UNIVERSIDAD DE MURCIA Región de Murcia Universidad Politécnica de Cartagena

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA EL ALUMNADO DE BACHILLERATO
159 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. JUNIO 2015

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá elegir una opción A o B y responder a todas las cuestiones de esa de opción. Nunca podrá mezclar cuestiones de la opción A con cuestiones de la opción B. En cada cuestión se indica su puntuación. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

OPCIÓN A

CUESTIÓN A1. Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}\ y\ C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Calcular B^t+2C (0,5 puntos)

b) Hallar la matriz $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que cumple $AX=B^t+2C$. (2 puntos)

CUESTIÓN A2. Dada la función $f\left(x\right)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3$, calcular:

a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1,5 puntos)

b) Los máximos y mínimos relativos. (0,5 puntos)

c) Los puntos de corte con los ejes. (0,5 puntos)

CUESTIÓN A3. Hallar una primitiva *F(x)* de la función $f\left(x\right)=x^3-2x^2+x-2$ que cumpla que *F(1) = 0.* (1,5 puntos)

CUESTIÓN A4. La probabilidad de aprobar la asignatura A es 2/3 y la de aprobar la asignatura B es 1/2. Además, la probabilidad de aprobar las dos es 1/4.

a) Hallar la probabilidad de no aprobar ninguna de las dos asignaturas. (0,75 puntos)

b) Calcular la probabilidad de aprobar A, pero no B. (0,75 puntos)

CUESTIÓN A5. Un estudio sociológico afirma que la proporción de estudiantes de una población es 2/5. Si en una muestra aleatoria de 700 individuos de la población hay 100 estudiantes, ¿puede admitirse a un nivel de confianza del 99% la afirmación del estudio? (2 puntos)

OPCIÓN B

CUESTIÓN B1. En un edificio público se quieren colocar, al menos, 20 máquinas expendedoras entre las de bebidas calientes y las de bebidas frías. Hay disponibles 12 máquinas de bebidas calientes y 40 de bebidas frías. Se pretende que el número de expendedoras de bebidas calientes no sea superior a una tercera parte del de bebidas frías y que, por lo menos, una quinta parte del total de máquinas que se coloquen sean de bebidas calientes. Cumpliendo las condiciones anteriores, ¿qué combinación de máquinas de cada tipo hace que la diferencia del número de máquinas de bebidas frías menos el de bebidas calientes colocadas sea mayor? (3 puntos)

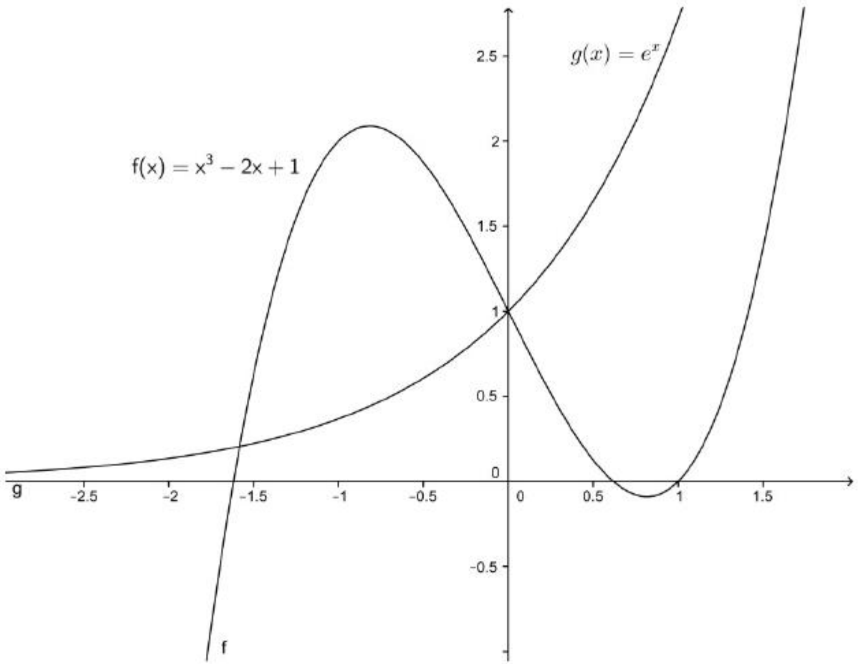
CUESTIÓN B2. Dada la función $f(x) = x^4 + ax^3 + bx + c$, donde a, b y c son números reales, hallar los valores de a, b y c para que la función cumpla las siguientes condiciones:

a) pase por el origen de coordenadas,

b) su derivada se anule en $x = 0$ y

c) la pendiente de la tangente a su gráfica en $x = 1$ valga 2. (2 puntos)

CUESTIÓN B3. Dadas las funciones $f(x) = x^3 - 2x + 1$ y $g(x) = e^x$ cuyas gráficas aparecen en la siguiente figura



Hallar el área encerrada por las dos gráficas y las rectas $x = -1$ y $x = 0$. (1,5 puntos)

CUESTIÓN B4. Se lanza dos veces consecutivas un dado equilibrado, con las caras numeradas del 1 al 6.

