UNIVERSIDAD DE MURCIA Región de Murcia Universidad Politécnica de Cartagena

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA ALUMNOS DE BACHILLERATO LOE

Junio 2013

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II. CÓDIGO 159

OBSERVACIONES IMPORTANTES: *El alumno deberá elegir una opción A o B y responder a todas las cuestiones de esa opción. Nunca podrá mezclar cuestiones de la opción A con cuestiones de la opción B. En cada cuestión se indica su puntuación. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.*

OPCIÓN A

CUESTIÓN A1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 5\\ 0 & 1 & 6\\ a & 0 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2 & b\\ 1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-2 & -5 & 1\\ 3 & c & 1\end{pmatrix}$.

a) Hallar *a, b* y *c* para que se cumpla que $A\cdot B=C^t$. (C^t denota la traspuesta de *C*) (1,5 puntos)

b) Para $a=0$ calcular la inversa de *A*. (1,5 puntos)

CUESTIÓN A2. Las funciones $I(t)=-0,5t^2+17t$ y $C(t)=0,5t^2-t+32$ con $0\leq t\leq 18$ representan, respectivamente, los ingresos y los costes de una empresa en miles de euros en función de los años trascurridos desde su comienzo y en los últimos 18 años.

a) ¿Para qué valores de *t*, desde su inicio, los ingresos coincidieron con los costes? (0,5 puntos)

b) Hallar la función que expresa los beneficios (ingresos menos costes) en función de *t* y representarla gráficamente. (0,75 puntos)

c) ¿Cuántos años después del comienzo de su actividad la empresa alcanzó el beneficio máximo? Calcular el valor de dicho beneficio. (1,25 puntos)

CUESTIÓN A3. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=e^{x^3+2x}$ (0,5 puntos) b) $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$. (0,5 puntos)

CUESTIÓN A4. Sean *A* y *B* dos sucesos tales que $P(A)=0,2$, $P(B)=0,5$ y $P(A\cup B)=0,65$.

a) ¿Son independientes ambos sucesos? Razonar la respuesta. (1,5 puntos)

b) Calcular $P(A/B)$. (0,5 puntos)

CUESTIÓN A5. Según un estudio realizado en el año 2000, en una población la proporción de personas que tenía sobrepeso era del 24%. En los últimos años ha disminuido la actividad física que realizan los individuos, lo que hace sospechar que dicha proporción ha aumentado.

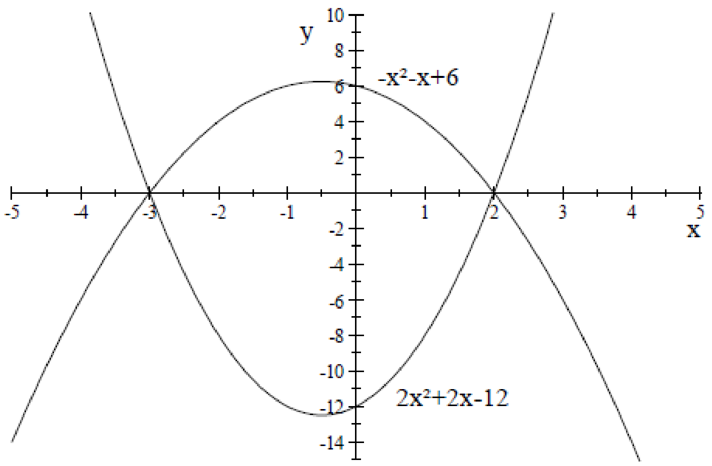
Para contrastarlo, se ha tomado recientemente una muestra aleatoria de 1195 individuos, de los cuales 310 tienen sobrepeso. Con un nivel de significación del 1%, ¿se puede rechazar que la proporción sigue siendo del 24% e inclinarnos por que dicha proporción ha aumentado? (1,5 puntos)

OPCIÓN B

CUESTIÓN B1. Una pastelería dispone de 100 kg de masa, 80 kg de crema de chocolate y 46 kg de nata. Con estos ingredientes elabora dos tipos de tartas: la tarta de chocolate, que requiere para su elaboración 1 kg de masa y 2 kg de crema de chocolate, y la tarta de chocolate y nata, que requiere 2 kg de masa, 1 kg de crema de chocolate y 1 kg de nata. Por cada tarta de chocolate se obtiene un beneficio de 10 euros, y de 12 euros por cada una de chocolate y nata. Suponiendo que vende todas las tartas, ¿cuántas tartas de cada tipo debe preparar para maximizar su beneficio?, ¿cuál es el beneficio máximo?
(3 puntos)

CUESTIÓN B2. Dada la función $f(x)=x^4+ax+b$, hallar a y b sabiendo que en x = 1 la función tiene un extremo relativo (un máximo o un mínimo relativo) y que $f(1) = 2$. ¿Se trata de un máximo o de un mínimo relativo?
(1,5 puntos)

CUESTIÓN B3. Dadas las parábolas $f(x)=2x^2+2x-12$ y $g(x)=-x^2-x+6$ cuyas gráficas se presentan a continuación, hallar el área de recinto acotado encerrado entre ambas.



