	PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD **ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA y CENTROS en MARRUECOS** CURSO 2018-2019	**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

Instrucciones:
a) Duración: 1 hora y 30 minutos
b) Elija una de las dos opciones propuestas y conteste los ejercicios de la opción elegida.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima que le corresponde.
d) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos.
e) Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma. Justifique las respuestas.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

(2'5 puntos) Una empresa textil quiere fabricar dos tipos de camisetas, lisas y estampadas. Para fabricar una camisera lisa necesita 70 g de algodón y 20 g de poliéster y para cada camiseta estampada 60 g de algodón y 10 g de poliéster. La empresa dispone para ello de 4200 g de algodón y 800g de poliéster.

Para que sea rentable debe fabricar al menos 10 estampadas y además, el doble de las estampadas debe ser al menos igual al número de lisas. Sabiendo que cada camiseta lisa da un beneficio de 5 euros y cada estampada de 4 euros, ¿cuántas camisetas de cada tipo debería fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál es ese beneficio?

EJERCICIO 2

Se considera la función $f(x)=x^3-9x+2$.

a) **(1 punto)** Obtenga las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica que sean paralelas a la recta $y=3x-3$.

b) **(1 punto)** Estudie la monotonía y la curvatura de la función *f*.

c) **(0.5 puntos)** Calcule $\int f(x)dx$

EJERCICIO 3

El 65 % de los turistas que visitan una provincia elige alojamientos en la capital y el resto en zonas rurales. Además, el 75 % de los turistas que se hospedan en la capital y el 15 % de los que se hospedan en zonas rurales lo hace en hoteles, mientras que el resto lo hace es apartamentos turísticos. Se elige al azar un turista de los que se han alojado en esa provincia.

a) **(1'5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que se haya hospedado en un hotel?

b) **(1 punto)** Si se sabe que se ha hospedado en un apartamento turístico, ¿cuál es la probabilidad de que el apartamento esté en zonas rurales?

EJERCICIO 4

Se desea estimar la proporción de individuos que piensan votar a un cierto partirlo político en una determinada ciudad. Para ello se toma una muestra aleatoria de 300 individuos de la ciudad, resultando que 135 de ellos piensan votar a ese partido.

a) **(1'5 puntos)** Calcule un intervalo de confianza al 97 % para la proporción de individuos que piensen votar a ese partido en dicha ciudad.

b) **(1 punto)** Suponiendo que se mantiene la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño mínimo de la muestra para estimar la proporción con un error inferior al 2%.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) **(0´5 puntos)** Razone si la matriz A es simétrica.
b) **(1 punto)** Calcule A^{-1}.
c) **(1 punto)** Resuelva la ecuación matricial $2X \cdot A - A^2 - 3I_3 = 0$

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & si \;\; x<0 \\ x^2+a & si \;\; x \geq 0 \end{cases}$.

a) **(1 punto)** Determine el valor del parámetro *a* para que *f* sea continua en todo su dominio. Para ese valor de *a*, estudie la derivabilidad de *f*.
b) **(1´5 puntos)** Para *a = –2*, estudie la monotonía y curvatura de la función *f*. ¿Tiene algún punto de inflexión?

EJERCICIO 3

El 69 % de los habitantes de una determinada ciudad ven series, el 35% películas y el 18% no ven ni series ni películas. Se elige al azar un habitante de la ciudad.
a) **(0’75 puntos)** Calcule la probabilidad de que vea series o películas.
b) **(1 punto)** Sabiendo que ve series, calcule la probabilidad de que vea películas.
c) **(0’75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que vea series y no vea películas?

EJERCICIO 4

Los directivos de una empresa desean estimar el tiempo medio que tardan los empleados en llegar al puesto de trabajo desde sus domicilios. Admitimos que dicho tiempo sigue una distribución Normal de desviación típica 8 minutos. Se elige al azar una muestra de 9 empleados de esa empresa, obteniéndose los siguientes resultados, expresados en minutos:

10 17 8 27 6 9 32 5 21

a) **(1’5 puntos)** Determine un intervalo de confianza al 92 % para la media poblacional.
b) **(1 punto)** Con una confianza del 95’5 %, ¿qué tamaño muestral mínimo sería necesario para estimar el tiempo medio con un error inferior a 1’5 minutos?

SOLUCIONES

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

(2'5 puntos) Una empresa textil quiere fabricar dos tipos de camisetas, lisas y estampadas. Para fabricar una camisera lisa necesita 70 g de algodón y 20 g de poliéster y para cada camiseta estampada 60 g de algodón y 10 g de poliéster. La empresa dispone para ello de 4200 g de algodón y 800g de poliéster.

