PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA ALUMNOS DE BACHILLERATO LOE

Septiembre 2013

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II. CÓDIGO 159

OBSERVACIONES IMPORTANTES: *El alumno deberá elegir una opción A o B y responder a todas las cuestiones de esa opción. Nunca podrá mezclar cuestiones de la opción A con cuestiones de la opción B. En cada cuestión se indica su puntuación. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.*

OPCIÓN A

CUESTIÓN A1. En un avión viajan un total de 360 pasajeros, el número de hombres duplica al de la suma de las mujeres y los niños. El número de adultos menos el de niños duplica al número de hombres menos el de mujeres. Determinar el número de hombres, mujeres y niños que viajan en el avión. (2,5 puntos)

CUESTIÓN A2. Se sabe que la expresión que representa el número de personas $N(t)$ que acude un día a un centro médico, en función del número de horas t que lleva abierto, es $N(t) = at^2 + bt,\ 0 \le t \le 8,\ a,b \in \mathbb{R}$. Sabiendo que el número máximo de personas que ha habido ese día ha sido de 128, y que se ha producido a las 4 horas de abrir, calcule a y b. (2 puntos)

CUESTIÓN A3. a) Calcule la derivada de las funciones $f(x) = e^{x^2-2x}$ y $g(x) = \ln(x^7+1)$. (1 punto)

b) Calcule $\int_1^3 (x^2 - 3x - 1)\,dx$. (1 punto)

CUESTIÓN A4. Un archivador contiene 70 exámenes del grupo 1, 50 del grupo 2, 100 del grupo 3 y 25 del grupo 4. El 5% de los exámenes del grupo 1, el 3 % de los del grupo 2 y el 8 % del grupo 3 está suspenso. En el grupo 4 no hay ningún suspenso.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, al elegir un examen al azar, esté suspenso? (1 punto)
b) Se ha elegido un examen y está suspenso, ¿cuál es la probabilidad de que sea del grupo 2? (1 punto)

CUESTIÓN A5. De una muestra aleatoria de 700 individuos de una población, 100 son mujeres. Hallar un intervalo de confianza al 98% para la proporción de mujeres de esa población. (1,5 puntos)

OPCIÓN B

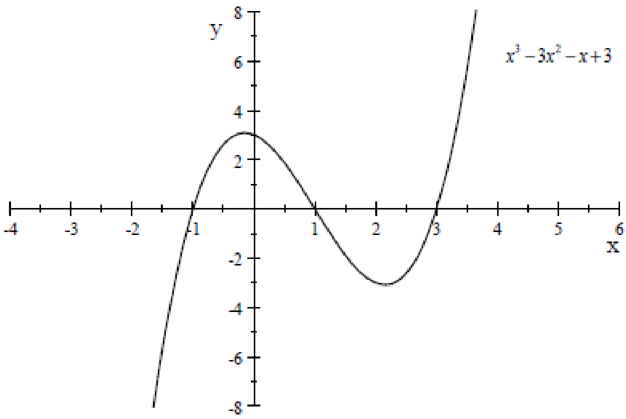
CUESTIÓN B1. Para elaborar un menú se dispone de un primer plato y un segundo plato. Una porción del primer plato contiene 6 mg de vitamina C, 2 mg de hierro y 20 mg de calcio, y aporta 110 calorías. Una porción del segundo contiene 3 mg de vitamina C, 2 mg de hierro y 40 mg de calcio, y aporta 65 calorías. ¿Cuántas porciones de cada plato deben utilizarse para que el menú aporte el menor número de calorías, sabiendo que debe contener al menos 36 mg de vitamina C, 20 mg de hierro y 240 mg de calcio? (3 puntos)

CUESTIÓN B2. Los ingresos obtenidos por la fabricación de x unidades diarias de cierto producto vienen dados por $I(x) = -28x^2 + 5256x$, y los costes vienen dados por la función $C(x) = 22x^2 + 4456x + 814$.

a) Determinar la función que expresa los beneficios obtenidos por la fabricación de x unidades diarias del producto (sabiendo que los beneficios se definen como los ingresos menos los costes) y calcular el número de unidades diarias que hay que fabricar para obtener un beneficio máximo. (1,75 puntos)

b) ¿Cuánto vale dicho beneficio máximo? (0,25 puntos)

