UNIVERSIDAD DE MURCIA
Región de Murcia
Universidad Politécnica de Cartagena

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA EL ALUMNADO DE BACHILLERATO
159 MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. JUNIO 2014

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá elegir una opción A o B y responder a todas las cuestiones de esa de opción. Nunca podrá mezclar cuestiones de la opción A con cuestiones de la opción B. En cada cuestión se indica su puntuación. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

OPCIÓN A

CUESTIÓN A1. Discutir el siguiente sistema por el método de Gauss, según los valores del parámetro a, siendo a un número real distinto de 0.

$$\left.\begin{array}{l} ax+y-2az=1 \\ ax-y=2 \\ ax+y+(a-1)z=3a-1 \end{array}\right\}, \text{ (2 puntos)}$$

Resolverlo para $a = 1$. (0,5 puntos)

CUESTIÓN A2. El coste de fabricación de un modelo de teléfono móvil viene dado por la función $C(x) = x^2 + 10x + 325$, donde x representa el número de teléfonos móviles fabricados. Supongamos que se venden todos los teléfonos fabricados y que cada teléfono se vende por 80 euros.

a) Determinar la función de beneficio (definido como ingreso menos coste) que expresa el beneficio obtenido en función de x. (0,5 puntos)
b) ¿Cuántos teléfonos deben fabricarse para que el beneficio sea máximo? ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo? (1,5 puntos)
c) ¿Para qué valores de x se tienen pérdidas (beneficios negativos)? (0,5 puntos)

CUESTIÓN A3. Hallar las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int (x^5 - 2x + 3)\,dx$. (0,75 puntos) b) $\int (2e^x + 5)\,dx$. (0,75 puntos)

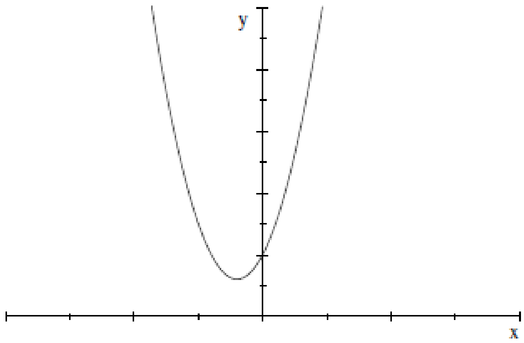
CUESTIÓN A4. Dados dos sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio, calcule $P(A)$ y $P(B)$ sabiendo que son independientes y que $P(A^C) = 0,6$ y $P(A \cup B) = 0,7$. (2 puntos)

CUESTIÓN A5. El peso (en gramos) de los pollos que llegan a un matadero sigue una distribución normal con desviación típica de 315 g. Sabiendo que una muestra de 64 pollos ha dado un peso medio de 2750 g, hallar un intervalo de confianza para el peso medio con un nivel de confianza del 97%. (1,5 puntos)

OPCIÓN B

CUESTIÓN B1. Una fábrica de tintas dispone de 1000 kg del color A, 800 kg del color B y 300 kg del color C, con los que fabrica dos tipos de tinta, una para la etiqueta de un refresco y otra para un cartel. Cada bote de tinta de la etiqueta necesita 10 kg del color A, 5 kg del color B y 5 kg del color C y el de tinta del cartel requiere 5 kg de A y 5 kg de B. Obtiene un beneficio de 30 euros por cada bote de tinta para etiquetas y de 20 euros por cada uno de tinta para carteles. Si vende todos los botes fabricados, ¿cuántos botes de cada tipo de tinta debe fabricar para maximizar su beneficio?, ¿cuál es el beneficio máximo? (3 puntos)

CUESTIÓN B2. La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x) = x^2 + 4x + a$, siendo a un número real. Calcular a para que el área encerrada por la gráfica, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 3$ valga 57.