Para que sea rentable debe fabricar al menos 10 estampadas y además, el doble de las estampadas debe ser al menos igual al número de lisas. Sabiendo que cada camiseta lisa da un beneficio de 5 euros y cada estampada de 4 euros, ¿cuántas camisetas de cada tipo debería fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál es ese beneficio?

Es un problema de programación lineal.
Sea x = nº de camisetas lisas e y = nº de camisetas estampadas.

	Algodón	Poliéster	Beneficio
Camisetas lisas (x)	70x	20x	5x
Camisetas estampadas (y)	60y	10y	4y
TOTALES	$70x+60y$	$20x+10y$	$5x+4y$

La función objetivo es el beneficio que deseamos maximizar: $B(x,y)=5x+4y$.

Las restricciones son:

"*La empresa dispone para ello de 4200 g de algodón*" → $70x+60y\leq 4200$

"*La empresa dispone para ello de 800 g de poliéster*" → $20x+10y\leq 800$

"*Debe fabricar al menos 10 estampadas*" → $y\geq 10$

"*El doble de las estampadas debe ser al menos igual al número de lisas*" → $2y\geq x$

"Las cantidades deben ser positivas" → $x\geq 0;\ y\geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l}70x+60y\leq 4200\\20x+10y\leq 800\\y\geq 10\\2y\geq x\\x\geq 0;\ y\geq 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}7x+6y\leq 420\\2x+y\leq 80\\y\geq 10\\2y\geq x\\x\geq 0;\ y\geq 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}6y\leq 420-7x\\y\leq 80-2x\\y\geq 10\\2y\geq x\\x\geq 0;\ y\geq 0\end{array}\right\}$$

Representamos las rectas asociadas a las inecuaciones y que delimitan la región factible.

$x\geq 0;\ y\geq 0$ — *Primer cuadrante*

$6y=420-7x$

x	$y=\dfrac{420-7x}{6}$
0	70
30	35

$y=80-2x$

x	$y=80-2x$
0	80
40	0

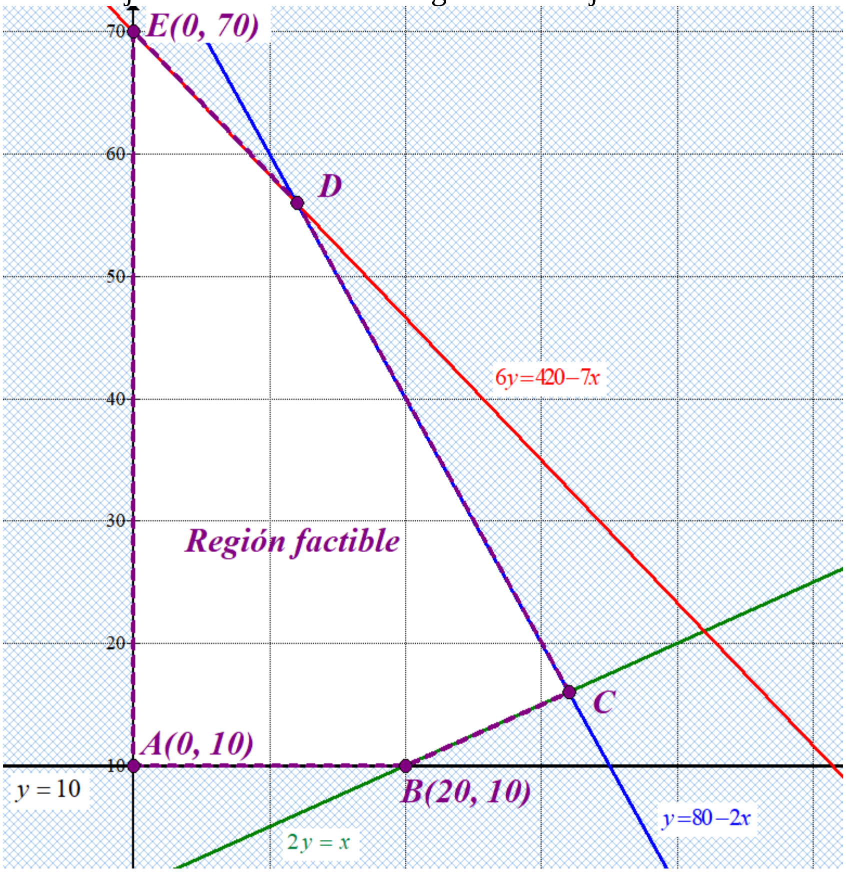
$y=10$

x	$y=10$
0	10
20	10

$2y=x$

x	$y=\dfrac{x}{2}$
0	0
20	10

Dado que las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 6y \leq 420 - 7x \\ y \leq 80 - 2x \\ y \geq 10 \\ 2y \geq x \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por encima de la recta horizontal negra y la recta verde, y por debajo de las rectas roja y azul. La dejamos en blanco en el siguiente dibujo.



