EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)

FASE GENERAL

CURSO 2016–2017

MATERIA: MATEMÁTICAS II

Convocatoria: Julio

. Elija una de las opciones A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones el tribunal podrá anular su examen.
. En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.

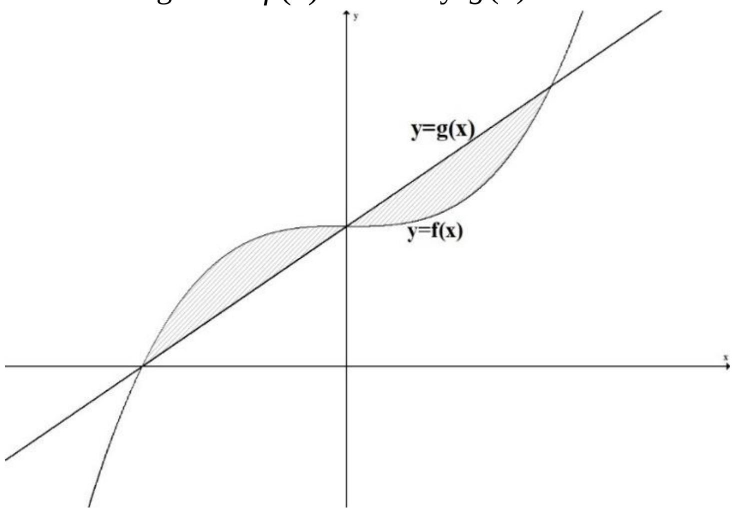
OPCIÓN A

1. Determinar los valores de a y b para que la función *f* definida de la forma

$$f(x)=\begin{cases} x^2+4x+a & si \quad x\le 2 \\ -x^2+bx & si \quad x>2 \end{cases}$$

Sea derivable en todo $x\in\mathbb{R}$ (2,5 ptos)

2. Calcular el área de la región sombreada en la siguiente figura, siendo las ecuaciones de las funciones que aparecen en la gráfica $f(x)=x^3+1$ y $g(x)=x+1$ (2,5 ptos)



3. Sea M la matriz $M=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones matriciales

$$\left.\begin{array}{l} 2X+3Y=M \\ 3X-2Y=M^{-1} \end{array}\right\}$$ (2,5 puntos)

4. Dado el plano $\pi: 2x+y-z=0$ y la recta $r:\begin{cases} x-y+z=3 \\ 2x+y=1 \end{cases}$ se pide

a) Escribir la ecuación de la recta r en forma continua (1,25 puntos)
b) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P(1,2,1), es paralelo a la recta r y perpendicular al plano π. (1,25 puntos)

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)
FASE GENERAL
CURSO 2016–2017

MATERIA: MATEMÁTICAS II	(2)
	Convocatoria: Julio

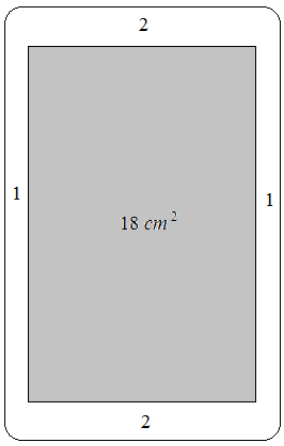
Instrucciones:
. Elija una de las opciones A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones el tribunal podrá anular su examen.
. En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.

OPCIÓN B

1. Calcular los siguientes límites

a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2\cos x}{sen\left(x^2\right)}$ (1,25 puntos) b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2-\dfrac{x}{4}}{x^2}$ (1,25 puntos)

2. Se quiere fabricar un smartphone con una pantalla LCD de 18 cm^2. Los bordes superior e inferior han de tener 2 cm cada uno y los bordes laterales 1 cm. Calcular las dimensiones del teléfono para que la superficie del mismo sea mínima. (2,5 puntos)



3. Hallar la matriz X que cumple la ecuación matricial $A^{-1}XA=B$ siendo $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}$ y

$B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ (2,5 puntos)