(1,5 puntos)

CUESTIÓN B3. Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x+2}$ (0,75 puntos) b) $g(x) = \ln\left(x^2 - 5x\right)$ (0,75 puntos)

CUESTIÓN B4. En una población el 60% de los individuos toma diariamente leche y el 40% toma diariamente yogur. Además, el 30% de los individuos toma leche y yogur diariamente.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo tome a diario leche pero no yogur? (0,5 puntos)
b) ¿Cuál es la probabilidad de que tome a diario leche o yogur? (0,75 puntos)
c) Si un individuo toma diariamente leche, ¿qué probabilidad hay de que también tome a diario yogur? (0,75 puntos)

CUESTIÓN B5. El tiempo de espera para recibir un tratamiento médico es, en promedio, de 30 días. Después de tomar medidas para intentar reducirlo, para una muestra de 80 pacientes el tiempo medio de espera es de 27 días. Suponiendo que el tiempo de espera sigue una distribución normal con una desviación típica igual a 8, plantear un test para contrastar que las medidas no han mejorado la situación frente a que sí lo han hecho. ¿Cuál es la conclusión a la que se llega con un nivel de significación del 5%? (2 puntos)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

CUESTIÓN A1. Discutir el siguiente sistema por el método de Gauss, según los valores del parámetro *a*, siendo *a* un número real distinto de 0.

$$\left.\begin{array}{l} ax+y-2az=1 \\ ax-y=2 \\ ax+y+(a-1)z=3a-1 \end{array}\right\}, \text{ (2 puntos)}$$

Resolverlo para $a = 1$. (0,5 puntos)

La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} a & 1 & -2a \\ a & -1 & 0 \\ a & 1 & a-1 \end{pmatrix}$

La matriz ampliada es $A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -2a & 1 \\ a & -1 & 0 & 2 \\ a & 1 & a-1 & 3a-1 \end{array}\right)$

Calculamos el determinante de la matriz A y averiguamos cuando se anula.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & -2a \\ a & -1 & 0 \\ a & 1 & a-1 \end{vmatrix}=-a(a-1)-0-2a^2-\left(2a^2+a(a-1)+0\right)$$

$$|A|=-a^2+a-2a^2-2a^2-a^2+a=-6a^2+2a$$

$$|A|=0 \Rightarrow -6a^2+2a=0 \Rightarrow 2a(-3a+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0, \text{No es posible} \\ -3a+1=0 \Rightarrow 3a=1 \Rightarrow \boxed{a=\frac{1}{3}} \end{cases}$$

Analizamos dos casos por separado.

CASO 1. $a \neq \frac{1}{3}$

En este caso el determinante de la matriz de coeficientes A es no nulo y el rango de A es 3. El rango de la matriz ampliada A/B también es 3, así como el número de incógnitas.
El sistema es **compatible determinado** (una única solución)

CASO 2. $a = \frac{1}{3}$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

El sistema queda: $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{3}x+y-\frac{2}{3}z=1 \\ \frac{1}{3}x-y=2 \\ \frac{1}{3}x+y+\left(\frac{1}{3}-1\right)z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{1}{3}x+y-\frac{2}{3}z=1 \\ \frac{1}{3}x-y=2 \\ \frac{1}{3}x+y-\frac{2}{3}z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+3y-2z=3 \\ x-3y=6 \\ x+3y-2z=0 \end{array}\right\}$

Observando la ecuación 1ª y 3ª vemos que el primer miembro de la igualdad es igual y no puede dar como resultado 3 y 0 al mismo tiempo, por lo que **el sistema es incompatible**.

Resolvemos para *a = 1*, que sabemos que es compatible determinado.