a) Determinar el número de resultados de este experimento aleatorio. (0,5 puntos)

b) Sea A el suceso “en los dos lanzamientos se obtiene un número mayor que 4” y B el suceso “en los dos lanzamientos se obtiene un número par”. Calcular la probabilidad de A y la de B. (0,75 puntos)

c) ¿Son A y B independientes? (0,75 puntos)

CUESTIÓN B5. La altura de los edificios de una ciudad sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 20 m. Calcular el tamaño mínimo que ha de tener una muestra aleatoria de dichos edificios para que el error cometido al estimar la altura media sea inferior a 2 m, con un nivel de confianza del 97%. (1,5 puntos)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

CUESTIÓN A1. Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}\ y\ C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Calcular $B^t + 2C$ (0,5 puntos)

b) Hallar la matriz $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que cumple $AX = B^t + 2C$. (2 puntos)

a)

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^t+2C=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+2 & -2+4 \\ 2-2 & -4+4 \\ 0+2 & 1-6 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{B^t+2C=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}}$$

b) Usamos lo obtenido en el apartado a) y sustituimos en la ecuación matricial planteada.

$$AX = B^t + 2C \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$3\times\boxed{2 \quad \cdot \quad 2}\times 2 \to 3\times 2$$

Realizamos el producto e igualamos los resultados obtenidos a ambos lados de la igualdad.

$$\begin{pmatrix} 2a-c & 2b-d \\ 0 & 0 \\ -a & -b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Nos queda un sistema de ecuaciones que resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} 2a-c=3 \\ 2b-d=2 \\ -a=2 \\ -b=-5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2a-c=3 \\ 2b-d=2 \\ \boxed{a=-2} \\ \boxed{b=5} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2\cdot(-2)-c=3 \\ 2\cdot 5-d=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -4-c=3 \\ 10-d=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -c=7 \\ -d=-8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \boxed{c=-7} \\ \boxed{d=8} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{X=\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}}$$

CUESTIÓN A2. Dada la función $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3$, calcular:

a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1,5 puntos)
b) Los máximos y mínimos relativos. (0,5 puntos)
c) Los puntos de corte con los ejes. (0,5 puntos)

a) Estudiamos el cambio de signo de la derivada y para ello obtenemos primero los puntos donde se anula la derivada o puntos críticos de la función.

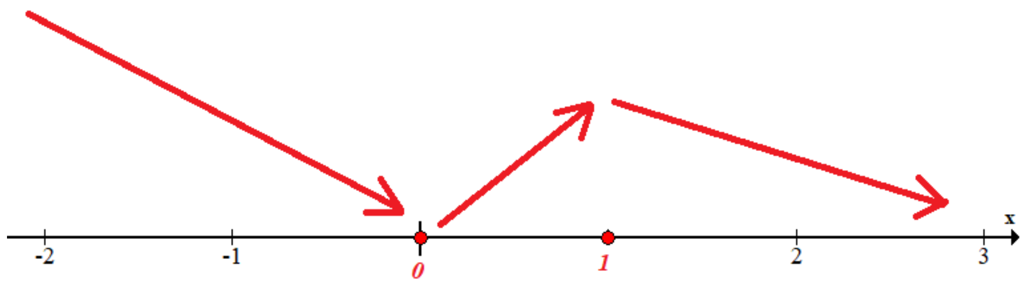
$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3 \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}2x-\frac{1}{3}3x^2=x-x^2$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow x-x^2=0 \Rightarrow x(1-x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ o \\ 1-x=0 \rightarrow x=1 \end{cases}$$

Tenemos dos puntos críticos: $x = 0$ y $x = 1$.
Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores críticos.

- En $(-\infty,0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1)=-1-(-1)^2=-2<0$. La función decrece en $(-\infty,0)$.
- En $(0,1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale $f'(0.5)=0.5-0.5^2=0.25>0$. La función crece en $(0,1)$.
- En $(1,+\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2)=2-2^2=-2<0$. La función decrece en $(1,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en $(0,1)$ y decrece en $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

b) Por el estudio realizado en el apartado a) tenemos que la función tiene un mínimo relativo en $x = 0$ y un máximo relativo en $x = 1$.

Como $f(0)=\frac{1}{2}0^2-\frac{1}{3}0^3=0$ y $f(1)=\frac{1}{2}1^2-\frac{1}{3}1^3=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ las coordenadas del mínimo relativo son $(0,0)$ y las del máximo relativo son $\left(1,\frac{1}{6}\right)$.

c) Si $x = 0$ → $f(0)=\frac{1}{2}0^2-\frac{1}{3}0^3=0$. El punto de corte tiene coordenadas (0, 0).