CUESTIÓN B3. Se da la siguiente gráfica, que corresponde a la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, y se pide calcular el área que encierra la gráfica de la función con el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 2$



(1,5 puntos)

CUESTIÓN B4. Sean A y B dos sucesos independientes de un mismo experimento aleatorio, tales que $P(A) = 0,2$ y $P(B) = 0,8$.

a) Calcular $P(A \cap B)$ y $P(A \cup B)$. (1,5 puntos)

b) Calcular $P(A / B)$. (0,5 puntos)

CUESTIÓN B5. Hace veinte años la edad en que la mujer tenía su primer hijo seguía una distribución normal con media 29 años y desviación típica de 2 años. Recientemente en una muestra aleatoria de 144 mujeres se ha obtenido, para dicha edad, una media de 31 años. Con un nivel de significación de 0,05 ¿se puede afirmar que la edad media en la que la mujer tiene su primer hijo es mayor actualmente que hace veinte años? (1,5 puntos)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

CUESTIÓN A1. En un avión viajan un total de 360 pasajeros, el número de hombres duplica al de la suma de las mujeres y los niños. El número de adultos menos el de niños duplica al número de hombres menos el de mujeres. Determinar el número de hombres, mujeres y niños que viajan en el avión. (2,5 puntos)

Llamamos "*x*" al número de mujeres, "*y*" al número de hombres y "*z*" al número de niños.

"*En un avión viajan un total de 360 pasajeros*" → $x+y+z=360$

"*El número de hombres duplica al de la suma de las mujeres y los niños*" → $y=2(x+z)$

"*El número de adultos menos el de niños duplica al número de hombres menos el de mujeres*" → $x+y-z=2(y-x)$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=360 \\ y=2(x+z) \\ x+y-z=2(y-x) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=360 \\ y=2x+2z \\ x+y-z=2y-2x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=360 \\ y=2x+2z \\ 3x-y-z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2x+2z+z=360 \\ 3x-(2x+2z)-z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+3z=360 \\ 3x-2x-2z-z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+z=120 \\ x-3z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+z=120 \\ x=3z \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3z+z=120 \Rightarrow 4z=120 \Rightarrow \boxed{z=\frac{120}{4}=30} \Rightarrow \boxed{x=3\cdot 30=90} \Rightarrow \boxed{y=2\cdot 90+2\cdot 30=240}$$

En el avión viajan 90 mujeres, 240 hombres y 30 niños.

CUESTIÓN A2. Se sabe que la expresión que representa el número de personas $N(t)$ que acude un día a un centro médico, en función del número de horas t que lleva abierto, es $N(t) = at^2 + bt,\ 0 \le t \le 8,\ a,b \in \mathbb{R}$. Sabiendo que el número máximo de personas que ha habido ese día ha sido de 128, y que se ha producido a las 4 horas de abrir, calcule a y b. (2 puntos)

La información proporcionada nos indica que $N(4) = 128$ y que en $t = 4$ hay un máximo.

$$N(4) = 128 \rightarrow N(4) = a\cdot 4^2 + b\cdot 4 = 128 \Rightarrow 16a + 4b = 128 \Rightarrow \boxed{4a + b = 32}$$

Si en $t = 4$ hay un máximo la derivada de la función debe anularse, es decir, $N\,'(4) = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} N'(t) = 2at + b \\ N'(4) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2a\cdot 4 + b = 0 \Rightarrow 8a + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = -8a}$$

Reunimos las dos ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} 4a + b = 32 \\ b = -8a \end{array}\right\} \Rightarrow 4a - 8a = 32 \Rightarrow -4a = 32 \Rightarrow \boxed{a = \frac{32}{-4} = -8} \Rightarrow \boxed{b = -8(-8) = 64}$$

Los valores de a y b necesarios para que se cumplan las condiciones requeridas son $a = -8$ y $b = 64$.