El sistema queda: $\left.\begin{array}{l} x+y-2z=1 \\ x-y=2 \\ x+y=2 \end{array}\right\}$ Lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{l} x+y-2z=1 \\ x-y=2 \\ x+y=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y-2z=1 \\ x=2+y \\ x+y=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2+y+y-2z=1 \\ 2+y+y=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2y-2z=-1 \\ 2y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2y-2z=-1 \\ \boxed{y=0} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 0-2z=-1 \\ \boxed{x=2+0=2} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{z=\frac{1}{2}}$$

La solución del sistema cuando *a = 1* es $x=2;\ y=0;\ z=\frac{1}{2}$

CUESTIÓN A2. El coste de fabricación de un modelo de teléfono móvil viene dado por la función $C(x) = x^2 + 10x + 325$, donde x representa el número de teléfonos móviles fabricados. Supongamos que se venden todos los teléfonos fabricados y que cada teléfono se vende por 80 euros.
a) Determinar la función de beneficio (definido como ingreso menos coste) que expresa el beneficio obtenido en función de x. (0,5 puntos)
b) ¿Cuántos teléfonos deben fabricarse para que el beneficio sea máximo? ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo? (1,5 puntos)
c) ¿Para qué valores de x se tienen pérdidas (beneficios negativos)? (0,5 puntos)

a) La función *B(x)* es la diferencia entre los ingresos y el coste.

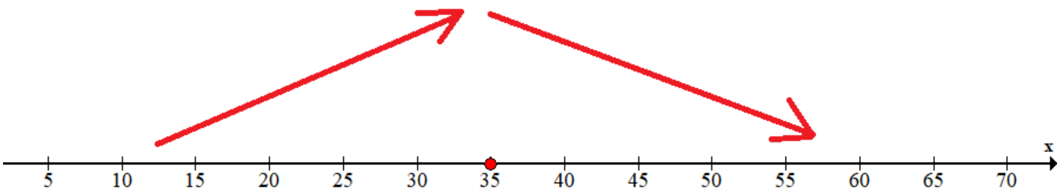
$$B(x) = I(x) - C(x) = 80x - (x^2 + 10x + 325) = 80x - x^2 - 10x - 325 = -x^2 + 70x - 325$$
$$B(x) = -x^2 + 70x - 325$$

b) Hallamos el máximo de la función $B(x) = -x^2 + 70x - 325$.

$$B'(x) = -2x + 70$$
$$B'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 70 = 0 \Rightarrow -2x = -70 \Rightarrow x = \frac{70}{2} = 35$$

Estudiamos el comportamiento de la función antes y después de $x = 35$.

En $(0,35)$ tomamos $x = 20$ y la derivada vale $B'(20) = -40 + 70 = 30 > 0$. La función crece en $(0,35)$.
En $(35,+\infty)$ tomamos $x = 50$ y la derivada vale $B'(50) = -100 + 70 = -30 < 0$. La función decrece en $(35,+\infty)$.
La función *B(x)* sigue el esquema siguiente:



El máximo beneficio se obtiene en $x = 35$, es decir con la fabricación y venta de 35 teléfonos móviles. El beneficio máximo que se obtiene es de $B(35) = -35^2 + 70 \cdot 35 - 325 = 900\,€$.

c) ¿Cuándo es $B(x) < 0$?

Averiguamos primero cuando se anulan los beneficios: $B(x) = 0$

$$B(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 70x - 325 = 0 \Rightarrow x = \frac{-70 \pm \sqrt{70^2 - 4(-1)(-325)}}{2(-1)}$$

$$x = \frac{-70 \pm \sqrt{4900 - 1300}}{-2} = \frac{-70 \pm \sqrt{3600}}{-2} = \frac{-70 \pm 60}{-2} = \begin{cases} = \dfrac{-70+60}{-2} = 5 = x \\ = \dfrac{-70-60}{-2} = 65 = x \end{cases}$$

Los beneficios son negativos con menos de 5 móviles fabricados y vendidos. También a partir de 65 móviles fabricados y vendidos.