(1,5 puntos)

CUESTIÓN B4. En una clase hay 15 chicos y 15 chicas que van a realizar el siguiente experimento aleatorio: se tiene una caja azul con 10 bolas numeradas de 1 a 10 y una caja verde con 5 bolas numeradas de 1 a 5, se elige al azar una persona de la clase, si es una chica, extrae una bola de la caja azul, y si es un chico, extrae una bola de la caja verde.

a) ¿Cuál es la probabilidad de extraer un número par? (1 punto)
b) Si el número extraído ha sido par, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido extraído por una chica? (1 punto)

CUESTIÓN B5. El tiempo de espera para ser atendido en la caja de un establecimiento sigue una distribución normal de desviación típica 5 minutos. Calcular el tamaño mínimo de la muestra para estimar, con un nivel de confianza del 95%, el tiempo medio de espera con un error que no sea superior a medio minuto. ¿Cuál es dicho tamaño mínimo para un nivel de confianza del 99%? (2 puntos)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

CUESTIÓN A1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&1&5\\0&1&6\\a&0&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&b\\1&2\\-1&0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-2&-5&1\\3&c&1\end{pmatrix}$.

a) Hallar *a*, *b* y *c* para que se cumpla que $A\cdot B=C^t$. (C^t denota la traspuesta de *C*) (1,5 puntos)

b) Para *a* = 0 calcular la inversa de *A*. (1,5 puntos)

a)

$$C=\begin{pmatrix}-2&-5&1\\3&c&1\end{pmatrix}\Rightarrow C^t=\begin{pmatrix}-2&3\\-5&c\\1&1\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=C^t$$

$$\begin{pmatrix}1&1&5\\0&1&6\\a&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&b\\1&2\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&3\\-5&c\\1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2+1-5&b+2+0\\0+1-6&0+2+0\\2a+0-1&ab+0+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&3\\-5&c\\1&1\end{pmatrix}$$

$$3\times\boxed{3\ \cdot\ 3}\times 2\rightarrow 3\times 2$$

$$\begin{pmatrix}-2&b+2\\-5&2\\2a-1&ab\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&3\\-5&c\\1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-2=-2\\b+2=3\\-5=-5\\2=c\\2a-1=1\\ab=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\boxed{b=3-2=1}\\\boxed{c=2}\\2a=2\rightarrow\boxed{a=1}\\ab=1\ \ \text{¡}Se\,cumple!\end{cases}$$

Los valores buscados son *a = 1*, *b = 1* y *c = 2*.

b) Para *a* = 0 la matriz A queda $A=\begin{pmatrix}1&1&5\\0&1&6\\0&0&1\end{pmatrix}$.

$|A|=\begin{vmatrix}1&1&5\\0&1&6\\0&0&1\end{vmatrix}=1\neq 0$. Por lo que existe la inversa de A.

Utilizamos la fórmula para obtenerla.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\5&6&1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1&0\\6&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\5&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&1\\5&6\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}0&0\\6&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&0\\5&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\5&6\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\1&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&6-5\\0&1&-6\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-6\\0&0&1\end{pmatrix}}$$

CUESTIÓN A2. Las funciones $I(t) = -0,5t^2 + 17t$ y $C(t) = 0,5t^2 - t + 32$ con $0 \leq t \leq 18$ representan, respectivamente, los ingresos y los costes de una empresa en miles de euros en función de los años trascurridos desde su comienzo y en los últimos 18 años.
a) ¿Para qué valores de *t*, desde su inicio, los ingresos coincidieron con los costes? (0,5 puntos)
b) Hallar la función que expresa los beneficios (ingresos menos costes) en función de *t* y representarla gráficamente. (0,75 puntos)
c) ¿Cuántos años después del comienzo de su actividad la empresa alcanzó el beneficio máximo? Calcular el valor de dicho beneficio. (1,25 puntos)

a) Igualamos *I(t)* y *C(t)*.

$$I(t) = C(t) \Rightarrow -0,5t^2 + 17t = 0,5t^2 - t + 32 \Rightarrow -0,5t^2 - 0,5t^2 + 17t + t - 32 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -t^2 + 18t - 32 = 0 \Rightarrow t = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot (-1)(-32)}}{2(-1)} = \frac{-18 \pm \sqrt{196}}{-2} = \frac{-18 \pm 14}{-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{-18+14}{-2} = 2 \\ o \\ t = \dfrac{-18-14}{-2} = 16 \end{cases}$$

Coinciden a los dos años y a los 16.