CUESTIÓN A3.

a) Calcule la derivada de las funciones $f(x)=e^{x^2-2x}$ y $g(x)=\ln\left(x^7+1\right)$. (1 punto)

b) Calcule $\int_1^3\left(x^2-3x-1\right)dx$. (1 punto)

a) $f'(x)=(2x-2)e^{x^2-2x}$

$$g'(x)=\frac{7x^6}{x^7+1}$$

b)

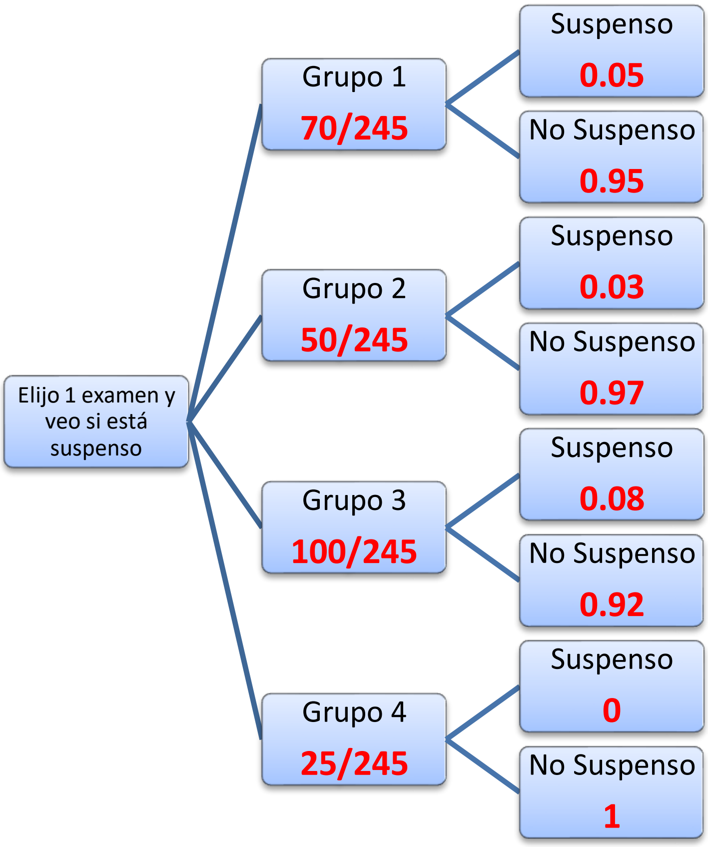
$$\int_1^3\left(x^2-3x-1\right)dx=\left[\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}-x\right]_1^3=\left[\frac{3^3}{3}-3\frac{3^2}{2}-3\right]-\left[\frac{1^3}{3}-3\frac{1^2}{2}-1\right]=$$

$$=9-\frac{27}{2}-3-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}+1=7-\frac{1}{3}-\frac{24}{2}=\frac{42-2-72}{6}=\frac{-32}{6}=\boxed{-\frac{16}{3}}$$

CUESTIÓN A4. Un archivador contiene 70 exámenes del grupo 1, 50 del grupo 2, 100 del grupo 3 y 25 del grupo 4. El 5% de los exámenes del grupo 1, el 3 % de los del grupo 2 y el 8 % del grupo 3 está suspenso. En el grupo 4 no hay ningún suspenso.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que, al elegir un examen al azar, esté suspenso? (1 punto)
b) Se ha elegido un examen y está suspenso, ¿cuál es la probabilidad de que sea del grupo 2? (1 punto)

Construimos un diagrama de árbol para establecer los distintos posibles resultados y sus probabilidades.

Hay un total de 70 + 50 + 100 + 25 = 245 exámenes.



a)

$$P(\text{El examen elegido está suspenso}) = \frac{70}{245}\cdot 0.05 + \frac{50}{245}\cdot 0.03 + \frac{100}{245}\cdot 0.08 + \frac{25}{245}\cdot 0$$

$$P(\text{El examen elegido está suspenso}) = \boxed{\frac{13}{245} \simeq 0.53061}$$

b) Es una probabilidad a posteriori, aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(\text{Grupo 2 / El examen está suspenso}) = \frac{P(\text{Grupo 2 } \cap \text{ El examen está suspenso})}{P(\text{El examen está suspenso})}$$

$$P(\text{Grupo 2 / El examen está suspenso}) = \frac{\frac{50}{245}\cdot 0.03}{\frac{13}{245}} = \frac{1.5}{13} = \boxed{\frac{3}{26} \simeq 0.11538}$$

CUESTIÓN A5. De una muestra aleatoria de 700 individuos de una población, 100 son mujeres. Hallar un intervalo de confianza al 98% para la proporción de mujeres de esa población. (1,5 puntos)