CUESTIÓN A3. Hallar las siguientes integrales indefinidas:
a) $\int\left(x^5-2x+3\right)dx$. (0,75 puntos) b) $\int\left(2e^x+5\right)dx$. (0,75 puntos)

a)

$$\int\left(x^5-2x+3\right)dx=\boxed{\frac{x^6}{6}-x^2+3x+K};siendo\,k\in\mathbb{R}$$

b)

$$\int\left(2e^x+5\right)dx=\boxed{2e^x+5x+K};siendo\,k\in\mathbb{R}$$

CUESTIÓN A4. Dados dos sucesos *A* y *B* de un mismo experimento aleatorio, calcule *P*(*A*) y *P*(*B*) sabiendo que son independientes y que $P\left(A^C\right)=0,6$ y $P\left(A\cup B\right)=0,7$. (2 puntos)

Como $P\left(A^C\right)=0,6$, entonces $P\left(A\right)=1-P\left(A^C\right)=1-0,6=0,4$.

Los sucesos *A* y *B* son independientes por lo que $P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)P\left(B\right)$

Además $P\left(A\cup B\right)=0,7$. Lo aplicamos a la fórmula de la probabilidad de la unión.

$$P\left(A\cup B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\right)P\left(B\right)$$

$$0,7=0,4+P\left(B\right)-0,4\cdot P\left(B\right)$$

$$0,7-0,4=P\left(B\right)-0,4\cdot P\left(B\right)$$

$$0,3=\left(1-0,4\right)P\left(B\right)$$

$$0,3=0,6\cdot P\left(B\right)$$

$$P\left(B\right)=\frac{0,3}{0,6}=0,5$$

Tenemos que *P(A) = 0,4* y *P(B) = 0,5*.

CUESTIÓN A5. El peso (en gramos) de los pollos que llegan a un matadero sigue una distribución normal con desviación típica de 315 g. Sabiendo que una muestra de 64 pollos ha dado un peso medio de 2750 g, hallar un intervalo de confianza para el peso medio con un nivel de confianza del 97%. (1,5 puntos)

X = Peso de un pollo que llega a un matadero.
X = N(**μ**, 315)

El tamaño de la muestra es *n = 64*. La media de la muestra es $\overline{x} = 2750$

Buscamos $z_{\alpha/2}$ en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 97% .

$$1 - \propto = 0.97 \rightarrow \propto = 0.03 \rightarrow \propto/2 = 0.015 \rightarrow 1 - \propto/2 = 0.985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.17}$$

El error sigue la fórmula $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{315}{\sqrt{64}} \simeq 85{,}44375$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\overline{x} - Error, \overline{x} + Error\right) = \left(2750 - 85.44375,\ 2750 + 85.44375\right) = \left(2664.55625,\ 2835.44375\right)$$

El intervalo de confianza para el peso medio es $\left(2664.55625,\ 2835.44375\right)$

OPCIÓN B

CUESTIÓN B1. Una fábrica de tintas dispone de 1000 kg del color A, 800 kg del color B y 300 kg del color C, con los que fabrica dos tipos de tinta, una para la etiqueta de un refresco y otra para un cartel. Cada bote de tinta de la etiqueta necesita 10 kg del color A, 5 kg del color B y 5 kg del color C y el de tinta del cartel requiere 5 kg de A y 5 kg de B. Obtiene un beneficio de 30 euros por cada bote de tinta para etiquetas y de 20 euros por cada uno de tinta para carteles. Si vende todos los botes fabricados, ¿cuántos botes de cada tipo de tinta debe fabricar para maximizar su beneficio?, ¿cuál es el beneficio máximo? (3 puntos)

Llamamos "x" al número de botes de tinta para etiquetas e "y" al número de botes de tinta para carteles.
Realizamos una tabla para establecer las condiciones.