Se aprecian las coordenadas de los vértices A, B y E, pero falta determinar las coordenadas de los vértices C y D que obtenemos resolviendo los sistemas de ecuaciones correspondientes.

$$C \to \begin{cases} y = 80 - 2x \\ 2y = x \end{cases} \Rightarrow y = 80 - 4y \Rightarrow 5y = 80 \Rightarrow y = \frac{80}{5} = 16 \Rightarrow x = 32 \Rightarrow \boxed{C(32,16)}$$

$$D \to \begin{cases} 6y = 420 - 7x \\ y = 80 - 2x \end{cases} \Rightarrow 480 - 12x = 420 - 7x \Rightarrow 60 = 5x \Rightarrow x = \frac{60}{5} = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 80 - 24 = 56 \Rightarrow \boxed{D(12,56)}$$

Valoramos la función objetivo $B(x,y) = 5x + 4y$ en cada uno de los vértices en busca del valor máximo.

A(0, 10) → $B(0,10) = 40$

B(20, 10) → $B(20,10) = 100 + 40 = 140$

C(32, 16) → $B(32,16) = 160 + 64 = 224$

D(12, 56) → $B(12,56) = 60 + 224 = 284$ ¡¡Máximo!!

E(0, 70) → $B(0,70) = 280$

El máximo beneficio que se puede obtener con las condiciones impuestas en el problema es de 284 € y se obtiene con la fabricación de 12 camisetas lisas y 56 estampadas.

EJERCICIO 2

Se considera la función $f(x) = x^3 - 9x + 2$.

a) **(1 punto)** Obtenga las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica que sean paralelas a la recta $y = 3x - 3$.

b) **(1 punto)** Estudie la monotonía y la curvatura de la función *f*.

c) **(0.5 puntos)** Calcule $\int f(x)\,dx$

a) La recta $y = 3x - 3$ tiene pendiente 3, por lo que debemos buscar los valores de *x* para los que la derivada vale 3.

$$f(x) = x^3 - 9x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 9$$
$$f'(x) = 3 \Rightarrow 3x^2 - 9 = 3 \Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} \Rightarrow \boxed{x = \pm 2}$$

Calculamos la recta tangente a la función en $x = 2$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ f(2) = (2)^3 - 9(2) + 2 = -8 \\ f'(2) = 3(2)^2 - 9 = 3 \\ \text{Tgte} \to y - f(2) = f'(2)(x-2) \end{array}\right\} \Rightarrow y - (-8) = 3(x-2) \Rightarrow y + 8 = 3x - 6 \Rightarrow \boxed{y = 3x - 14}$$

Calculamos la recta tangente a la función en $x = -2$

$$\left.\begin{array}{l} x = -2 \\ f(-2) = (-2)^3 - 9(-2) + 2 = 12 \\ f'(-2) = 3(-2)^2 - 9 = 3 \\ \text{Tgte} \to y - f(-2) = f'(-2)(x-(-2)) \end{array}\right\} \Rightarrow y - 12 = 3(x+2) \Rightarrow \boxed{y = 3x + 18}$$

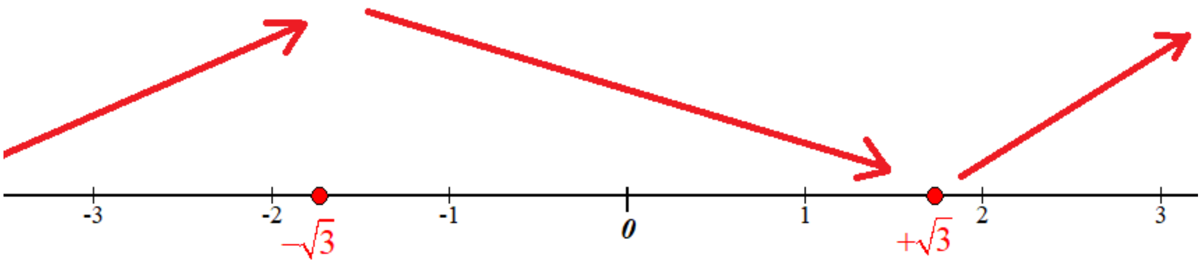
b) Utilizamos la derivada de la función para encontrar sus puntos críticos.

$$f(x) = x^3 - 9x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 9$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 9 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 9 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{3}}$$

Estudiamos la variación del signo de la derivada antes, entre y después de $x = -\sqrt{3}$ y $x = +\sqrt{3}$.