Si $y = 0$ →

$$0=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3 \Rightarrow 0=3x^2-2x^3 \Rightarrow 0=x^2(3-2x) \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ o \\ 3-2x=0 \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \end{cases}$$

El otro punto de corte con los ejes tiene coordenadas $\left(\frac{3}{2},0\right)$

CUESTIÓN A3. Hallar una primitiva *F(x)* de la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ que cumpla que *F(1) = 0*. (1,5 puntos)

Calculamos la primitiva de *f(x)*.

$$F(x) = \int f(x)dx = \int x^3 - 2x^2 + x - 2dx = \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + K$$

Como *F(1) = 0* entonces:

$$F(1) = 0 = \frac{1^4}{4} - 2\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} - 2 \cdot 1 + K = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 2 + K \Rightarrow -\frac{23}{12} + K = 0 \Rightarrow K = \frac{23}{12}$$

La primitiva buscada es $\boxed{F(x) = \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{23}{12}}$

CUESTIÓN A4. La probabilidad de aprobar la asignatura A es 2/3 y la de aprobar la asignatura B es 1/2. Además, la probabilidad de aprobar las dos es 1/4.
a) Hallar la probabilidad de no aprobar ninguna de las dos asignaturas. (0,75 puntos)
b) Calcular la probabilidad de aprobar A, pero no B. (0,75 puntos)

a) Los datos del problema son $P(A)=\frac{2}{3},\ P(B)=\frac{1}{2},\ P(A\cap B)=\frac{1}{4}$

Nos piden averiguar el valor de $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)$.

$$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P(A\cup B)=1-\left[P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right]$$
$$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=1-\left[\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right]=\frac{1}{12}$$

La probabilidad de no aprobar ninguna de las dos asignaturas es de 1/12.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO.

Los datos del problema son $P(A)=\frac{2}{3}=\frac{8}{12},\ P(B)=\frac{1}{2}=\frac{6}{12},\ P(A\cap B)=\frac{1}{4}=\frac{3}{12}$.
Estos datos significan que si fuesen 12 personas 8 aprueban A, 6 aprueban B y 3 aprueban ambas. Realizamos la tabla de contingencia con estos datos.

	Aprueban B	No aprueban B	
Aprueban A	**3**		**8**
No aprueban A			
	6		**12**

Completamos la tabla.

	Aprueban B	No aprueban B	
Aprueban A	**3**	**5**	**8**
No aprueban A	**3**	**→ 1 ←**	**4**
	6	**6**	**12**

Mirando la tabla y aplicando la regla de Laplace la probabilidad de no aprobar A y no aprobar B es de $\frac{1}{12}$.

b) Nos piden determinar $P\left(A\cap\overline{B}\right)$.

$$P\left(A\cap\overline{B}\right)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\boxed{\frac{5}{12}}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO.

Mirando la tabla obtenida en el apartado a)

	Aprueban B	No aprueban B	
Aprueban A	**3**	**→ 5 ←**	**8**
No aprueban A	**3**	**1**	**4**
	6	**6**	**12**

Y utilizando la regla de Laplace esta probabilidad es de $\frac{5}{12}$.

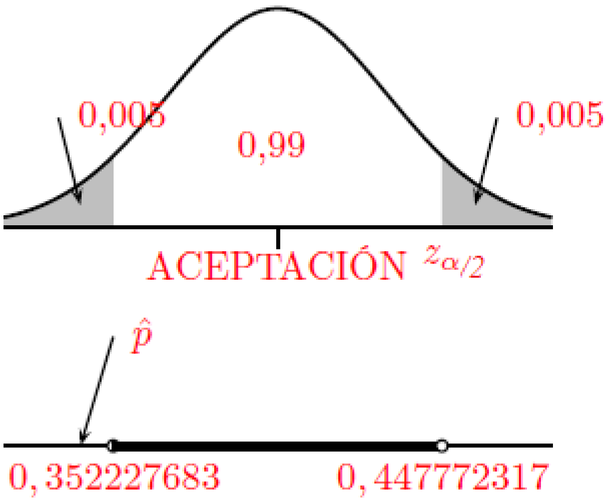
CUESTIÓN A5. Un estudio sociológico afirma que la proporción de estudiantes de una población es 2/5. Si en una muestra aleatoria de 700 individuos de la población hay 100 estudiantes, ¿puede admitirse a un nivel de confianza del 99% la afirmación del estudio? (2 puntos)

Contrastamos $H_0 : p = 2/5 = 0.4$ frente a $H_1 : p \neq 0.4$.
El tamaño muestral es n = 700.
El nivel de significación α = 0.01, corresponde con $z_{\alpha/2} = 2.58$

Entonces el intervalo de aceptación tiene de extremos:

$$p \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0.4 \pm 2.58 \cdot \sqrt{\frac{0.4(1-0.4)}{700}} = \begin{cases} 0.4 - 2.58 \cdot \sqrt{\frac{0.24}{700}} = 0.3522 \\ 0.4 + 2.58 \cdot \sqrt{\frac{0.24}{700}} = 0.4477 \end{cases}$$

El intervalo de aceptación es (0, 352227683; 0, 447772317)
Como $p = \frac{100}{700} \simeq 0.1428$ queda fuera del intervalo, se rechaza H_0



OPCIÓN B

CUESTIÓN B1. En un edificio público se quieren colocar, al menos, 20 máquinas expendedoras entre las de bebidas calientes y las de bebidas frías. Hay disponibles 12 máquinas de bebidas calientes y 40 de bebidas frías. Se pretende que el número de expendedoras de bebidas calientes no sea superior a una tercera parte del de bebidas frías y que, por lo menos, una quinta parte del total de máquinas que se coloquen sean de bebidas calientes. Cumpliendo las condiciones anteriores, ¿qué combinación de máquinas de cada tipo hace que la diferencia del número de máquinas de bebidas frías menos el de bebidas calientes colocadas sea mayor? (3 puntos)

Llamamos "*x*" al número de máquinas expendedoras de bebidas calientes e "*y*" al número de máquinas expendedoras de bebidas frías.