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 98% el $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.98 \rightarrow \alpha = 0.02 \rightarrow \alpha/2 = 0.01 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.99 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.33}$$

Conocemos $n = 700$ $\quad p = \frac{100}{700} = \frac{1}{7} \quad 1 - p = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$

El error sigue la fórmula $Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} = 2.33 \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{7} \cdot \frac{6}{7}}{700}} \simeq 0.0308$

La fórmula del intervalo de confianza es $\left(p - Error, \quad p + Error\right)$ y al 98 % de confianza y con los datos del ejercicio sería:

$$\left(\frac{1}{7} - 0.0308, \quad \frac{1}{7} + 0.0308\right) = (0.1121, 0.1737)$$

Con una confianza del 98 % la proporción de la población que son mujeres está entre el 11.21% y el 17.37 %.

OPCIÓN B

CUESTIÓN B1. Para elaborar un menú se dispone de un primer plato y un segundo plato. Una porción del primer plato contiene 6 mg de vitamina C, 2 mg de hierro y 20 mg de calcio, y aporta 110 calorías. Una porción del segundo contiene 3 mg de vitamina C, 2 mg de hierro y 40 mg de calcio, y aporta 65 calorías. ¿Cuántas porciones de cada plato deben utilizarse para que el menú aporte el menor número de calorías, sabiendo que debe contener al menos 36 mg de vitamina C, 20 mg de hierro y 240 mg de calcio? (3 puntos)

Sean x = número de porciones del primer plato P1; y = número de porciones del segundo plato P2

Hacemos una tabla para aclarar la situación.

	Mg de vitamina C	**Mg de hierro**	**Mg de calcio**	**Calorías**
Porciones del primer plato (x)	$6x$	$2x$	$20x$	$110x$
Porciones del segundo plato (y)	$3y$	$2y$	$40y$	$65y$
TOTALES	$6x+3y$	$2x+2y$	$20x+40y$	$110x+65y$

Deseamos minimizar el número de calorías del menú que vienen expresadas con la función:

$$f(x,y)=110x+65y$$

Las restricciones son:

"Las cantidades deben ser positivas" → $x\geq 0;\ y\geq 0$

"El menú debe contener al menos 36 mg de vitamina C, 20 mg de hierro y 240 mg de calcio"

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} 6x+3y\geq 36 \\ 2x+2y\geq 20 \\ 20x+40y\geq 240 \end{array}\right\}$$

Reunimos todas las restricciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x\geq 0;\ y\geq 0 \\ 6x+3y\geq 36 \\ 2x+2y\geq 20 \\ 20x+40y\geq 240 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x\geq 0;\ y\geq 0 \\ 2x+y\geq 12 \\ x+y\geq 10 \\ x+2y\geq 12 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x\geq 0;\ y\geq 0 \\ y\geq 12-2x \\ y\geq 10-x \\ 2y\geq 12-x \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a cada inecuación.