- En $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = 3(-2)^2 - 9 = 3 > 0$. La función crece en $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)$.
- En $\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = -9 < 0$. La función decrece en $\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$.
- En $\left(\sqrt{3}, +\infty\right)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = 3(2)^2 - 9 = 3 > 0$. La función crece en $\left(\sqrt{3}, +\infty\right)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$ y decrece en $\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$

Para estudiar la curvatura utilizo la segunda derivada.

$$f'(x)=3x^2-9 \Rightarrow f''(x)=6x$$
$$f''(x)=0 \Rightarrow 6x=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

Como se aprecia en el esquema superior la función presenta un punto de inflexión en $x = 0$.
Como $f(0)=2$ el punto de inflexión tiene coordenadas (0, 2).

La función es cóncava (∩) en $(-\infty,0)$ y convexa (∪) en $(0,+\infty)$.

c) Calculamos la integral pedida.

$$\int f(x)dx=\int x^3-9x+2dx=\boxed{\frac{x^4}{4}-9\frac{x^2}{2}+2x+K}$$

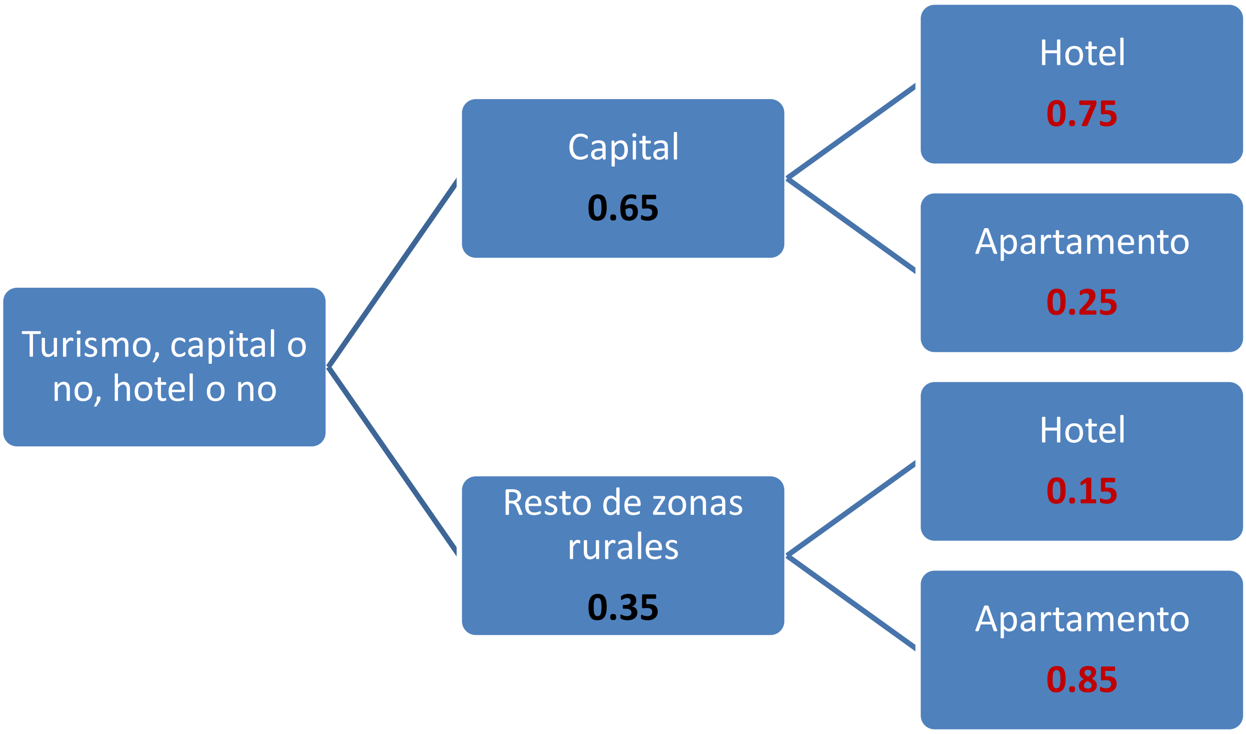
EJERCICIO 3

El 65 % de los turistas que visitan una provincia elige alojamientos en la capital y el resto en zonas rurales. Además, el 75 % de los turistas que se hospedan en la capital y el 15 % de los que se hospedan en zonas rurales lo hace en hoteles, mientras que el resto lo hace es apartamentos turísticos. Se elige al azar un turista de los que se han alojado en esa provincia.

a) **(1'5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que se haya hospedado en un hotel?

b) **(1 punto)** Si se sabe que se ha hospedado en un apartamento turístico, ¿cuál es la probabilidad de que el apartamento esté en zonas rurales?