Obtenemos las inecuaciones que definen la región factible.

"*se quieren colocar, al menos, 20 máquinas expendedoras entre las de bebidas calientes y las de bebidas frías* " → $x+y\geq 20$

"*Hay disponibles 12 máquinas de bebidas calientes y 40 de bebidas frías* " → $x\leq 12;\ \ y\leq 40$

"*Se pretende que el número de expendedoras de bebidas calientes no sea superior a una tercera parte del de bebidas frías y que, por lo menos, una quinta parte del total de máquinas que se coloquen sean de bebidas calientes*" → $x\leq \frac{y}{3};\ \ \frac{x+y}{5}\leq x$

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ \ y\geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} x+y\geq 20 \\ x\leq 12;\ \ y\leq 40 \\ x\leq \frac{y}{3};\ \ \frac{x+y}{5}\leq x \\ x\geq 0;\ \ y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y\geq 20 \\ x\leq 12;\ \ y\leq 40 \\ 3x\leq y;\ \ x+y\leq 5x \\ x\geq 0;\ \ y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y\geq 20-x \\ x\leq 12;\ \ y\leq 40 \\ 3x\leq y \\ y\leq 4x \\ x\geq 0;\ \ y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y\geq 20-x \\ y\geq 3x \\ y\leq 4x \\ x\leq 12 \\ y\leq 40 \\ x\geq 0;\ \ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

La función objetivo que deseamos maximizar es $D(x,y)=y-x$

Representamos las rectas asociadas a las restricciones y que delimitan la región factible.