	Kg de tinta del color A	Kg de tinta del color B	Kg de tinta del color C	Beneficio
Número de botes de tinta para etiquetas (x)	**10x**	**5x**	**5x**	**30x**
Número de botes de tinta para carteles (y)	**5y**	**5y**		**20y**
TOTALES	$10x+5y$	$5x+5y$	$5x$	$30x+20y$

Se desea maximizar el beneficio que viene dado por la expresión $B(x,y)=30x+20y$

Las restricciones son:

"Las cantidades deben ser positivas" → $x\geq 0;\ y\geq 0$

"Una fábrica de tintas dispone de 1000 kg del color A" → $10x+5y\leq 1000$

"Una fábrica de tintas dispone de 800 kg del color B" → $5x+5y\leq 800$

"Una fábrica de tintas dispone de 300 kg del color C" → $5x\leq 300$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x\geq 0;\ y\geq 0 \\ 10x+5y\leq 1000 \\ 5x+5y\leq 800 \\ 5x\leq 300 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x\geq 0;\ y\geq 0 \\ 2x+y\leq 200 \\ x+y\leq 160 \\ x\leq 60 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x\geq 0;\ y\geq 0 \\ y\leq 200-2x \\ y\leq 160-x \\ x\leq 60 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones.

$x\geq 0;\ y\geq 0$ — *Primer cuadrante*

$y=200-2x$

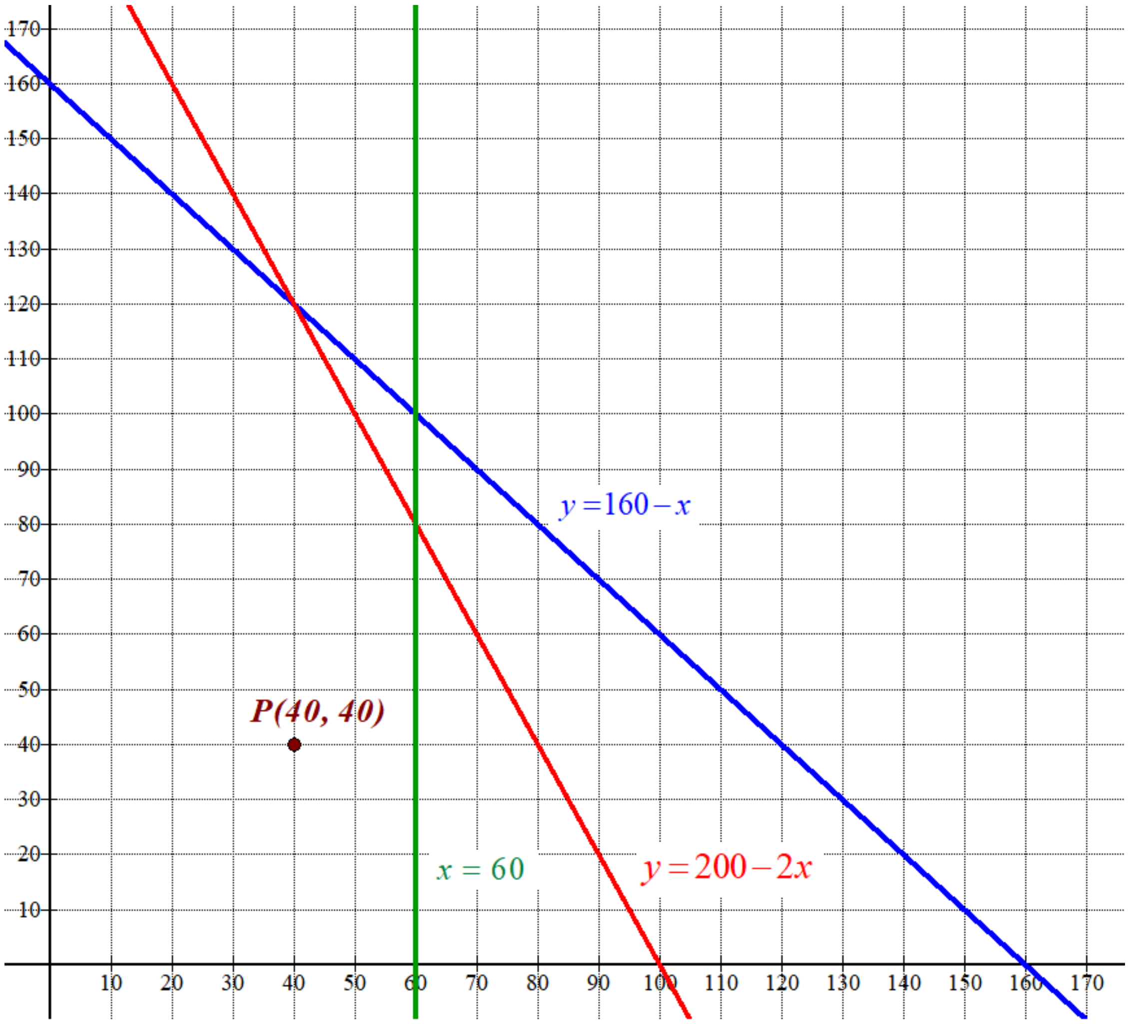
x	$y=200-2x$
40	120
60	80

$y=160-x$

x	$y=160-x$
0	160
40	120

$x=60$

$x=60$	y
60	0
60	80

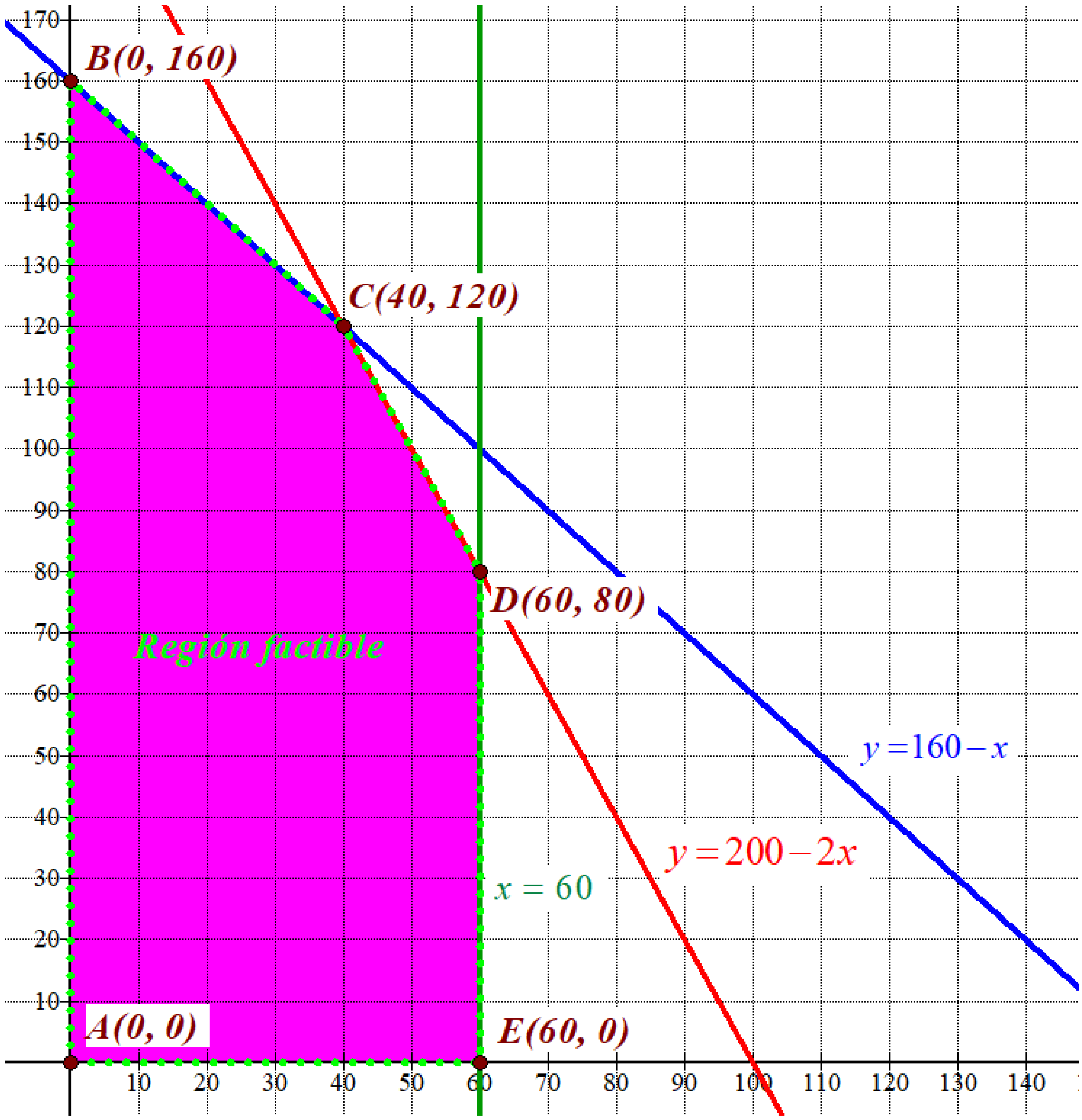


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ y \leq 200-2x \\ y \leq 160-x \\ x \leq 60 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada a la izquierda de la recta vertical verde y por debajo de las rectas azul y roja.

Comprobamos que el punto *P(40, 40)* perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 40 \geq 0;\ 40 \geq 0 \\ 40 \leq 200-2\cdot 40 \\ 40 \leq 160-40 \\ 40 \leq 60 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de los vértices que limitan esta región.



Valoramos la función beneficio $B(x,y)=30x+20y$ en cada uno de los vértices en busca del valor máximo.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$

B(0, 160) → $B(0,160)=0+20\cdot 160=3200$

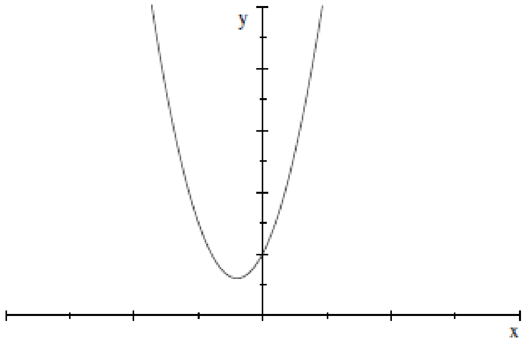
C(40, 120) → $B(40,120)=30\cdot 40+20\cdot 120=1200+2400=3600$ ¡*Máximo*!