Realizamos un diagrama de árbol de la situación planteada.



Llamamos H al suceso "El turista se hospeda en hotel", y C al suceso "El turista se aloja en la capital". Por lo que $\overline{H}$ es el suceso "El turista se aloja en apartamento" y $\overline{C}$ es el suceso "El turista se aloja en el resto de zonas rurales".

a) Utilizamos el teorema de la probabilidad total y los datos proporcionados en el diagrama de árbol.

$$P(H) = P(C)P(H/C) + P(\overline{C})P(H/\overline{C}) = 0.65\cdot 0.75 + 0.35\cdot 0.15 = \boxed{\frac{27}{50} = 0.54}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(\overline{C}/\overline{H}) = \frac{P(\overline{C}\cap\overline{H})}{P(\overline{H})} = \frac{P(\overline{C})P(\overline{H}/\overline{C})}{1-P(H)} = \frac{0.35\cdot 0.85}{1-0.54} = \boxed{\frac{119}{184} \simeq 0.65}$$

EJERCICIO 4

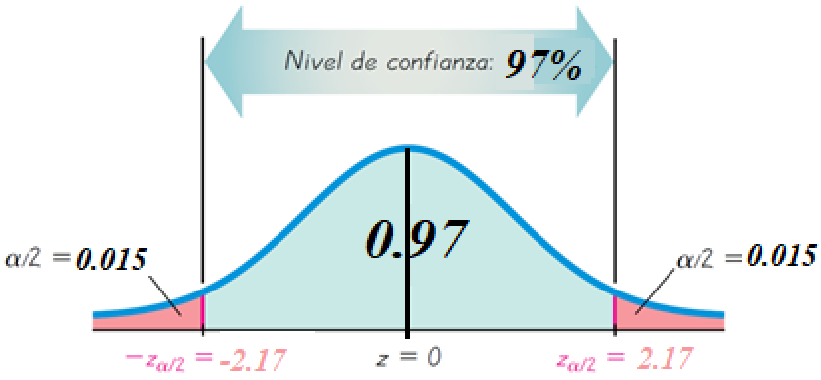
Se desea estimar la proporción de individuos que piensan votar a un cierto partirlo político en una determinada ciudad. Para ello se toma una muestra aleatoria de 300 individuos de la ciudad, resultando que 135 de ellos piensan votar a ese partido.

a) **(1'5 puntos)** Calcule un intervalo de confianza al 97 % para la proporción de individuos que piensen votar a ese partido en dicha ciudad.

b) **(1 punto)** Suponiendo que se mantiene la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza del apartado anterior, determine el tamaño mínimo de la muestra para estimar la proporción con un error inferior al 2%.

n = 300. $p=\dfrac{135}{300}=0.45 \rightarrow q=1-p=1-0.45=0.55$

a) Con un nivel de confianza del 97 % tenemos



$1 - \propto = 0{,}97 \rightarrow \propto = 0{,}03 \rightarrow \propto/2 = 0'015 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.17}$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	$\boxed{0.9850}$
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.45 \cdot 0.55}{300}} \simeq 0.06233$$

El intervalo de confianza para la proporción es:

$$\left(p-Error,\ p+Error\right)=\left(0.45-0.06233,\quad 0.45+0.06233\right)=\left(0.38767,\ 0.51233\right)$$

b) ¿n?
Con un nivel de confianza del 97 % tenemos $z_{\alpha/2}$ **= 2.17**

$$Error=0.02\Rightarrow z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}=0.02\Rightarrow 2.17\cdot\sqrt{\frac{0.45\cdot 0.55}{n}}=0.02\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{\frac{0.45\cdot 0.55}{n}}=\frac{0.02}{2.17}\Rightarrow\frac{0.45\cdot 0.55}{n}=\left(\frac{0.02}{2.17}\right)^2\Rightarrow n=\frac{0.45\cdot 0.55}{\left(\frac{0.02}{2.17}\right)^2}\approx 2913.631875$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser entero y superior al hallado, es decir, de 2914 votantes.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&2&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$.

a) **(0´5 puntos)** Razone si la matriz A es simétrica.

b) **(1 punto)** Calcule A^{-1}.

c) **(1 punto)** Resuelva la ecuación matricial $2X\cdot A-A^2-3I_3=0$

a) Una matriz cuadrada A es simétrica si A = A^t, es decir coincide con su traspuesta.