b)

$$B(t) = I(t) - C(t) = -0,5t^2 + 17t - \left(0,5t^2 - t + 32\right) = -0,5t^2 + 17t - 0,5t^2 + t - 32$$

$$B(t) = -t^2 + 18t - 32$$

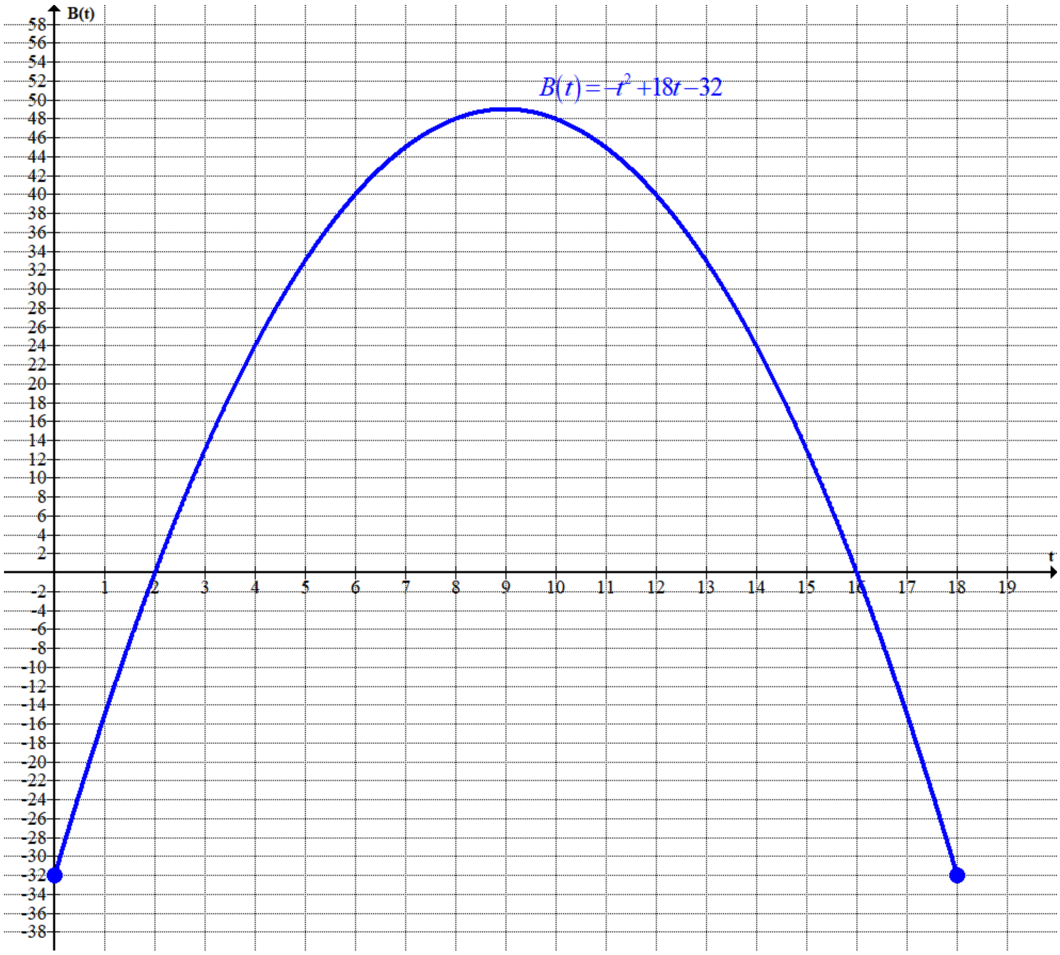
La gráfica de la función beneficios es un trozo de parábola.
Hallamos su vértice y hacemos una tabla de valores para representarla.

$$B(t) = -t^2 + 18t - 32 \Rightarrow B'(t) = -2t + 18$$

$$B'(t) = 0 \Rightarrow -2t + 18 = 0 \Rightarrow -2t = -18 \Rightarrow t = \frac{-18}{-2} = 9$$

El vértice está en $t = 9$.

t	$B(t) = -t^2 + 18t - 32$
0	–32
8	48
Vértice → 9	49
10	48
18	–32



c) El vértice o máximo relativo de la función está en $t = 9$, además hemos calculado $B(9) = 49$.

Observando la gráfica y los datos de la tabla podemos afirmar que los beneficios máximos se obtienen en el año 9 (vértice) y dichos beneficios son 49000 euros.

CUESTIÓN A3. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=e^{x^3+2x}$ (0,5 puntos) b) $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$. (0,5 puntos)

a) $f(x)=e^{x^3+2x} \Rightarrow \boxed{f'(x)=\left(3x^2+2\right)e^{x^3+2x}}$

b)

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}=\frac{1}{(2x-1)^{1/2}}=(2x-1)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow g'(x)=-\frac{1}{2}(2x-1)^{-\frac{1}{2}-1}(2)=-(2x-1)^{-3/2}$$

$$\boxed{g'(x)=\frac{-1}{\sqrt{(2x-1)^3}}}$$

CUESTIÓN A4. Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = 0{,}2$, $P(B) = 0{,}5$ y $P(A \cup B) = 0{,}65$.
a) ¿Son independientes ambos sucesos? Razonar la respuesta. (1,5 puntos)
b) Calcular $P(A/B)$. (0,5 puntos)

a) Para que sean independientes dos sucesos debe cumplirse $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow 0{,}65=0{,}2+0{,}5-P(A\cap B)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(A\cap B)=0{,}2+0{,}5-0{,}65=0{,}05$$