$y=20-x$

x	$y=20-x$
0	20
20	0

$y=3x$

x	$y=3x$
0	0
5	15

$y=4x$

x	$y=4x$
0	0
5	20

$x=12$

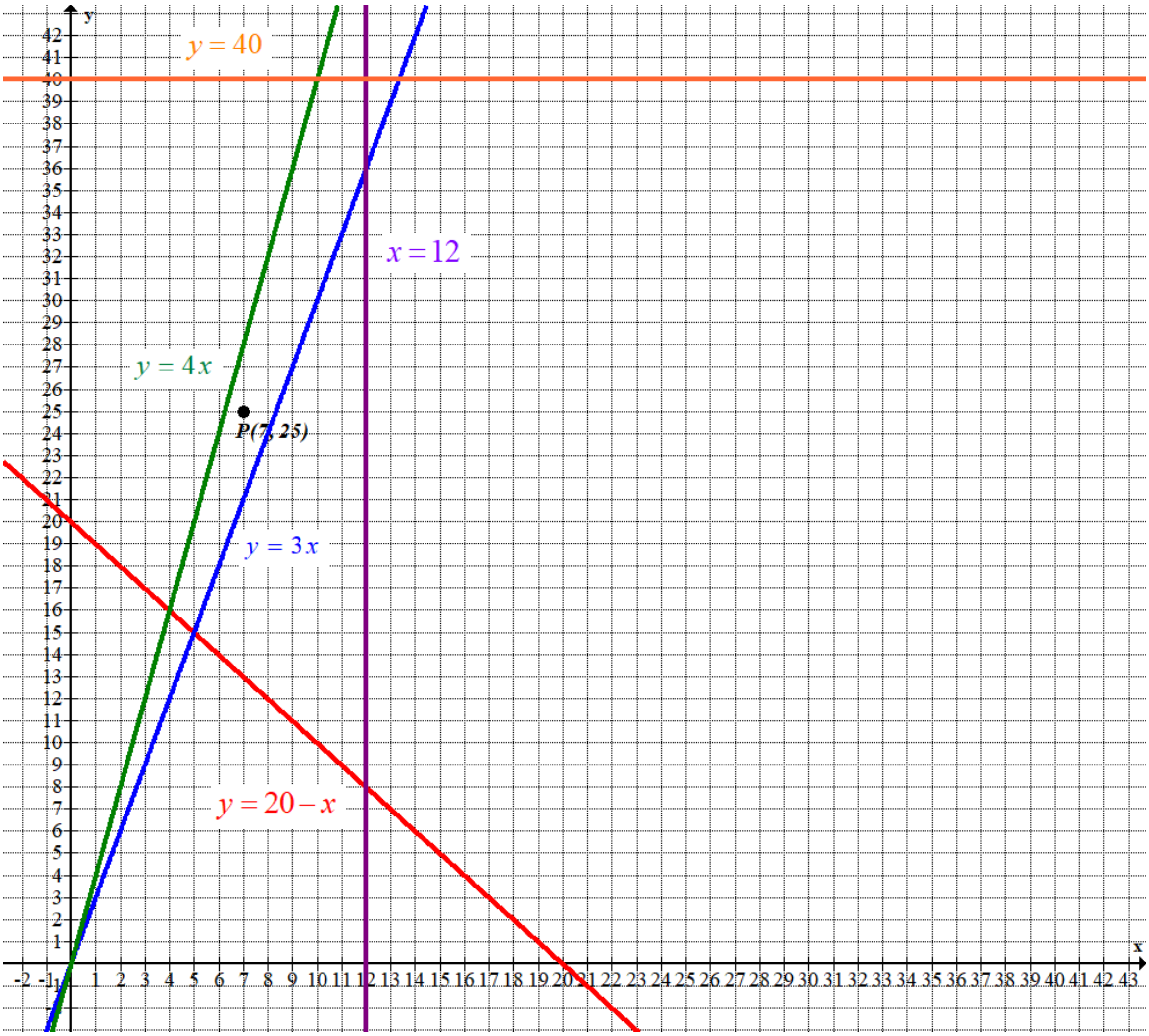
$x=12$	y
12	0
12	20

$y=40$

x	$y=40$
0	40
20	40

$x\geq 0;\ \ y\geq 0$

Primer cuadrante

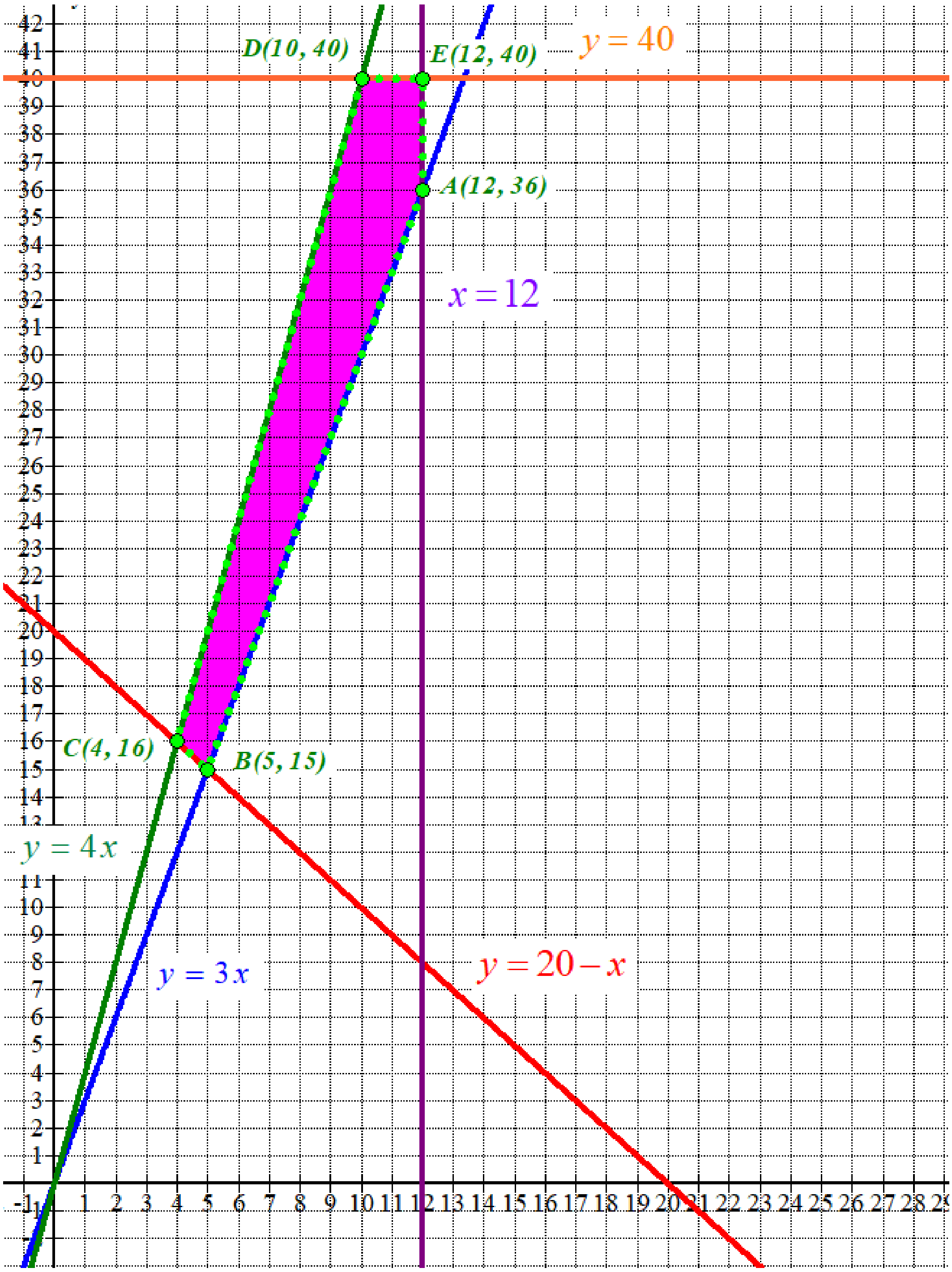


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} y \geq 20-x \\ y \geq 3x \\ y \leq 4x \\ x \leq 12 \\ y \leq 40 \\ x \geq 0;\ \ y \geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por encima de la recta roja y azul, por debajo de la recta verde y naranja y a la izquierda de la recta vertical violeta.

Comprobamos que el punto P(7, 25) perteneciente a esta región cumple todas las inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 25 \geq 20-7 \\ 25 \geq 3\cdot 7 \\ 25 \leq 4\cdot 7 \\ 7 \leq 12 \\ 25 \leq 40 \\ 7 \geq 0;\ \ 25 \geq 0 \end{array}\right\} \text{¡¡Se cumplen todas!!}$$

Coloreamos de rosa la región en el siguiente dibujo e indicamos las coordenadas de los vértices de dicha región.