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&2&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&2&1\\0&-1&1\end{pmatrix}=A^t$$

No coinciden los elementos marcados de rojo, por lo que no es simétrica.

b) Comprobamos si existe la inversa de A.

$$|A|=\begin{vmatrix}1&-2&0\\-2&2&-1\\0&1&1\end{vmatrix}=2+0+0-0-4+1=-1\neq 0$$

Como el determinante es no nulo existe la inversa.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&2&1\\0&-1&1\end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}2&1\\-1&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}-2&1\\0&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}-2&2\\0&-1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}-2&0\\-1&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&-2\\0&-1\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}-2&0\\2&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\-2&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&-2\\-2&2\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=-\begin{pmatrix}3&2&2\\2&1&1\\-2&-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-2&-2\\-2&-1&-1\\2&1&2\end{pmatrix}}$$

c) Despejamos X en la ecuación $2X\cdot A-A^2-3I_3=0$.

$$2X\cdot A-A^2-3I_3=0\Rightarrow 2X\cdot A=A^2+3I_3\Rightarrow 2X\cdot A\cdot A^{-1}=A^2\cdot A^{-1}+3I_3\cdot A^{-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2X=A\cdot A\cdot A^{-1}+3A^{-1}\Rightarrow 2X=A\cdot I_3+3A^{-1}\Rightarrow 2X=A+3A^{-1}\Rightarrow X=\frac{1}{2}\left(A+3A^{-1}\right)$$

Calculamos el valor de X.

$$X=\frac{1}{2}\left(A+3A^{-1}\right)=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-3 & -2 & -2\\ -2 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}\right]$$

$$X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-9 & -2-6 & 0-6\\ -2-6 & 2-3 & -1-3\\ 0+6 & 1+3 & 1+6\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-8 & -8 & -6\\ -8 & -1 & -4\\ 6 & 4 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -4 & -3\\ -4 & -1/2 & -2\\ 3 & 2 & 7/2\end{pmatrix}}$$

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & si \;\; x<0\\ x^2+a & si \;\; x\geq 0\end{cases}$.

a) **(1 punto)** Determine el valor del parámetro *a* para que *f* sea continua en todo su dominio. Para ese valor de *a*, estudie la derivabilidad de *f*.

b) **(1´5 puntos)** Para *a* = –2, estudie la monotonía y curvatura de la función *f*. ¿Tiene algún punto de inflexión?

a) Para *x* < *0* la función es $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ $si \;\; x<0$ que es continua pues el denominador se anula para $x = 1 \notin (-\infty,0)$.

Para *x* > *0* la función es $f(x)=x^2+a$ $si \;\; x>0$ que es continua pues es una función polinómica.

Falta ver que sea continua en *x* = *0* , en el cambio de definición.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0^2+a=a \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{-1}=-1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^2+a=a \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a=-1}$$

Para *a* = *–1* la función es continua. Estudiamos su derivabilidad.

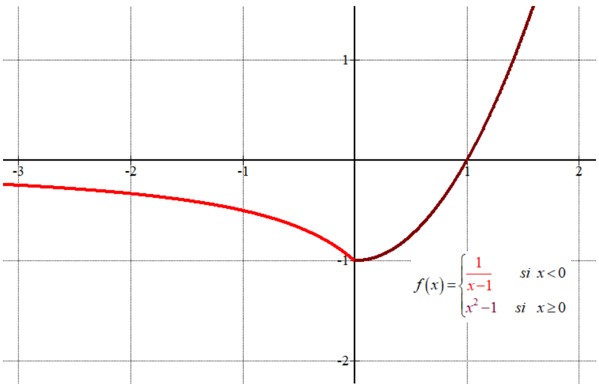
En cada rama es derivable pues una de las ramas es una fracción de polinomios donde no se anula el denominador y la otra rama es una función polinómica.

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{(x-1)^2} & si \;\; x<0\\ 2x & si \;\; x>0\end{cases}$$

Estudiamos su derivabilidad en *x* = *0.*

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-1}{(x-1)^2}=\dfrac{-1}{1}=-1 \\ f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} 2x=0\end{array}\right\} \Rightarrow f'(0^-)=-1\neq 0=f'(0^+)$$

Al no coincidir las derivadas laterales la función no es derivable en *x* = *0.*



b) Para $a = -2$ la función queda $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & si \quad x < 0 \\ x^2 - 2 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$.

Utilizamos la derivada para encontrar sus posibles puntos críticos.