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B)=0{,}05 \\ P(A)P(B)=0{,}2\cdot 0{,}5=0{,}1 \end{array}\right\}\Rightarrow P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$$

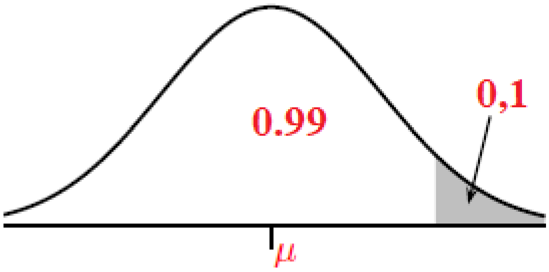
Los sucesos A y B no son independientes.

b)
$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0{,}05}{0{,}5}=\boxed{0{,}1}$$

CUESTIÓN A5. Según un estudio realizado en el año 2000, en una población la proporción de personas que tenía sobrepeso era del 24%. En los últimos años ha disminuido la actividad física que realizan los individuos, lo que hace sospechar que dicha proporción ha aumentado.
Para contrastarlo, se ha tomado recientemente una muestra aleatoria de 1195 individuos, de los cuales 310 tienen sobrepeso. Con un nivel de significación del 1%, ¿se puede rechazar que la proporción sigue siendo del 24% e inclinarnos por que dicha proporción ha aumentado? (1,5 puntos)

Contraste de hipótesis unilateral para la proporción:
Contrastamos H_0: p = 0,24 se acepta que se mantiene la proporción.
H_1: p > 0,24, cabe pensar que la proporción ha subido.

Para el nivel de significación $\alpha = 0'01$ corresponde con $z_\alpha = 2.33$.



El extremo de la región de aceptación es $p + z_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0,24 + 2.33\sqrt{\frac{0,24\cdot 0,76}{1195}} = 0,2688$.

Luego la región de aceptación es el intervalo $(-\infty, 0'2688)$.
Como la proporción de la muestra $p = \frac{310}{1195} = 0,2594$ está dentro del intervalo de aceptación se acepta H_0

Luego los resultados muestrales llevan a mantener que no ha aumentado el sobrepeso.

OPCIÓN B

CUESTIÓN B1. Una pastelería dispone de 100 kg de masa, 80 kg de crema de chocolate y 46 kg de nata. Con estos ingredientes elabora dos tipos de tartas: la tarta de chocolate, que requiere para su elaboración 1 kg de masa y 2 kg de crema de chocolate, y la tarta de chocolate y nata, que requiere 2 kg de masa, 1 kg de crema de chocolate y 1 kg de nata. Por cada tarta de chocolate se obtiene un beneficio de 10 euros, y de 12 euros por cada una de chocolate y nata. Suponiendo que vende todas las tartas, ¿cuántas tartas de cada tipo debe preparar para maximizar su beneficio?, ¿cuál es el beneficio máximo? (3 puntos)

Sean x = número de tartas de chocolate; y = número de tartas de chocolate y nata.

Hacemos una tabla para aclarar la situación.

	Kg de masa	**Kg de crema de chocolate**	**Kg de nata**	**Beneficio**
Nº de tartas de chocolate (x)	x	$2x$		$10x$
Nº de tartas de chocolate y nata (y)	$2y$	y	y	$12y$
TOTALES	$x+2y$	$2x+y$	y	$10x+12y$

Deseamos maximizar el beneficio que viene expresado con la función: $B(x,y)=10x+12y$

Las restricciones son:

"Las cantidades deben ser positivas" → $x \geq 0;\ y \geq 0$

"Una pastelería dispone de 100 kg de masa, 80 kg de crema de chocolate y 46 kg de nata"

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y \leq 100 \\ 2x+y \leq 80 \\ y \leq 46 \end{array}\right\}$$

Reunimos todas las restricciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ x+2y \leq 100 \\ 2x+y \leq 80 \\ y \leq 46 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ 2y \leq 100-x \\ y \leq 80-2x \\ y \leq 46 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a cada inecuación.