4. Dados la recta $r: x=y+1=\dfrac{z-\dfrac{11}{m}}{\dfrac{-3}{m}}$ y el plano $\pi: 2x+y+z=9$ se pide

a) Calcular el valor del parámetro m para que la recta r sea paralela al plano π (1,25 puntos)
b) Para m = 2, determinar el punto de intersección de la recta r y el plano π (1,25 puntos)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. Determinar los valores de a y b para que la función *f* definida de la forma

$$f(x)=\begin{cases} x^2+4x+a & si \quad x\le 2 \\ -x^2+bx & si \quad x>2 \end{cases}$$

Sea derivable en todo $x\in\mathbb{R}$ (2,5 ptos)

Para ser derivable primero debe ser continua y para ello debe serlo en x = 2 y debe cumplirse:

- Existe $f(2)=4+8+a=12+a$.
- Existe $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} x^2+4x+a=4+8+a=12+a$
- Existe $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} -x^2+bx=-4+2b$
- Los tres valores deben ser iguales. $12+a=-4+2b \Rightarrow a=-16+2b$

Para ser derivable, debe serlo en x = 2 y para ello deben coincidir las derivadas laterales en x = 2.

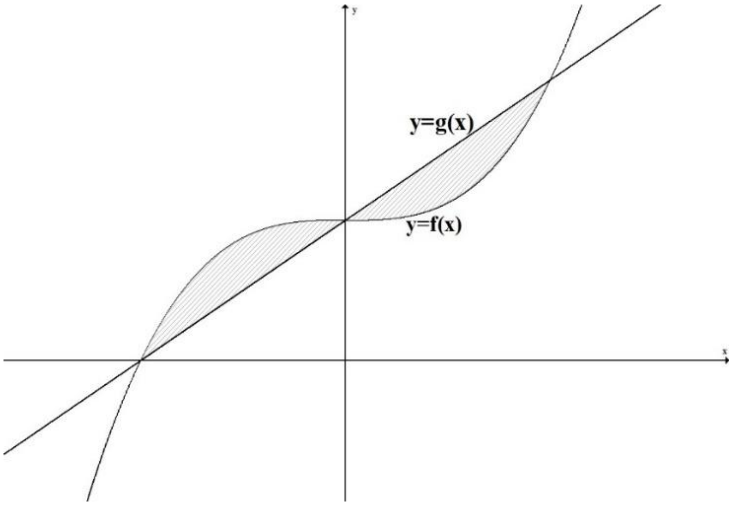
$$f(x)=\begin{cases} x^2+4x+a & si \quad x\le 2 \\ -x^2+bx & si \quad x>2 \end{cases} \Rightarrow f\,'(x)=\begin{cases} 2x+4 & si \quad x<2 \\ -2x+b & si \quad x>2 \end{cases}$$

Debe cumplirse $\left.\begin{array}{l} f\,'(2^-)=4+4=8 \\ f\,'(2^+)=-4+b \end{array}\right\} \Rightarrow 8=-4+b \Rightarrow \boxed{b=12}$

Sustituyendo $a=-16+2\cdot 12=24-16=8$

Los valores pedidos son $a=8$ y $b=12$.

2. Calcular el área de la región sombreada en la siguiente figura, siendo las ecuaciones de las funciones que aparecen en la gráfica $f(x)=x^3+1$ y $g(x)=x+1$ (2,5 ptos)



Veamos donde se cortan las funciones.

$$f(x)=g(x)\Rightarrow x^3+1=x+1\Rightarrow x^3-x=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\left(x^2-1\right)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ x^2-1=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ x=-1\end{cases}\end{cases}$$

El área de la región pedida se divide en dos integrales definidas ya que se cruzan las funciones en los puntos $x=-1$, $x=0$ y $x=1$.