$x\geq 0;\ y\geq 0$ — *Primer cuadrante*

$y=12-2x$

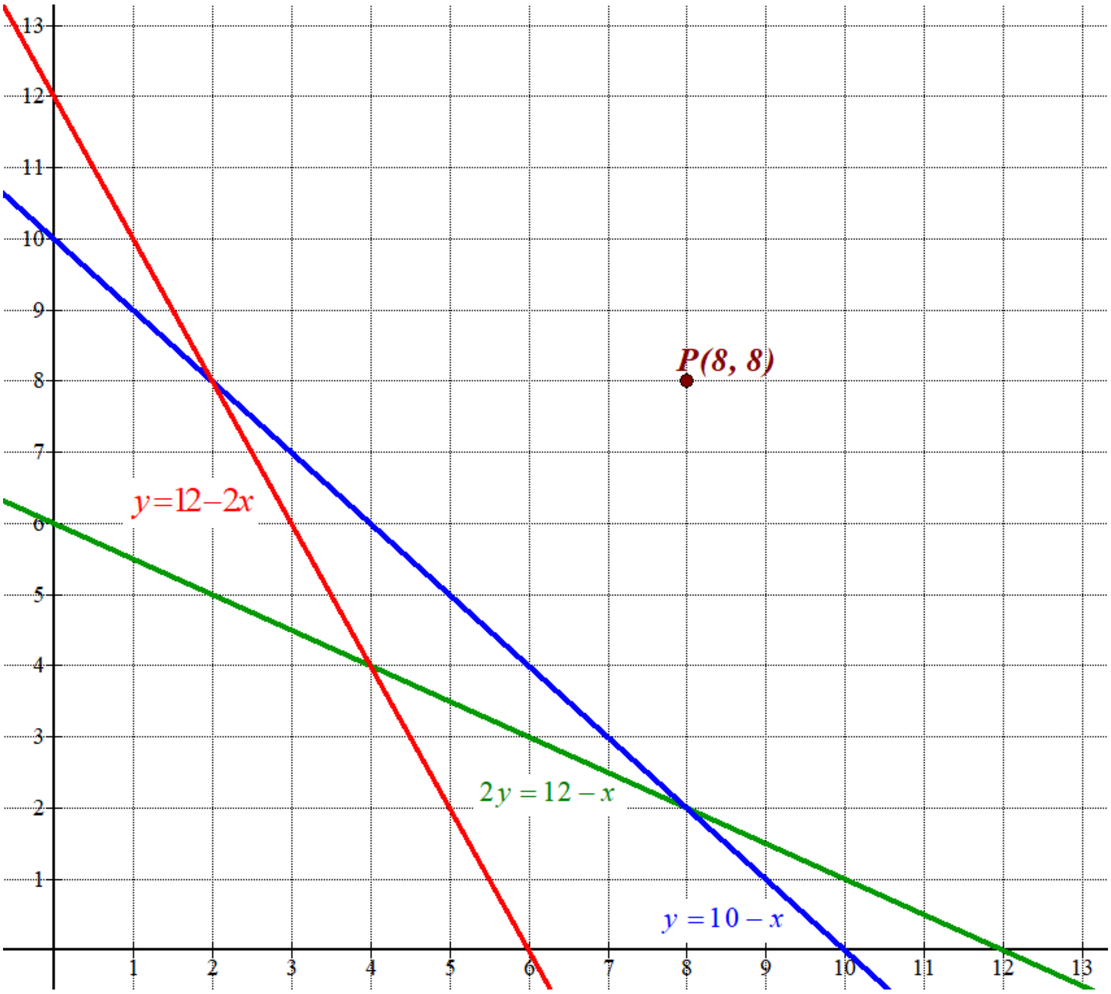
x	$y=12-2x$
0	12
2	8

$y=10-x$

x	$y=10-x$
2	8
8	2

$2y=12-x$

x	$y=\frac{12-x}{2}$
8	2
12	0

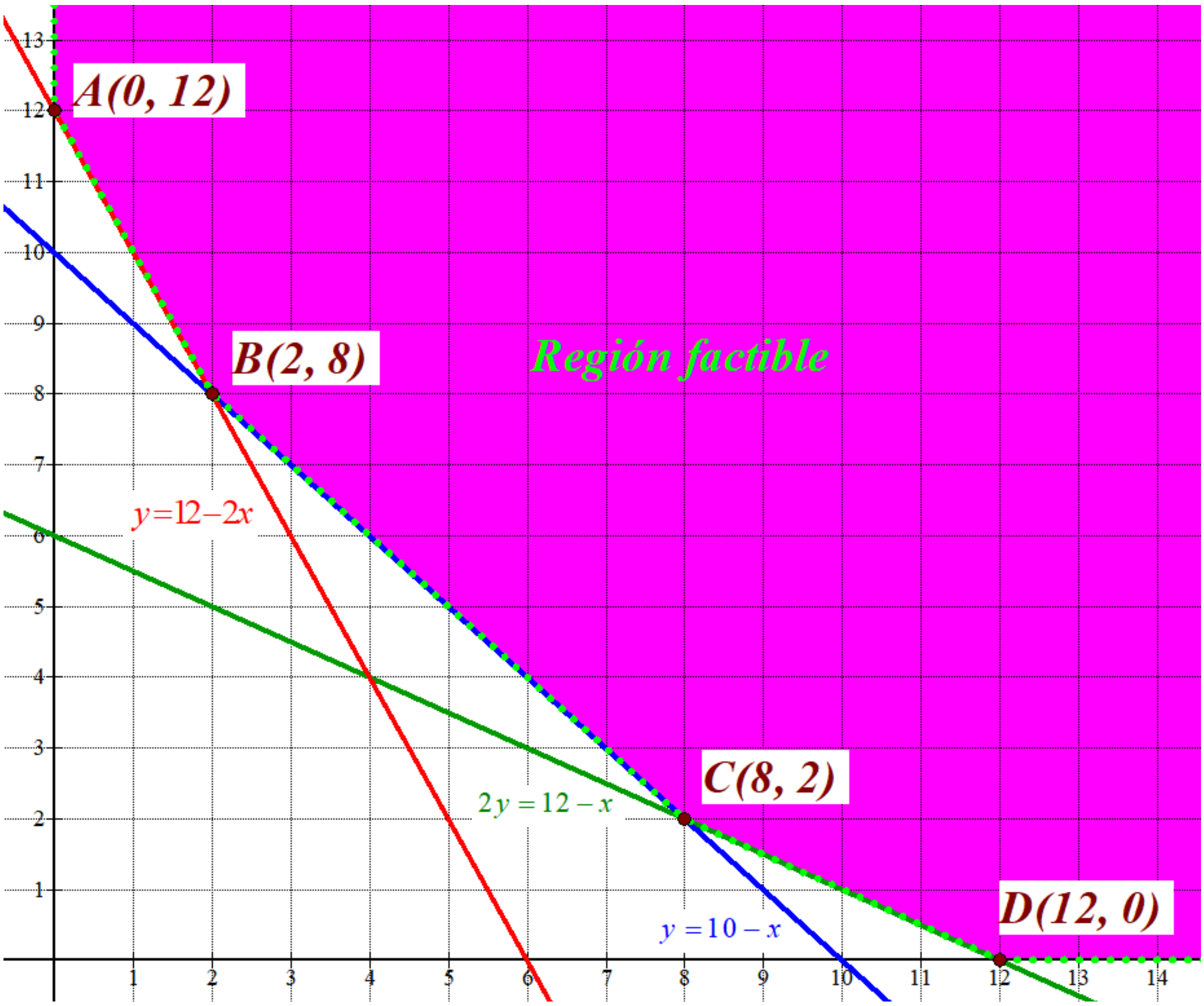


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ y \geq 12-2x \\ y \geq 10-x \\ 2y \geq 12-x \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por encima de las rectas azul, roja y verde.

Comprobamos que el punto *P(8, 8)* cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 8 \geq 0;\ 8 \geq 0 \\ 8 \geq 12-2\cdot 8 \\ 8 \geq 10-8 \\ 2\cdot 8 \geq 12-8 \end{array}\right\} \text{¡¡Se cumplen todas!!}$$

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de los vértices de la región.



Valoramos la función objetivo $f(x,y)=110x+65y$ en cada vértice en busca del valor mínimo.

A(0, 12) → $f(0,12)=110\cdot 0+65\cdot 12=780$

B(2, 8) → $f(2,8)=110\cdot 2+65\cdot 8=$ 740 ¡¡Mínimo!!

C(8, 2) → $f(8,2)=110\cdot 8+65\cdot 2=1010$

D(12, 0) → $f(12,0)=110\cdot 12+65\cdot 0=1320$

El menú que aporta menor número de calorías se hace con 2 porciones del primer plato y 8 del segundo plato, siendo el aporte de 740 calorías.

CUESTIÓN B2. Los ingresos obtenidos por la fabricación de x unidades diarias de cierto producto vienen dados por $I(x) = -28x^2 + 5256x$, y los costes vienen dados por la función $C(x) = 22x^2 + 4456x + 814$.

a) Determinar la función que expresa los beneficios obtenidos por la fabricación de x unidades diarias del producto (sabiendo que los beneficios se definen como los ingresos menos los costes) y calcular el número de unidades diarias que hay que fabricar para obtener un beneficio máximo. (1,75 puntos)
b) ¿Cuánto vale dicho beneficio máximo? (0,25 puntos)