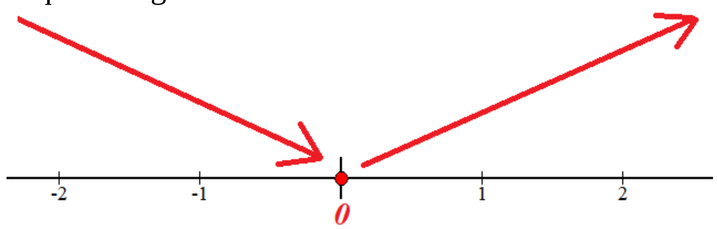
$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(x-1)^2} & si \quad x < 0 \\ 2x & si \quad x > 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-1}{(x-1)^2} = 0 \to \text{¡No es posible} \\ \text{o} \\ 2x = 0 \to x = 0 \notin (0, +\infty) \end{cases}$$

La función no presenta puntos críticos (cambio de signo de la derivada). Veamos el signo de la derivada en $(-\infty, 0)$ y en $(0, +\infty)$.

- En $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = \dfrac{-1}{(-1-1)^2} = \dfrac{-1}{4} < 0$. La función decrece en $(-\infty, 0)$.
- En $(0, +\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 2 > 0$. La función crece en $(0, +\infty)$

La función sigue el esquema siguiente:



La función decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$.

Para estudiar la curvatura utilizo la derivada segunda.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{(x-1)^2} & si \quad x < 0 \\ 2x & si \quad x > 0 \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(x-1)^3} & si \quad x < 0 \\ 2 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

Tampoco se anula en ningún valor del dominio.

- En $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada segunda vale $f''(-1) = \dfrac{2}{(-1-1)^3} = \dfrac{-1}{4} < 0$. La función es cóncava (∩) en $(-\infty, 0)$.
- En $(0, +\infty)$ tomamos $x = 1$ y la derivada segunda vale $f''(1) = 2 > 0$. La función es convexa (∪) en $(0, +\infty)$.

La función es cóncava (∩) en $(-\infty, 0)$ y convexa (∪) en $(0, +\infty)$.

EJERCICIO 3

El 69 % de los habitantes de una determinada ciudad ven series, el 35% películas y el 18% no ven ni series ni películas. Se elige al azar un habitante de la ciudad.

a) **(0'75 puntos)** Calcule la probabilidad de que vea series o películas.

b) **(1 punto)** Sabiendo que ve series, calcule la probabilidad de que vea películas.

c) **(0'75 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que vea series y no vea películas?

Realizamos una tabla de contingencia para obtener toda la información sobre esta situación planteada.

	Ven películas	No ven películas	
Ven series			**69**
No ven series		**18**	
	35		**100**

Completamos la tabla.

	Ven películas	No ven películas	
Ven series	**22**	**47**	**69**
No ven series	**13**	**18**	**31**
	35	**65**	**100**

a) Aplicamos la regla de Laplace. De 100 habitantes hay 22 + 47 + 13 = 82 que ven series o películas.

$$P(\text{Vea series o películas}) = \frac{82}{100} = \boxed{0.82}$$

b) Aplicamos la regla de Laplace. De los 69 habitantes que ven series 22 además ven películas.

$$P(\text{Vea películas / Ve series}) = \boxed{\frac{22}{69} \simeq 0.319}$$

c) Aplicamos la regla de Laplace. De los 100 habitantes hay 47 que ven series y no ven películas.

$$P(\text{Vea series y no vea películas}) = \frac{47}{100} = \boxed{0.47}$$

EJERCICIO 4

Los directivos de una empresa desean estimar el tiempo medio que tardan los empleados en llegar al puesto de trabajo desde sus domicilios. Admitimos que dicho tiempo sigue una distribución Normal de desviación típica 8 minutos. Se elige al azar una muestra de 9 empleados de esa empresa, obteniéndose los siguientes resultados, expresados en minutos:

10 17 8 27 6 9 32 5 21

a) **(1'5 puntos)** Determine un intervalo de confianza al 92 % para la media poblacional.

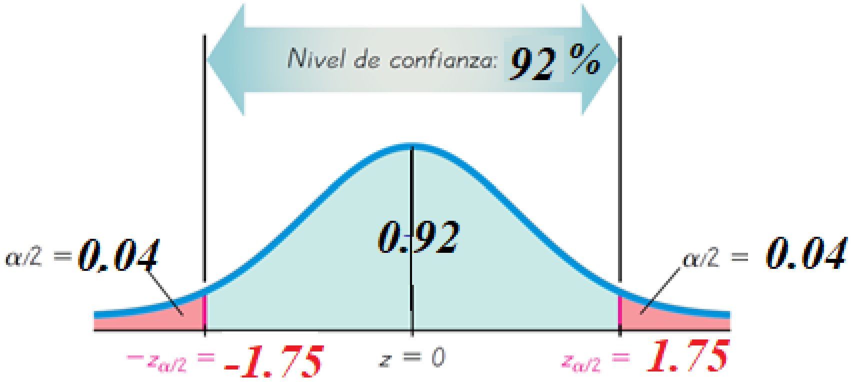
b) **(1 punto)** Con una confianza del 95'5 %, ¿qué tamaño muestral mínimo sería necesario para estimar el tiempo medio con un error inferior a 1'5 minutos?