Calculemos el valor de las integrales definidas.

$$\int_{-1}^{0} x^3+1-\left(x+1\right)dx=\int_{-1}^{0} x^3+1-x-1dx=\int_{-1}^{0} x^3-xdx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}=$$

$$=\left[\frac{0^4}{4}-\frac{0^2}{2}\right]-\left[\frac{1^4}{4}-\frac{1^2}{2}\right]=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$\int_{0}^{1} x+1-\left(x^3+1\right)dx=\int_{0}^{1} x+1-x^3-1dx=\int_{0}^{1} x-x^3dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1}=$$

$$=\left[\frac{1^2}{2}-\frac{1^4}{4}\right]-\left[\frac{0^2}{2}-\frac{0^4}{4}\right]=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

El área pedida es $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\boxed{\frac{1}{2}u^2}$

3. Sea M la matriz $M=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 7\end{pmatrix}$. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones matriciales

$$\left.\begin{array}{l}2X+3Y=M\\ 3X-2Y=M^{-1}\end{array}\right\}$$

(2,5 puntos)

$$\left.\begin{array}{l}2X+3Y=M\\ 3X-2Y=M^{-1}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc}\multicolumn{4}{l}{2\cdot\text{Ecuación }2^{a}\text{ - }3\cdot\text{Ecuación }1^{a}}\\ 6X & -4Y & = & 2M^{-1}\\ -6X & -9Y & = & -3M\\ \hline & -13Y & = & 2M^{-1}-3M\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}2X+3Y=M\\ -13Y=2M^{-1}-3M\end{array}\right\}$$

Para poder proseguir necesitamos calcular la inversa de M.

$$|M|=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 7\end{vmatrix}=-1\neq 0$$

$$M^{-1}=\frac{Adj\left(M^{t}\right)}{|M|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 7\end{pmatrix}}{-1}=\frac{\begin{pmatrix}7 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix}-7 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Seguimos con el sistema

$$\left.\begin{array}{r}2X+3Y=M\\ -13Y=2M^{-1}-3M\end{array}\right\}\Rightarrow -13Y=2\begin{pmatrix}-7 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14 & 2-3\\ 2-3 & -21\end{pmatrix}$$

$$-13Y=\begin{pmatrix}-14 & -1\\ -1 & -21\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{Y=\frac{1}{13}\begin{pmatrix}14 & 1\\ 1 & 21\end{pmatrix}}$$

$$2X+3Y=M\Rightarrow 2X+\frac{3}{13}\begin{pmatrix}14 & 1\\ 1 & 21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 7\end{pmatrix}$$

$$2X=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 7\end{pmatrix}-\frac{3}{13}\begin{pmatrix}14 & 1\\ 1 & 21\end{pmatrix}$$

$$2X=\begin{pmatrix}-\frac{42}{13} & 1-\frac{3}{13}\\ 1-\frac{3}{13} & 7-\frac{63}{13}\end{pmatrix}\Rightarrow 2X=\begin{pmatrix}-\frac{42}{13} & \frac{10}{13}\\ \frac{10}{13} & \frac{28}{13}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}-\frac{21}{13} & \frac{5}{13}\\ \frac{5}{13} & \frac{14}{13}\end{pmatrix}}$$

La solución es $X=\frac{1}{13}\begin{pmatrix}-21 & 5\\ 5 & 14\end{pmatrix};\ Y=\frac{1}{13}\begin{pmatrix}14 & 1\\ 1 & 21\end{pmatrix}$

4. Dado el plano $\pi: 2x+y-z=0$ y la recta $r:\begin{cases} x-y+z=3 \\ 2x+y=1 \end{cases}$ se pide

a) Escribir la ecuación de la recta r en forma continua (1,25 puntos)

b) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P(1,2,1), es paralelo a la recta r y perpendicular al plano π. (1,25 puntos)

a)

De la recta $r:\begin{cases} x-y+z=3 \\ 2x+y=1 \end{cases}$ podemos obtener dos puntos de la misma.

$$r:\begin{cases} x-y+z=3 \\ 2x+y=1 \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} z=3+y-x \\ y=1-2x \end{cases}$$

Si tomamos $x=0 \Rightarrow \begin{cases} z=3+y \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=3+1=4 \\ y=1 \end{cases}$ El punto es $A(0,1,4)$

Si tomamos $x=1 \Rightarrow \begin{cases} z=2+y \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=2-1=1 \\ y=-1 \end{cases}$ El punto es $B(1,-1,1)$

De aquí obtenemos el vector director de la recta $\vec{v}=\overrightarrow{AB}=(1,-1,1)-(0,1,4)=(1,-2,-3)$

La ecuación es $\left.\begin{array}{l} \vec{v}=(1,-2,-3) \\ \text{Pasa por } A(0,1,4) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{r: \frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-4}{-3}}$

b) El plano pedido es paralelo a r, luego tiene como vector director el de la recta r $\vec{v}=(1,-2,-3)$ y al ser perpendicular al plano $\pi: 2x+y-z=0$ también tiene como vector director el normal del plano $\vec{u}=\vec{n}=(2,1,-1)$. Y pasa por el punto P(1,2,1).