D(60, 80) → $B(60,80)=30\cdot 60+20\cdot 80=1800+1600=3400$

E(60, 0) → $B(60,0)=30\cdot 60+0=1800$

El beneficio máximo es de 3600 € y se obtiene en el punto C(40, 120), es decir, con 40 botes de tinta para etiquetas y 120 de tinta para carteles se obtiene un beneficio máximo de 3600 €..

CUESTIÓN B2. La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x)=x^2+4x+a$, siendo a un número real. Calcular a para que el área encerrada por la gráfica, el eje OX y las rectas x = 0 y x = 3 valga 57.



(1,5 puntos)

La función es positiva en el intervalo [0, 3] por lo que el área será el valor de la integral definida entre 0 y 3 de la función $f(x)=x^2+4x+a$.

$$Área=\int_0^3 x^2+4x+a\,dx=\left[\frac{x^3}{3}+4\frac{x^2}{2}+ax\right]_0^3=\left[\frac{x^3}{3}+2x^2+ax\right]_0^3=$$

$$=\left[\frac{3^3}{3}+2\cdot 3^2+a\cdot 3\right]-\left[\frac{0^3}{3}+2\cdot 0^2+a\cdot 0\right]=9+18+3a=27+3a$$

$$Área=57=27+3a\Rightarrow 3a=57-27=30\Rightarrow \boxed{a=10}$$

CUESTIÓN B3. Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{x+2}$ (0,75 puntos) b) $g(x)=\ln\left(x^2-5x\right)$ (0,75 puntos)