$x \geq 0;\ y \geq 0$ — *Primer cuadrante*

$2y = 100 - x$

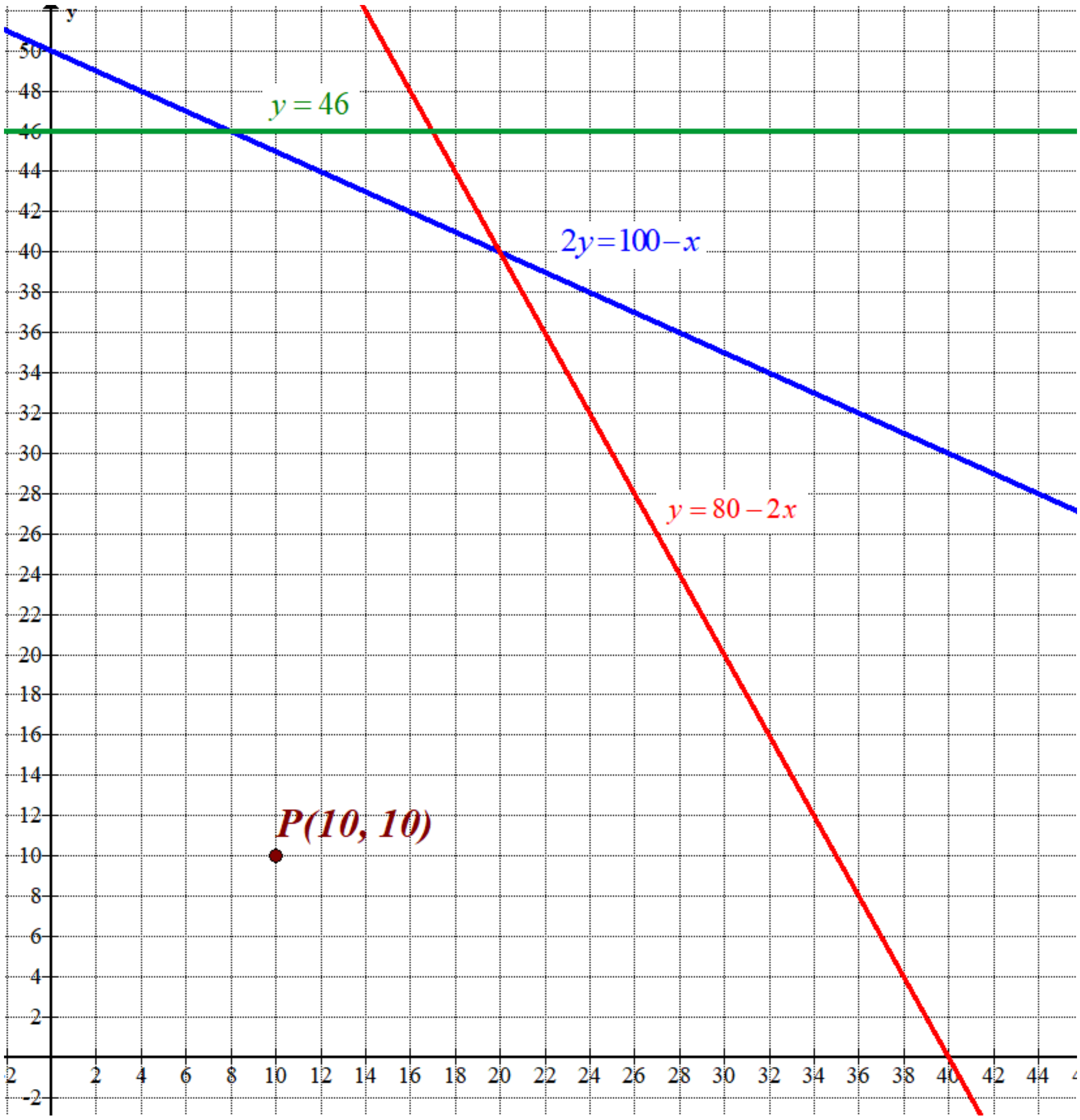
x	$y=\frac{100-x}{2}$
8	46
20	40

$y = 80 - 2x$

x	$y=80-2x$
20	40
40	0

$y = 46$

x	$y=46$
0	46
8	46

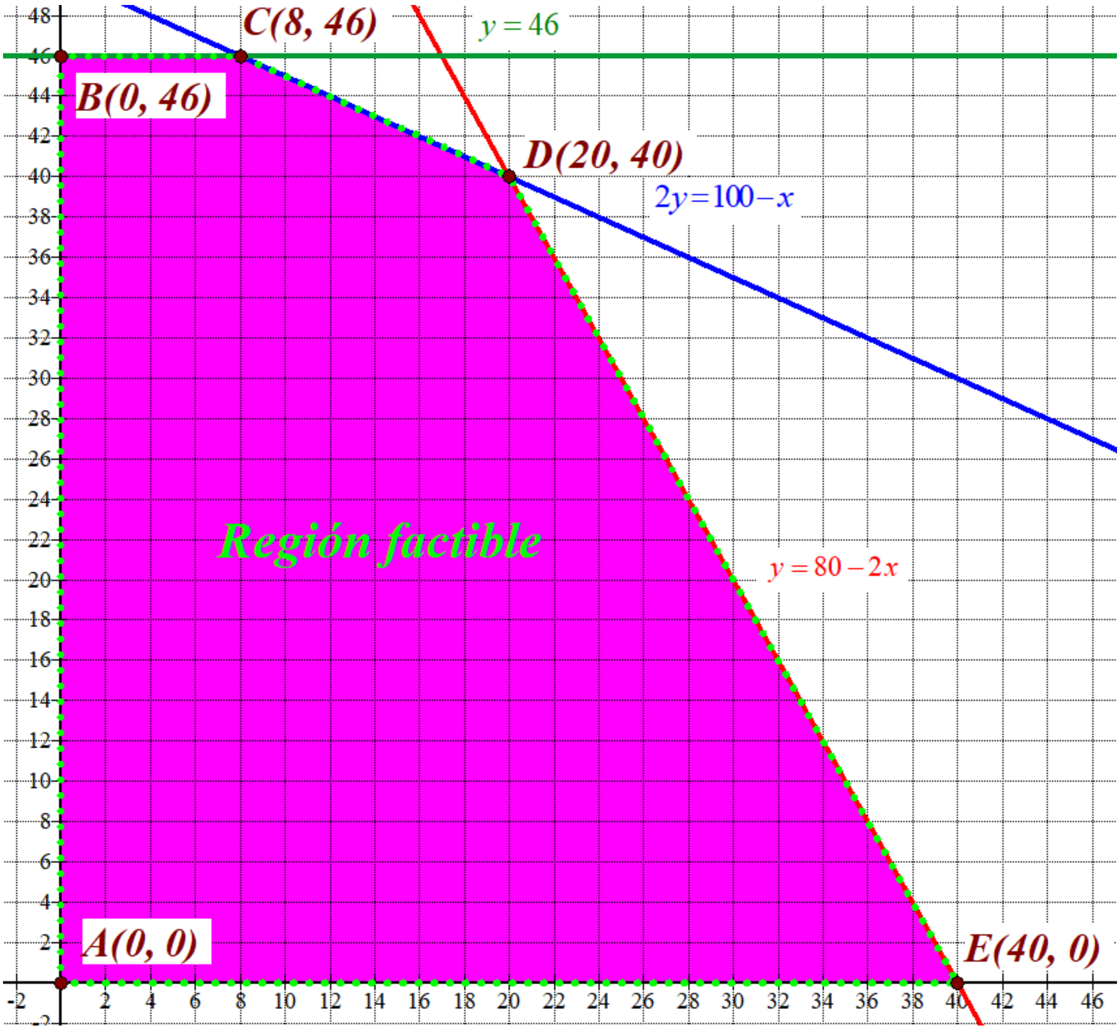


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ 2y \leq 100 - x \\ y \leq 80 - 2x \\ y \leq 46 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas azul, roja y verde.

Comprobamos que el punto *P(10, 10)* cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 10 \geq 0;\ 10 \geq 0 \\ 2 \cdot 10 \leq 100 - 10 \\ 10 \leq 80 - 2 \cdot 10 \\ 10 \leq 46 \end{array}\right\} \text{¡¡Se cumplen todas!!}$$

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de los vértices de la región.



Obtenemos las coordenadas de los vértices C y D.

$$C \rightarrow \begin{cases} y = 46 \\ 2y = 100 - x \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot 46 = 100 - x \Rightarrow 92 = 100 - x \Rightarrow x = 100 - 92 = 8 \Rightarrow C(8, 46)$$

$$D \rightarrow \begin{cases} 2y = 100 - x \\ y = 80 - 2x \end{cases} \Rightarrow 2(80 - 2x) = 100 - x \Rightarrow 160 - 4x = 100 - x \Rightarrow 60 = 3x \Rightarrow x = 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 80 - 2 \cdot 20 = 40 \Rightarrow D(20, 40)$$