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}=(1,-2,-3) \\ \vec{u}=(2,1,-1) \\ \text{Pasa por } P(1,2,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-2-6y+12+z-1+4z-4+y-2+3x-3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x-5y+5z=0 \Rightarrow \boxed{\pi' \equiv x-y+z=0}$$

OPCIÓN B

1. Calcular los siguientes límites

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x+e^{-x}-2\cos x}{sen\left(x^2\right)}$ (1,25 puntos) b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4+x}-2-\frac{x}{4}}{x^2}$ (1,25 puntos)

a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2\cos x}{sen\left(x^2\right)} = \frac{1+1-2}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (aplicamos L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}+2senx}{\cos\left(x^2\right)\cdot 2x} = \frac{1-1+0}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (aplicamos L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}+2\cos x}{-sen\left(x^2\right)\cdot 2x\cdot 2x+\cos\left(x^2\right)\cdot 2} = \frac{1+1+2}{0+2} = \frac{4}{2} = \boxed{2}$$

b)

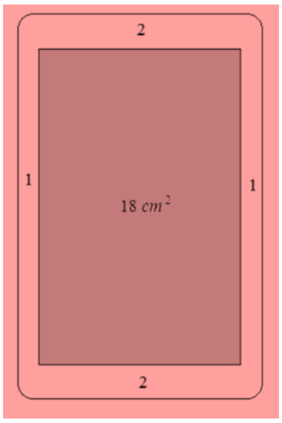
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x}-2-\frac{x}{4}}{x^2} = \frac{\sqrt{4}-2}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (aplicamos L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{4+x}}-\frac{1}{4}}{2x} = \frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (aplicamos L´Hôpital)}=$$

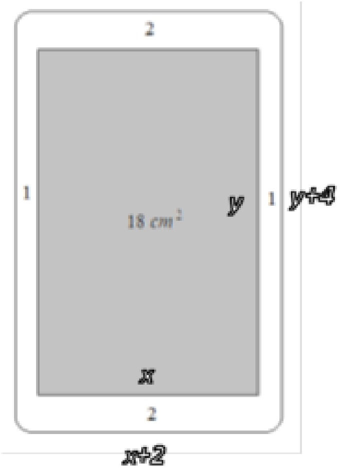
$$\left\{ \text{La derivada de } \frac{1}{2\sqrt{4+x}} = \frac{1}{2}(4+x)^{-\frac{1}{2}} \text{ es } \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2}(4+x)^{-\frac{1}{2}-1} = \frac{-1}{4}(4+x)^{-\frac{3}{2}} = \frac{-1}{4\sqrt{(4+x)^3}} \right\}$$

$$=\lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{4\sqrt{(4+x)^3}}}{2} = \frac{\frac{-1}{4\sqrt{(4)^3}}}{2} = \boxed{\frac{-1}{64}}$$

2. Se quiere fabricar un smartphone con una pantalla LCD de 18 cm^2. Los bordes superior e inferior han de tener 2 cm cada uno y los bordes laterales 1 cm. Calcular las dimensiones del teléfono para que la superficie del mismo sea mínima. (2,5 puntos)



Añadamos las medidas de base y altura del Smartphone:



Superficie del Smartphone es

$x \cdot y = 18 \Rightarrow y = \dfrac{18}{x}$

Superficie es $f(x) = (x+2)(y+4) = (x+2)\left(\dfrac{18}{x}+4\right) = x \cdot \dfrac{18}{x} + 4x + 2 \cdot \dfrac{18}{x} + 8 = 18 + 4x + \dfrac{36}{x} + 8$

$f(x) = 26 + 4x + \dfrac{36}{x}$

Averigüemos su valor mínimo usando la derivada

$f(x) = 26 + 4x + \dfrac{36}{x} \Rightarrow f'(x) = 4 - \dfrac{36}{x^2}$

La igualamos a cero.