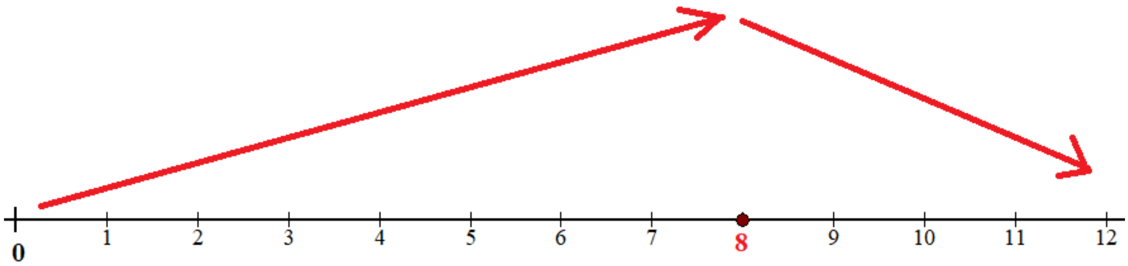
a)

$$B(x) = I(x) - C(x) = -28x^2 + 5256x - \left(22x^2 + 4456x + 814\right)$$
$$B(x) = -28x^2 + 5256x - 22x^2 - 4456x - 814$$
$$B(x) = -50x^2 + 800x - 814$$

Derivamos la función e igualamos a cero.

$$B(x) = -50x^2 + 800x - 814 \Rightarrow B'(x) = -100x + 800$$
$$B'(x) = 0 \Rightarrow -100x + 800 = 0 \Rightarrow 100x = 800 \Rightarrow x = \frac{800}{100} = 8$$

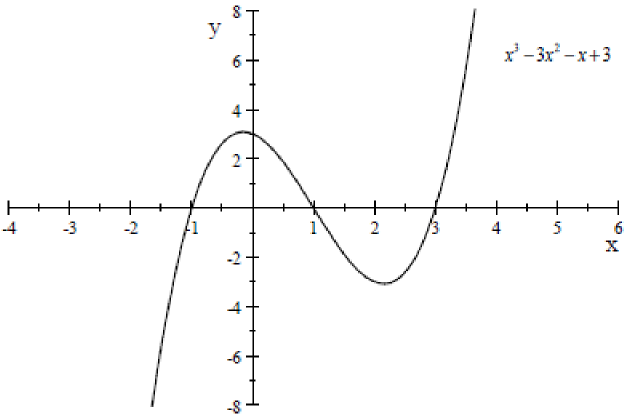
En $(0,8)$ tomamos $x = 5$ y la derivada vale $B'(5) = -500 + 800 = 300 > 0$. La función crece en $(0,8)$.
En $(0,+\infty)$ tomamos $x = 10$ y la derivada vale $B'(10) = -1000 + 800 = -200 < 0$. La función decrece en $(0,+\infty)$.
La función beneficio sigue el esquema:



En $x = 8$ hay un máximo. Hay que fabricar 8 unidades diarias para obtener un beneficio máximo.

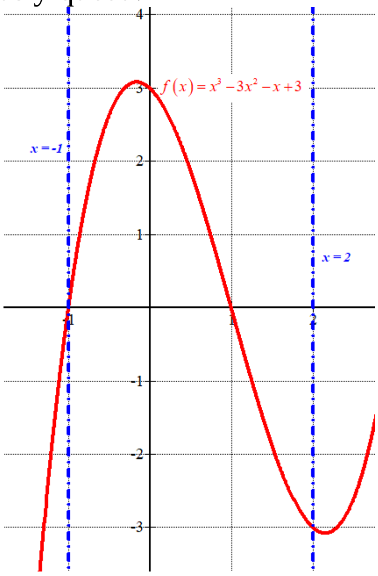
b) El beneficio máximo es de $B(8) = -50 \cdot 8^2 + 800 \cdot 8 - 814 = 2386$

CUESTIÓN B3. Se da la siguiente gráfica, que corresponde a la función $f(x)=x^3-3x^2-x+3$, y se pide calcular el área que encierra la gráfica de la función con el eje OX y las rectas $x=-1$ y $x=2$

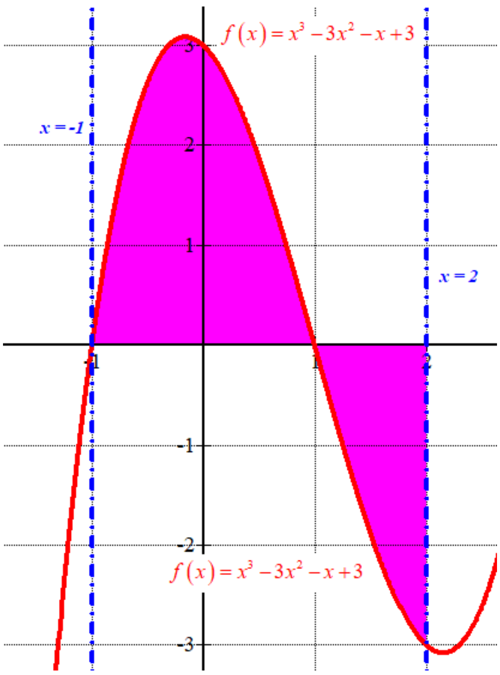


(1,5 puntos)