Valoramos la función objetivo $B(x, y) = 10x + 12y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(0, 0) → $B(0,0) = 0$

B(0, 46) → $B(0,46) = 10 \cdot 0 + 12 \cdot 46 = 552$

C(8, 46) → $B(8,46) = 10 \cdot 8 + 12 \cdot 46 = 632$

D(20, 40) → $B(20,40) = 10 \cdot 20 + 12 \cdot 40 = 680$ ¡*Máximo*!

E(40, 0) → $B(40,0) = 10 \cdot 40 + 12 \cdot 0 = 400$

El máximo beneficio se obtiene haciendo 20 tartas de chocolate y 40 de chocolate y nata. Siendo este beneficio máximo de 680 €.

CUESTIÓN B2. Dada la función $f(x)=x^4+ax+b$, hallar a y b sabiendo que en x = 1 la función tiene un extremo relativo (un máximo o un mínimo relativo) y que f (1) = 2. ¿Se trata de un máximo o de un mínimo relativo? (1,5 puntos)

Si en x = 1 la función tiene un extremo relativo significa que la derivada se anula → *f ´(1) = 0***.**

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=4x^3+a \\ f'(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 4\cdot 1^3+a=0 \Rightarrow 4+a=0 \Rightarrow \boxed{a=-4}$$

La función queda $f(x)=x^4-4x+b$.

Como f (1) = 2 entonces:

$$f(1)=2=1^4-4\cdot 1+b \Rightarrow 2=1-4+b \Rightarrow \boxed{b=5}$$

Los valores buscados son *a = –4* y *b = 5*.

