6º Modelo de prueba.

Instrucciones:

a) **Duración: 1 hora y 30 minutos.**
b) **Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 2 bloques (A y B) de 4 ejercicios cada uno.**
c) Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2,5 puntos.
d) **Se realizarán únicamente cuatro ejercicios, independientemente del bloque al que pertenezcan.** En caso de responder a más de cuatro ejercicios, se corregirán únicamente los cuatro que aparezcan físicamente en primer lugar.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
f) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A

EJERCICIO 1 (2,5 puntos)

Se sabe que la gráfica de la función f definida por $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + 2}{x-1}$ (para $x \neq 1$) tiene una asíntota oblicua que pasa por el punto $(1, 1)$ y tiene pendiente 2. Calcula a y b.

EJERCICIO 2 (2,5 puntos)

Considera la función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} (3x-6)e^x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{36(\operatorname{sen}(x) - ax)}{x^3} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) Calcula a. **(1,5 puntos)**

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$. **(1 punto)**

EJERCICIO 3 (2,5 puntos)

Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4x^3 - x^4$.

a) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. **(1 punto)**

b) Esboza la gráfica de f y calcula el área del recinto limitado por dicha gráfica y el eje de abscisas. **(1,5 puntos)**

EJERCICIO 4 (2,5 puntos)

Considera la función $F : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_0^x (2t + \sqrt{t})\, dt.$$

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x = 1$.

BLOQUE B

EJERCICIO 5 (2,5 puntos)

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} mx & + & 2y & - & z & = & 1 \\ 5x & - & 4y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & 3my & & & = & m+\frac{2}{5} \end{array}\right.$$

a) Discute el sistema según los valores de m. **(1,5 puntos)**

b) Resuelve el sistema para $m=0$. ¿Hay alguna solución en la que $x=0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta. **(1 punto)**

EJERCICIO 6 (2,5 puntos)

En una empresa se fabrican tres tipos de productos plásticos: botellas, garrafas y bidones. Se utiliza como materia prima 10 kg de polietileno cada hora. Se sabe que para fabricar cada botella se necesitan 50 gramos, para cada garrafa 100 gramos y 1 kg para cada bidón.

El gerente también nos dice que se debe producir el doble de botellas que de garrafas. Por último, se sabe que por motivos de capacidad de trabajo, en las máquinas se producen en total 52 productos cada hora.

¿Cuántas botellas, garrafas y bidones se producen cada hora?

EJERCICIO 7 (2,5 puntos)

Considera las rectas

$$r \equiv \begin{cases} 2x-3y+z-2=0 \\ -3x+2y+2z+1=0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad s \equiv \begin{cases} x=3-2\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=-2+2\lambda \end{cases}$$

a) Calcula el plano perpendicular a la recta s que pasa por el punto $P(1,0,-5)$. **(1,5 puntos)**

b) Calcula el seno del ángulo que forma la recta r con el plano $\pi \equiv -2x+y+2z=0$. **(1 punto)**

EJERCICIO 8 (2,5 puntos)

La recta $r \equiv \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+4}{2} = \dfrac{z-3}{3}$ y la recta s, que pasa por los puntos $P(1,0,2)$ y $Q(a,1,0)$, se cortan en un punto. Calcula el valor de a y el punto de corte.