$f'(x) = 0 \Rightarrow 4 - \dfrac{36}{x^2} = 0 \Rightarrow 4x^2 - 36 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \sqrt{9} = \pm 3$

Solo es posible el valor positivo, es decir, $x = 3$

Como $f'(x) = 4 - \dfrac{36}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \dfrac{72x}{x^4} = \dfrac{72}{x^3}$

Veamos si $x = 3$ es mínimo utilizando el signo de la derivada segunda de la función.

$f''(3) = \dfrac{72}{3^3} > 0$. La función superficie del móvil presenta un mínimo en $x = 3$; $y = \dfrac{18}{3} = 6$.

Las dimensiones de la pantalla del móvil es 3 cm y 6 cm. Y el móvil mide 5 cm y 10 cm.

3. Hallar la matriz X que cumple la ecuación matricial $A^{-1}XA = B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (2,5 puntos)

$$A^{-1}XA = B \Rightarrow A \cdot A^{-1}XA \cdot A^{-1} = A \cdot B \cdot A^{-1} \Rightarrow X = A \cdot B \cdot A^{-1}$$

Calculamos la inversa de la matriz A.

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = A \cdot B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2 & -3+1 \\ -2-2 & 2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+4 & 5+6 \\ -4-2 & -4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$$

La matriz es $X = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$

4. Dados la recta $r: x = y+1 = \dfrac{z-\frac{11}{m}}{\frac{-3}{m}}$ y el plano $\pi: 2x+y+z=9$ se pide

a) Calcular el valor del parámetro m para que la recta r sea paralela al plano π (1,25 puntos)
b) Para m = 2, determinar el punto de intersección de la recta r y el plano π (1,25 puntos)

a) Para que recta y plano sean paralelos la primera condición es que vector director de recta $\overrightarrow{v_r} = \left(1,1,\dfrac{-3}{m}\right)$ y vector normal de plano $\vec{n} = (2,1,1)$ sean perpendiculares, es decir, su producto escalar debe ser 0.

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \left(1,1,\frac{-3}{m}\right)(2,1,1) = 0 \Rightarrow 2+1-\frac{3}{m} = 0 \Rightarrow 3m-3=0 \Rightarrow \boxed{m = \frac{3}{3} = 1}$$

En este caso la recta es $r: x = y+1 = \dfrac{z-11}{-3}$ y el plano $\pi: 2x+y+z=9$ no son coincidentes ya que el punto P(0,–1,11) de la recta no está en el plano.

$\left.\begin{array}{l} ¿P(0,-1,11) \in \pi? \\ \pi: 2x+y+z=9 \end{array}\right\} \Rightarrow ¿2\cdot 0-1+11=9?$ No es cierto y el punto no está en el plano y recta y plano son paralelos.

b)

Para m = 2 la recta queda con ecuación $r: x = y+1 = \dfrac{z-\frac{11}{2}}{\frac{-3}{2}} \Rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x = t \\ y = -1+t \\ z = \frac{11}{2}-\frac{3}{2}t \end{array}\right\}$

Averigüemos el punto de intersección resolviendo el sistema formado por recta y plano.

$$\left\{\begin{array}{l} \pi: 2x+y+z=9 \\ r: \left.\begin{array}{l} x = t \\ y = -1+t \\ z = \frac{11}{2}-\frac{3}{2}t \end{array}\right\} \end{array}\right. \Rightarrow 2t-1+t+\frac{11}{2}-\frac{3}{2}t = 9 \Rightarrow 4t-2+2t+11-3t = 18$$

$$3t = 9 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 3 \\ y = -1+3 = 2 \\ z = \frac{11}{2}-\frac{3}{2}3 = \frac{2}{2} = 1 \end{array}\right\}$$

El punto es $A(3,2,1)$