La función queda $f(x)=x^4-4x+5$.

Averiguamos si en *x = 1* la función presenta un máximo o mínimo relativo.

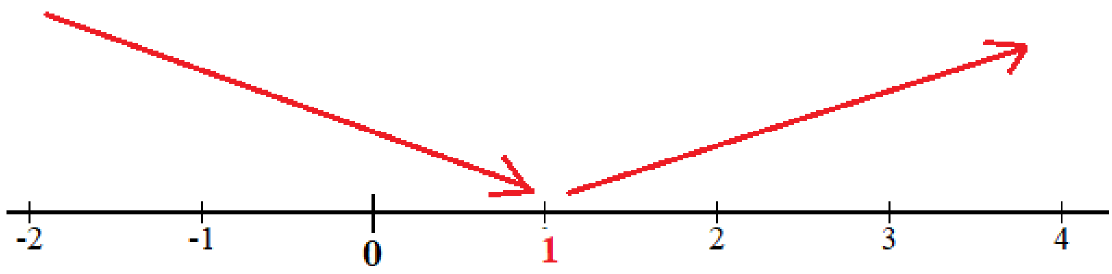
$$f'(x)=4x^3-4$$
$$f'(x)=0 \Rightarrow 4x^3-4=0 \Rightarrow x^3-1=0 \Rightarrow x^3=1 \Rightarrow x=\sqrt[3]{1}=1$$

La función solo presenta un extremo relativo en *x = 1*.

En $(-\infty,1)$ tomamos *x = 0* y la derivada vale $f'(0)=4\cdot 0^3-4=-4<0$. La función decrece en $(-\infty,1)$.

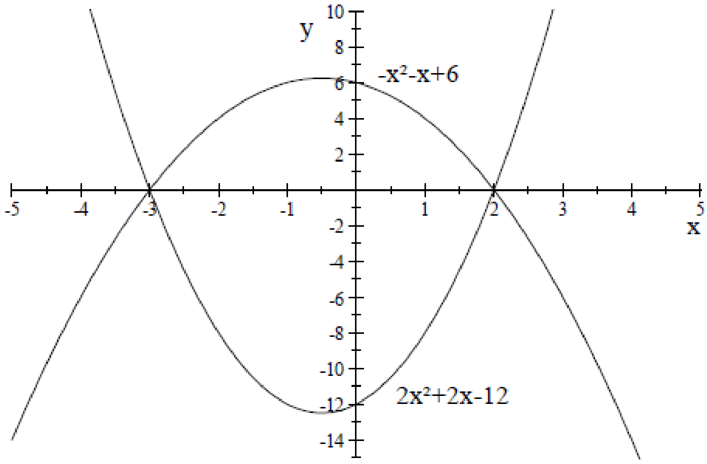
En $(1,+\infty)$ tomamos *x = 2* y la derivada vale $f'(2)=4\cdot 2^3-4=32-4=28>0$. La función crece en $(1,+\infty)$.

La función sigue el esquema del dibujo:



La función presenta un mínimo relativo en *x = 1*.

CUESTIÓN B3. Dadas las parábolas $f(x) = 2x^2 + 2x - 12$ y $g(x) = -x^2 - x + 6$ cuyas gráficas se presentan a continuación, hallar el área de recinto acotado encerrado entre ambas.



(1,5 puntos)

Como se aprecia en el dibujo de las gráficas el recinto del cual queremos hallar el área comienza en $x = -3$ y termina en $x = 2$. El área se obtiene de la integral definida entre $x = -3$ y $x = 2$ de $g(x) - f(x)$.

$$Área = \int_{-3}^{2} g(x) - f(x)\,dx = \int_{-3}^{2} -x^2 - x + 6 - \left(2x^2 + 2x - 12\right)dx =$$