Obtenemos los vértices de la región resolviendo los sistemas de ecuaciones correspondientes.

$$A \rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 3x \\ x = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 3 \cdot 12 = 36 \Rightarrow A(12,36)$$

$$B \rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 3x \\ y = 20 - x \end{array}\right\} \Rightarrow 3x = 20 - x \Rightarrow 4x = 20 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow y = 20 - 5 = 15 \Rightarrow B(5,15)$$

$$C \rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 20 - x \\ y = 4x \end{array}\right\} \Rightarrow 4x = 20 - x \Rightarrow 5x = 20 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow y = 20 - 4 = 16 \Rightarrow C(4,16)$$

$$D \to \left.\begin{array}{l} y = 4x \\ y = 40 \end{array}\right\} \Rightarrow 4x = 40 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow D(10, 40)$$

$$E \to \left.\begin{array}{l} x = 12 \\ y = 40 \end{array}\right\} \Rightarrow E(12, 40)$$

Valoramos la función objetivo $D(x, y) = y - x$ en cada uno de los vértices en busca del valor máximo.

A(12, 36) → $D(12,36) = 36 - 12 = 24$
B(5, 15) → $D(5,15) = 15 - 5 = 10$
C(4, 16) → $D(4,16) = 16 - 4 = 12$
D(10, 40) → $D(10,40) = 40 - 10 = 30$ ¡¡Máximo!!
E(12, 40) → $D(12,40) = 40 - 12 = 28$

El máximo valor de la función está en el punto D(10, 40).
La combinación de máquinas que hace que la diferencia del número de máquinas de bebidas frías menos el de bebidas calientes colocadas sea mayor es con 10 calientes y 40 frías.

CUESTIÓN B2. Dada la función $f(x) = x^4 + ax^3 + bx + c$, donde *a*, *b* y *c* son números reales, hallar los valores de *a*, *b* y *c* para que la función cumpla las siguientes condiciones:
a) pase por el origen de coordenadas,
b) su derivada se anule en $x = 0$ y
c) la pendiente de la tangente a su gráfica en $x = 1$ valga 2. (2 puntos)

Para que pase por el origen de coordenadas debe cumplirse que *f(0) = 0*.

$$\left.\begin{array}{r} f(x) = x^4 + ax^3 + bx + c \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0^4 + a \cdot 0^3 + b \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow \boxed{c = 0}$$

La función queda $f(x) = x^4 + ax^3 + bx$.
Si su derivada se anula en *x = 0* significa que *f ´(0) = 0.*

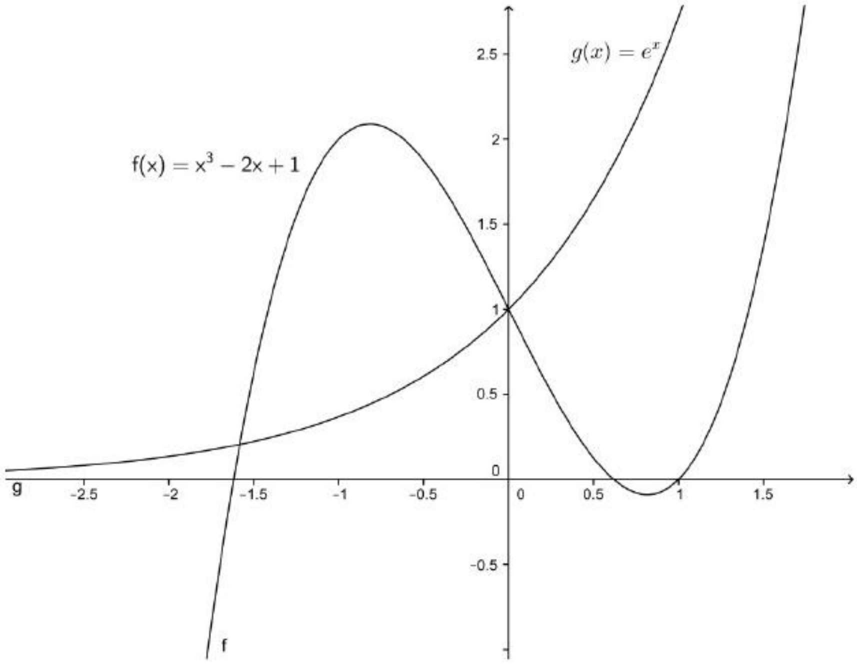
$$\left.\begin{array}{r} f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + b \\ f'(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 4 \cdot 0^3 + 3 \cdot a \cdot 0^2 + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

La función queda $f(x) = x^4 + ax^3$.
Como la pendiente de la tangente a su gráfica en *x = 1* vale 2 tenemos que *f ´(1) = 2*

$$\left.\begin{array}{r} f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 \\ f'(1) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 4 \cdot 1^3 + 3 \cdot a \cdot 1^2 = 2 \Rightarrow 4 + 3a = 2 \Rightarrow 3a = -2 \Rightarrow \boxed{a = \frac{-2}{3}}$$

