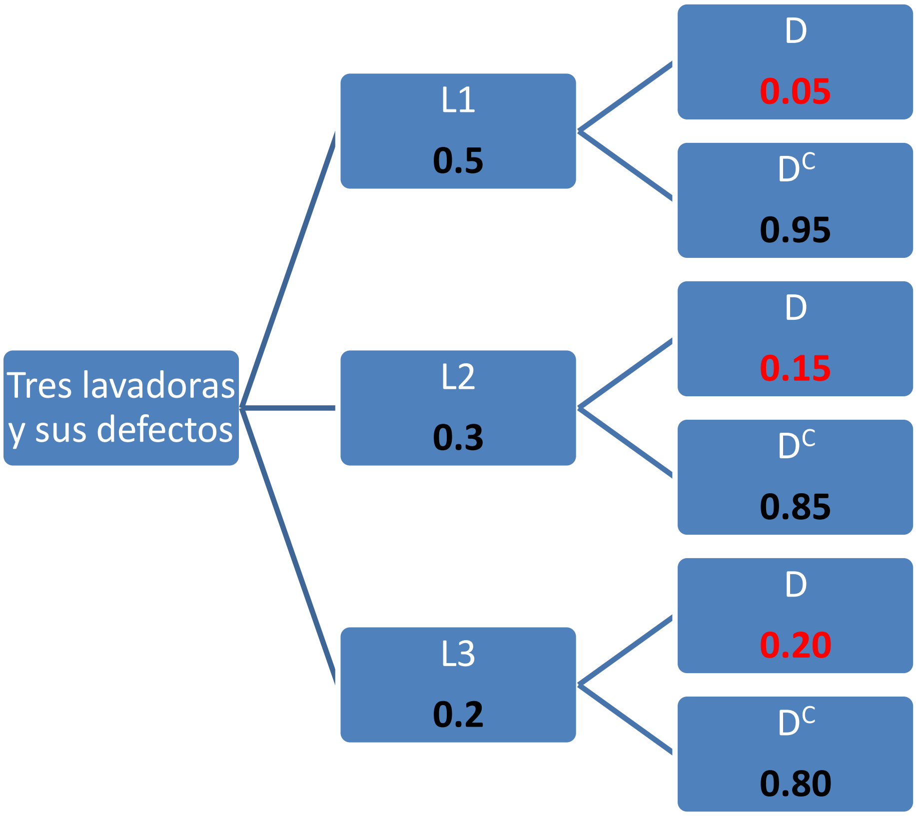
Un hotel dispone de tres lavadoras industriales L_1, L_2 y L_3 para el servicio de lavandería. El 50% de los lavados los realiza L_1, el 30% los hace L_2 y el resto L_3. La lavadora L_1 produce un 5% de lavados defectuosos, L_2 produce un 15% y L_3 un 20%. Se elige al azar un lavado de hotel.

a) **(1.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que no sea defectuoso.

b) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que el lavado haya sido realizado por L_1, sabiendo que ha sido defectuoso.

Hacemos un diagrama de árbol para aclarar las probabilidades del experimento.

Llamamos L_1 al suceso "Lavar con L_1", L_2 al suceso "Lavar con L_2", L_3 al suceso "Lavar con L_3" y D = "Lavado defectuoso" y D^C = "Lavado no defectuoso"



a) Utilizando las probabilidades que aparecen en el diagrama de árbol y según el teorema de la probabilidad total.

$$P\left(D^C\right)=P\left(L_1\right)P\left(D^C/L_1\right)+P\left(L_2\right)P\left(D^C/L_2\right)+P\left(L_3\right)P\left(D^C/L_3\right)=$$

$$=0.5\cdot 0.95+0.3\cdot 0.85+0.2\cdot 0.80=\boxed{0.89}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P\left(L_1/D\right)=\frac{P\left(L_1\cap D\right)}{P(D)}=\frac{P\left(L_1\right)P\left(D/L_1\right)}{1-P\left(D^C\right)}=\frac{0.5\cdot 0.05}{1-0.89}=\boxed{\frac{5}{22}\simeq 0.227}$$

EJERCICIO 4

La edad de los empleados de una empresa sigue una ley Normal de varianza 64 y media desconocida. Se toma una muestra aleatoria simple de 16 empleados de dicha empresa abatiéndose las siguientes edades:

30 42 38 45 52 60 21 26 33 44 28 49 37 41 38 40.

a) **(1.5 puntos)** Obtenga un intervalo de confianza para estimar la media de los empleados, con un nivel de confianza del 97%.

b) **(1 punto)** Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar la edad media de los empleados, con un error inferior a 2 años y nivel de confianza del 99%.

La desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza → $\sigma = \sqrt{64} = 8$

X = Edad de un empleado de una empresa.

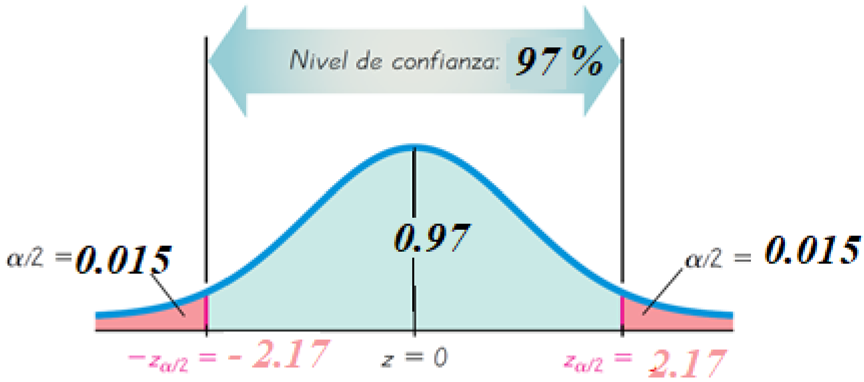
X = N(μ, 8)

n = 16 empleados

$$\bar{x} = \frac{30+42+38+45+52+60+21+26+33+44+28+49+37+41+38+40}{16} = 39 \text{ años}$$

Determinamos $z_{\alpha/2}$ con un nivel de confianza del 97 %.

$1 - \alpha = 0{,}97$ → $\alpha = 0{,}03$ → $\alpha/2 = 0'015$ → $1 - \alpha/2 = 0{,}985$ → $z_{\alpha/2}$ **= 2.17**



Calculamos el error del intervalo de confianza.

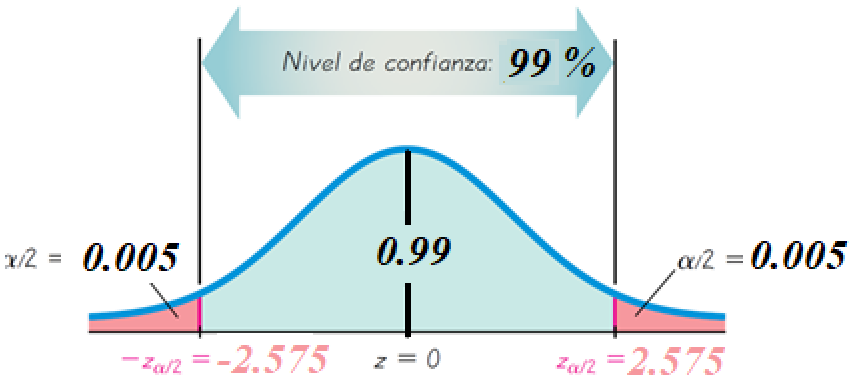
$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{8}{\sqrt{16}} = 4.34$$

El intervalo de confianza para la media es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(39 - 4.34, \quad 39 + 4.34\right) = \left(34.66, 43.34\right)$$

b) ¿n?

Determinamos $z_{\alpha/2}$ con un nivel de confianza del 99 %.



$1 - \propto = 0,99 \rightarrow \propto = 0,01 \rightarrow \propto/2 = 0'005 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0,995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.57 + 2.58}{2} = 2.575$

Igualamos el error del intervalo de confianza a 2.

$$Error = 2 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \Rightarrow 2.575 \cdot \frac{8}{\sqrt{n}} = 2 \Rightarrow 2.575 \cdot 8 = 2\sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2.575 \cdot 8}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \left(\frac{2.575 \cdot 8}{2} \right)^2 \simeq 106.09$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser entero y superior al hallado, es decir, de 107 empleados.