Añadimos al dibujo las rectas dadas y queda:



El recinto del cual queremos calcular el área es:



Calculamos el área con la integral definida entre –1 y 1 de $f\left(x\right)=x^3-3x^2-x+3$ más el valor absoluto de la integral definida entre 1 y 2 de $f\left(x\right)=x^3-3x^2-x+3$.

$$Área=\int_{-1}^{1}x^3-3x^2-x+3dx+\left|\int_{1}^{2}x^3-3x^2-x+3dx\right|=\left[\frac{x^4}{4}-x^3-\frac{x^2}{2}+3x\right]_{-1}^{1}+\left|\left[\frac{x^4}{4}-x^3-\frac{x^2}{2}+3x\right]_{1}^{2}\right|=$$

$$=\left[\frac{1^4}{4}-1^3-\frac{1^2}{2}+3\cdot 1\right]-\left[\frac{\left(-1\right)^4}{4}-\left(-1\right)^3-\frac{\left(-1\right)^2}{2}+3\left(-1\right)\right]+\left|\left[\frac{2^4}{4}-2^3-\frac{2^2}{2}+3\cdot 2\right]-\left[\frac{1^4}{4}-1^3-\frac{1^2}{2}+3\right]\right|=$$

$$=\cancel{\frac{1}{4}}-1-\cancel{\frac{1}{2}}+3-\cancel{\frac{1}{4}}-1+\cancel{\frac{1}{2}}+3+\left|4-8-2+6-\frac{1}{4}+1+\frac{1}{2}-3\right|=4+\left|\frac{1}{4}-2\right|=4+\frac{7}{4}=\frac{23}{4}=\boxed{5.75\ u^2}$$

CUESTIÓN B4. Sean A y B dos sucesos independientes de un mismo experimento aleatorio, tales que $P(A) = 0,2$ y $P(B) = 0,8$.
a) Calcular $P(A \cap B)$ y $P(A \cup B)$. (1,5 puntos)
b) Calcular $P(A / B)$. (0,5 puntos)

a) Como los sucesos A y B son independientes se cumple $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Por lo que $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.2 \cdot 0.8 = \boxed{0.16}$

Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión.

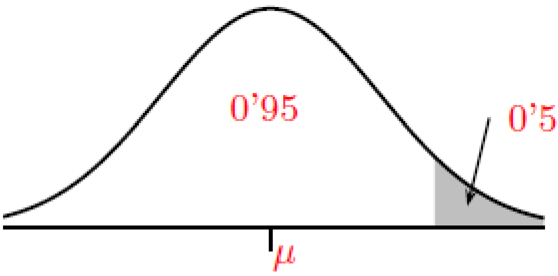
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.2 + 0.8 - 0.16 = \boxed{0.84}$

b) Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.16}{0.8} = \boxed{0.2}$$

CUESTIÓN B5. Hace veinte años la edad en que la mujer tenía su primer hijo seguía una distribución normal con media 29 años y desviación típica de 2 años. Recientemente en una muestra aleatoria de 144 mujeres se ha obtenido, para dicha edad, una media de 31 años. Con un nivel de significación de 0,05 ¿se puede afirmar que la edad media en la que la mujer tiene su primer hijo es mayor actualmente que hace veinte años? (1,5 puntos)

Contrastamos H_0: $\mu = 29$ frente a H_1: $\mu > 29$, es test unilateral.
Desviación típica $\sigma = 2$ años
$n = 144$
nivel significación $\alpha = 0'05$ corresponde con $z_\alpha = 1.65$.



El extremo de la región de aceptación es $\mu + z_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 29 + 1.65\dfrac{2}{\sqrt{144}} = 29.275$.

Como la media de la muestra es 31 mayor que 29'275, se rechaza al nivel de significación del 5% que la edad media en la que la mujer tiene su primer hijo sigue siendo 29 años.