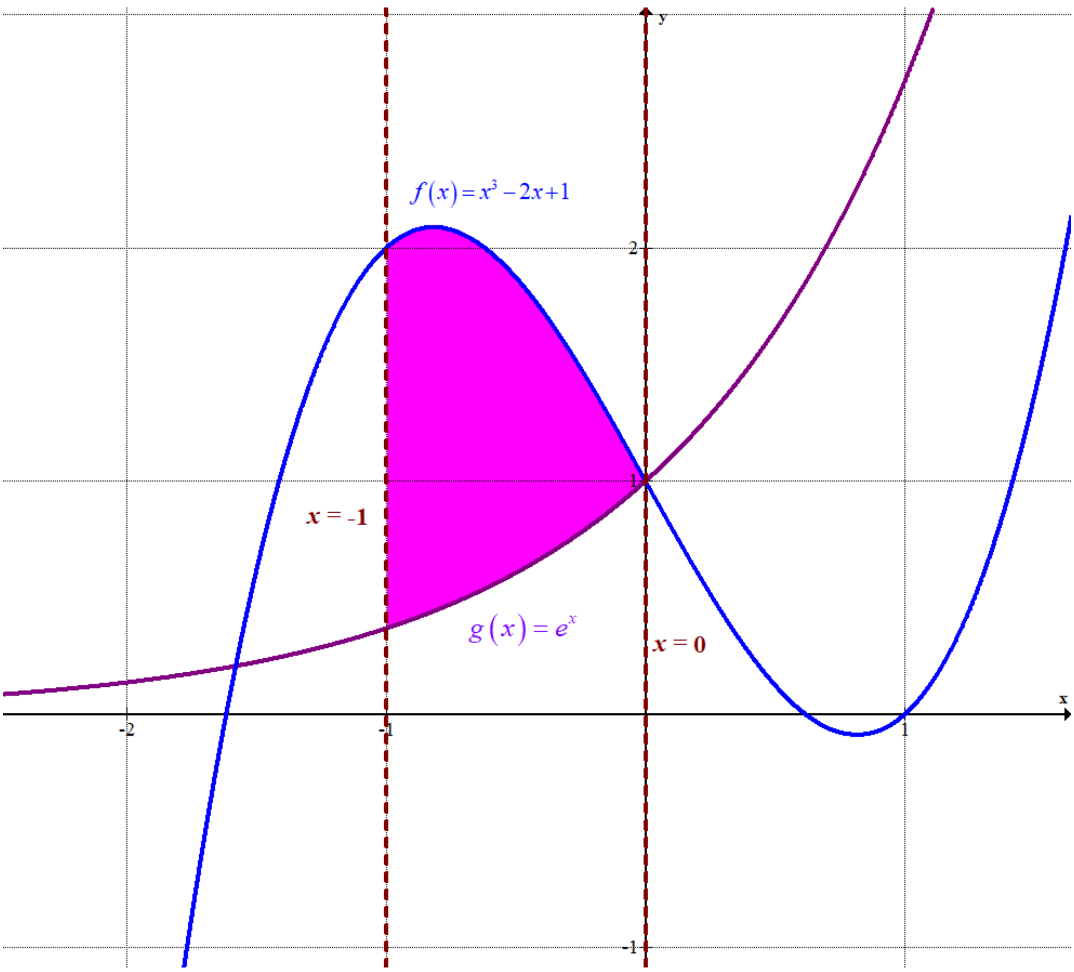
Los valores buscados son $a = \frac{-2}{3}$; $b = c = 0$ y la función queda $f(x) = x^4 - \frac{2}{3}x^3$

CUESTIÓN B3. Dadas las funciones $f(x) = x^3 - 2x + 1$ y $g(x) = e^x$ cuyas gráficas aparecen en la siguiente figura



Hallar el área encerrada por las dos gráficas y las rectas $x = -1$ y $x = 0$. (1,5 puntos)

Si al dibujo le añadimos las rectas $x = -1$ y $x = 0$ la región encerrada por las dos gráficas y las rectas sería la zona coloreada de rosa.



Como se aprecia en el dibujo el área de la región es de aproximadamente 1 cuadradito.

Lo calculamos con precisión haciendo uso del cálculo integral.

El área pedida es la integral definida entre $x = -1$ y $x = 0$ de la diferencia de las dos funciones $f(x) - g(x)$.

$$Área = \int_{-1}^{0} f(x) - g(x)dx = \int_{-1}^{0} x^3 - 2x + 1 - e^x dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^2 + x - e^x\right]_{-1}^{0} =$$

$$= \left[\frac{0^4}{4} - 0^2 + 0 - e^0\right] - \left[\frac{(-1)^4}{4} - (-1)^2 + (-1) - e^{-1}\right] = -1 - \left[\frac{1}{4} - 1 - 1 - \frac{1}{e}\right] = \boxed{\frac{3}{4} + \frac{1}{e} \simeq 1.118\, u^2}$$

CUESTIÓN B4. Se lanza dos veces consecutivas un dado equilibrado, con las caras numeradas del 1 al 6.
a) Determinar el número de resultados de este experimento aleatorio. (0,5 puntos)
b) Sea A el suceso "en los dos lanzamientos se obtiene un número mayor que 4" y B el suceso "en los dos lanzamientos se obtiene un número par". Calcular la probabilidad de A y la de B. (0,75 puntos)
c) ¿Son A y B independientes? (0,75 puntos)

a) Los resultados posibles conforman el espacio muestral del experimento que detallamos en la tabla siguiente.