a) $$f'(x)=\frac{e^{2x}\cdot 2(x+2)-1\cdot e^{2x}}{(x+2)^2}=\frac{e^{2x}(2x+4)-e^{2x}}{(x+2)^2}=\frac{e^{2x}(2x+4-1)}{(x+2)^2}=\frac{e^{2x}(2x+3)}{(x+2)^2}$$

b) $$g'(x)=\frac{2x-5}{x^2-5x}$$

CUESTIÓN B4. En una población el 60% de los individuos toma diariamente leche y el 40% toma diariamente yogur. Además, el 30% de los individuos toma leche y yogur diariamente.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que un individuo tome a diario leche pero no yogur? (0,5 puntos)
b) ¿Cuál es la probabilidad de que tome a diario leche o yogur? (0,75 puntos)
c) Si un individuo toma diariamente leche, ¿qué probabilidad hay de que también tome a diario yogur? (0,75 puntos)

Realizamos una tabla de contingencia para establecer todos los porcentajes.

	Toman yogur (Y)	No toman yogur	
Toman leche (L)	**30**		**60**
No toman leche			
	40		**100**

Completamos la tabla.

	Toman yogur (Y)	No toman yogur	
Toman leche (L)	**30**	**30**	**60**
No toman leche	**10**	**30**	**40**
	40	**60**	**100**

a) $P\left(L \cap \overline{Y}\right) = \frac{30}{100} = \boxed{0,30}$

b) $P\left(L \cup Y\right) = \frac{100-30}{100} = \boxed{0,70}$

c) $P\left(Y / L\right) = \frac{30}{60} = \boxed{0,50}$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Sabemos que $P(L) = 0,60;\ P(Y) = 0,40;\ P(L \cap Y) = 0,30$

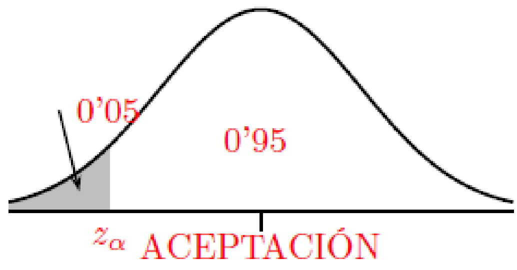
a) $P\left(L \cap \overline{Y}\right) = P(L) - P(L \cap Y) = 0,60 - 0,30 = \boxed{0,30}$

b) $P(L \cup Y) = P(L) + P(Y) - P(L \cap Y) = 0,60 + 0,40 - 0,30 = \boxed{0,70}$

c) $P(Y / L) = \frac{P(Y \cap L)}{P(L)} = \frac{0,30}{0,60} = \boxed{0,50}$

CUESTIÓN B5. El tiempo de espera para recibir un tratamiento médico es, en promedio, de 30 días. Después de tomar medidas para intentar reducirlo, para una muestra de 80 pacientes el tiempo medio de espera es de 27 días. Suponiendo que el tiempo de espera sigue una distribución normal con una desviación típica igual a 8, plantear un test para contrastar que las medidas no han mejorado la situación frente a que sí lo han hecho. ¿Cuál es la conclusión a la que se llega con un nivel de significación del 5%? (2 puntos)

Como debemos suponer que la campaña es para disminuir el tiempo de espera, el test más adecuado sería el unilateral izquierdo; Contrastamos H_0: $\mu = 30$ frente a H_1: $\mu < 30$,



En test unilateral el nivel significación $\alpha = 0'05$ corresponde con $z_\alpha = 1'65$.
El extremo de la región de aceptación es:

$$\mu - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 30 - 1.65\frac{8}{\sqrt{80}} = 28.52 .$$

que da el intervalo $(28.52,\ +\infty)$.

Como $\bar{x} = 27$ queda fuera del intervalo, se rechaza la hipótesis nula de que la media de tiempo de espera siga igual $\mu = 30$, cabe pensar que las medidas han sido efectivas.