X = Tiempo medio que tarda un empleado en llegar al puesto de trabajo desde su domicilio expresado en minutos.

X = N(μ, 8)

n = 9 empleados $\quad \bar{x} = \frac{10+17+8+27+6+9+32+5+21}{9} = \frac{135}{9} = 15$ minutos

a) Determinamos $z_{\alpha/2}$ con un nivel de confianza del 92 %.



1 – ∝ = 0,92 → ∝ = 0,08 → ∝/2 = 0'04 → 1 – ∝/2 = 0,96 → $z_{\alpha/2}$ = **1.75**

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	$\boxed{0.9599}$	0.9
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9

Calculamos el error del intervalo de confianza.

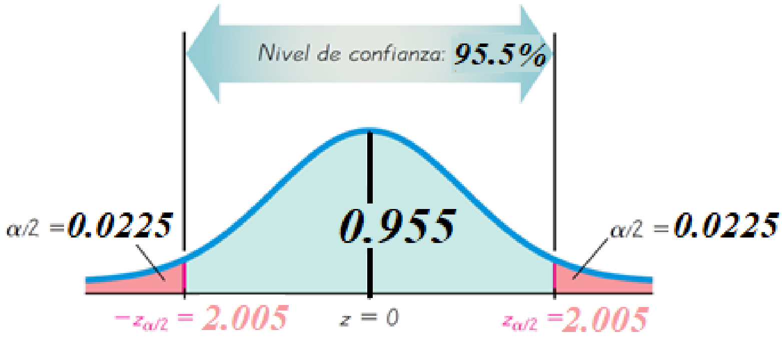
$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.75 \cdot \frac{8}{\sqrt{9}} = \frac{14}{3} \simeq 4.667$$

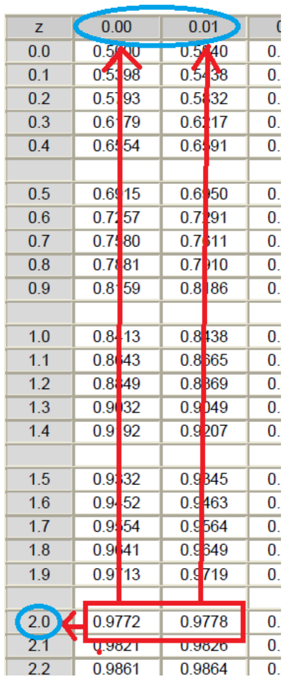
El intervalo de confianza para la media es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(15 - 4.667, \quad 15 + 4.667\right) = \left(10.333, 19.667\right)$$

b) ¿n?

Determinamos $z_{\alpha/2}$ con un nivel de confianza del 95.5 %.





z	0.00	0.01	0.
0.0	[illegible]	[illegible]	0.
0.1	[illegible]	[illegible]	0.
0.2	[illegible]	[illegible]	0.
0.3	[illegible]	[illegible]	0.
0.4	[illegible]	[illegible]	0.
0.5	[illegible]	[illegible]	0.
0.6	[illegible]	[illegible]	0.
0.7	[illegible]	[illegible]	0.
0.8	[illegible]	[illegible]	0.
0.9	[illegible]	[illegible]	0.
1.0	[illegible]	[illegible]	0.
1.1	[illegible]	[illegible]	0.
1.2	[illegible]	[illegible]	0.
1.3	[illegible]	[illegible]	0.
1.4	[illegible]	[illegible]	0.
1.5	[illegible]	[illegible]	0.
1.6	[illegible]	[illegible]	0.
1.7	[illegible]	[illegible]	0.
1.8	[illegible]	[illegible]	0.
1.9	[illegible]	[illegible]	0.
2.0	0.9772	0.9778	0.
2.1	0.9821	0.9826	0.
2.2	0.9861	0.9864	0.

1 – ∝ = 0,955 → ∝ = 0,045 →∝/2 = 0'0225 →

→ 1 – ∝/2 = 0,9775 → $z_{\alpha/2} = \; = \dfrac{2.00 + 2.01}{2} = 2.005$

Igualamos el error del intervalo de confianza a 1.5.

$$Error = 1.5 \Rightarrow z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.5 \Rightarrow 2.005 \cdot \frac{8}{\sqrt{n}} = 1.5 \Rightarrow 2.005 \cdot 8 = 1.5\sqrt{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{8 \cdot 2.005}{1.5} \Rightarrow n = \left(\frac{8 \cdot 2.005}{1.5}\right)^2 \simeq 114.347$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser entero y superior al hallado, es decir, de 115 empleados.