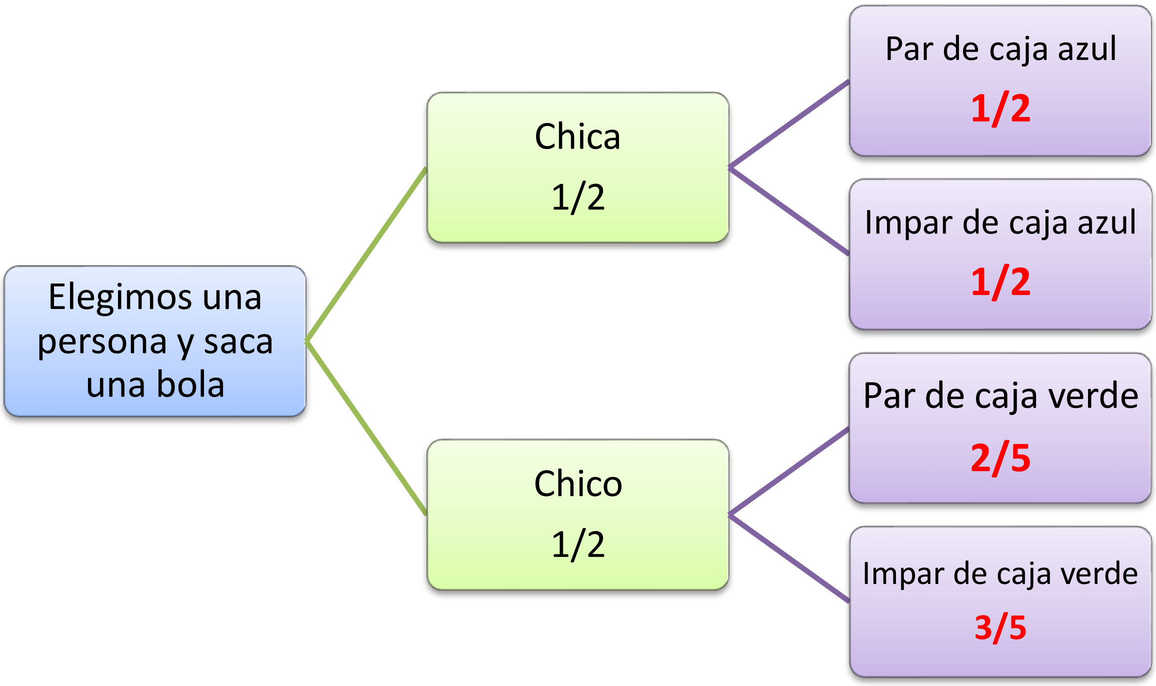
$$= \int_{-3}^{2} -x^2 - x + 6 - 2x^2 - 2x + 12dx = \int_{-3}^{2} -3x^2 - 3x + 18dx =$$

$$= \left[-x^3 - 3\frac{x^2}{2} + 18x\right]_{-3}^{2} = \left[-2^3 - 3\frac{2^2}{2} + 18\cdot 2\right] - \left[-(-3)^3 - 3\frac{(-3)^2}{2} + 18(-3)\right] =$$

$$= -8 - 6 + 36 - 27 + \frac{27}{2} + 54 = \boxed{62.5u^2}$$

CUESTIÓN B4. En una clase hay 15 chicos y 15 chicas que van a realizar el siguiente experimento aleatorio: se tiene una caja azul con 10 bolas numeradas de 1 a 10 y una caja verde con 5 bolas numeradas de 1 a 5, se elige al azar una persona de la clase, si es una chica, extrae una bola de la caja azul, y si es un chico, extrae una bola de la caja verde.
a) ¿Cuál es la probabilidad de extraer un número par? (1 punto)
b) Si el número extraído ha sido par, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido extraído por una chica? (1 punto)

La probabilidad de que la persona elegida sea chico es de 1/2, al igual que la probabilidad de elegir chica.
La probabilidad de elegir par en la caja azul es 5/10 = 1/2.
La probabilidad de elegir par en la caja verde es 2/5.
Realizamos un diagrama de árbol con el que describir los distintos resultados posibles y su probabilidad.



a) $P(Sacar\ par) = P(Chica\ y\ par) + P(Chico\ y\ par) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \boxed{\frac{9}{20} = 0.45}$

b) Nos piden calcular una probabilidad a posteriori. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(Chica/Par) = \frac{P(Chica \cap Par)}{P(Par)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{9}{20}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{9}{20}} = \frac{20}{36} = \boxed{\frac{5}{9} \simeq 0.556}$$

CUESTIÓN B5. El tiempo de espera para ser atendido en la caja de un establecimiento sigue una distribución normal de desviación típica 5 minutos. Calcular el tamaño mínimo de la muestra para estimar, con un nivel de confianza del 95%, el tiempo medio de espera con un error que no sea superior a medio minuto. ¿Cuál es dicho tamaño mínimo para un nivel de confianza del 99%? (2 puntos)

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 95% el $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$$

El error sigue la fórmula:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{5}{\sqrt{n}} = 0.5 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{n}} = \frac{0.5}{1.96} \Rightarrow 5 \cdot 1.96 = 0.5 \cdot \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{5 \cdot 1.96}{0.5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \left(\frac{5 \cdot 1.96}{0.5} \right)^2 \simeq 384.16$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 385.
Se tiene la confianza del 95% de que el error de la estima será menor de medio minuto solamente si *n* es 385 o mayor.

Si aumentamos el nivel de confianza al 99% repetimos los cálculos.

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 99% el $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow \alpha/2 = 0.005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.58}$$

El error sigue la fórmula

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.58 \cdot \frac{5}{\sqrt{n}} = 0.5 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{n}} = \frac{0.5}{2.58} \Rightarrow 5 \cdot 2.58 = 0.5 \cdot \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{5 \cdot 2.58}{0.5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \left(\frac{5 \cdot 2.58}{0.5} \right)^2 \simeq 665.64$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 666.
Se tiene la confianza del 99% de que el error de la estima será menor de medio minuto solamente si *n* es 666 o mayor.