		2º lanzamiento					
		1	2	3	4	5	6
1er lanzamiento	1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
	2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
	3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
	4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
	5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
	6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Hay un total de 36 resultados posibles.

b) Todos los sucesos elementales de la tabla superior son equiprobables, por lo que para calcular las probabilidades de los sucesos A y B bastan con contar los sucesos elementales favorables a que suceda A o a que suceda B.

Probabilidad de A = "en los dos lanzamientos se obtiene un número mayor que 4"**.**
Marco de rojo los sucesos elementales que deben ocurrir para que suceda el suceso A.

		2º lanzamiento					
		1	2	3	4	5	6
1er lanzamiento	1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
	2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
	3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
	4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
	5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
	6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Por lo que $P(A) = \frac{\text{nº casos favorables}}{\text{nº casos posibles}} = \frac{4}{36} = \boxed{\frac{1}{9} \simeq 0.111}$

Probabilidad de B = "en los dos lanzamientos se obtiene un número par"**.**
Marco de rojo los sucesos elementales que deben ocurrir para que suceda el suceso B.

		2º lanzamiento					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1er lanzamiento	**1**	**(1, 1)**	**(1, 2)**	**(1, 3)**	**(1, 4)**	**(1, 5)**	**(1, 6)**
	2	**(2, 1)**	**(2, 2)**	**(2, 3)**	**(2, 4)**	**(2, 5)**	**(2, 6)**
	3	**(3, 1)**	**(3, 2)**	**(3, 3)**	**(3, 4)**	**(3, 5)**	**(3, 6)**
	4	**(4, 1)**	**(4, 2)**	**(4, 3)**	**(4, 4)**	**(4, 5)**	**(4, 6)**
	5	**(5, 1)**	**(5, 2)**	**(5, 3)**	**(5, 4)**	**(5, 5)**	**(5, 6)**
	6	**(6, 1)**	**(6, 2)**	**(6, 3)**	**(6, 4)**	**(6, 5)**	**(6, 6)**

Por lo que $P(B)=\dfrac{\text{nº casos favorables}}{\text{nº casos posibles}}=\dfrac{9}{36}=\boxed{\dfrac{1}{4}=0.25}$

c) Calculamos la probabilidad de la intersección de los dos sucesos.

A∩B = "en los dos lanzamientos se obtiene un número mayor que 4 y en los dos lanzamientos se obtiene un número par"**.**
Marco de rojo los sucesos elementales que pueden ocurrir para que suceda el suceso **A∩B**.

		2º lanzamiento					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1er lanzamiento	**1**	**(1, 1)**	**(1, 2)**	**(1, 3)**	**(1, 4)**	**(1, 5)**	**(1, 6)**
	2	**(2, 1)**	**(2, 2)**	**(2, 3)**	**(2, 4)**	**(2, 5)**	**(2, 6)**
	3	**(3, 1)**	**(3, 2)**	**(3, 3)**	**(3, 4)**	**(3, 5)**	**(3, 6)**
	4	**(4, 1)**	**(4, 2)**	**(4, 3)**	**(4, 4)**	**(4, 5)**	**(4, 6)**
	5	**(5, 1)**	**(5, 2)**	**(5, 3)**	**(5, 4)**	**(5, 5)**	**(5, 6)**
	6	**(6, 1)**	**(6, 2)**	**(6, 3)**	**(6, 4)**	**(6, 5)**	**(6, 6)**

Por lo que $P(A\cap B)=\dfrac{\text{nº casos favorables}}{\text{nº casos posibles}}=\boxed{\dfrac{1}{36}\simeq 0.0278}$

Para que sean independientes debe cumplirse que $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B) \\ P(A\cap B)=\dfrac{1}{36} \\ P(A)=\dfrac{1}{9} \\ P(B)=\dfrac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow ¡¡P(A\cap B)=\frac{1}{36}=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{4}=P(A)\cdot P(B)!!$$

Se cumple la igualdad y los sucesos A y B son independientes.

CUESTIÓN B5. La altura de los edificios de una ciudad sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica 20 m. Calcular el tamaño mínimo que ha de tener una muestra aleatoria de dichos edificios para que el error cometido al estimar la altura media sea inferior a 2 m, con un nivel de confianza del 97%. (1,5 puntos)

X = Altura de un edificio de una ciudad expresada en metros.

$X = N\left(\mu, 20\right)$

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 97% el $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.97 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow \alpha/2 = 0.015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.17}$$

El error sigue la fórmula $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{20}{\sqrt{n}} = \frac{43.4}{\sqrt{n}}$

Igualamos el error a 2 m y despejamos n.

$$\frac{43.4}{\sqrt{n}} = 2 \Rightarrow 43.4 = 2\sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{43.4}{2} = 21.7 \Rightarrow n = 21.7^2 = 470.89$$

Como el tamaño de la muestra debe ser entero y superior al valor obtenido el tamaño mínimo de la muestra es de 471 edificios.