	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso **2021-2022** **MATERIA**: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	Modelo orientativo

INSTRUCCIONES Y CRITERIOS GENERALES DE CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las 10 que se proponen.

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se valorará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

A.1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Determine los valores del parámetro real a para los cuales la matriz A es invertible.

b) Calcule, para $a = 0$, la matriz inversa A^{-1}.

A.2. (Calificación máxima: 2 puntos)

Sea S la región del plano definida por:

$$x+y\geq 3, \quad 2x+y\leq 8, \quad x+2y\leq 10, \quad x\geq 0, \quad y\geq 0$$

a) Represente gráficamente la región S y calcule las coordenadas de sus vértices.

b) Obtenga el valor máximo de la función $f(x, y)=2x+3y$ en S, indicando el punto de la región en el cual se alcanza el máximo y el valor máximo alcanzado.

A.3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real $f(x)=\sqrt{1+x^2}$.

a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

b) Calcule

$$\int_0^1 2xf(x)\,dx$$

A.4. (Calificación máxima: 2 puntos)

Una empresa de reparto de comida a domicilio reparte platos de dos restaurantes. El 60% de los platos que reparte proceden del primer restaurante y el 40% restante del segundo. El 50% de los platos que reparte del primer restaurante están cocinados con productos ecológicos, siendo este porcentaje de un 80% para el segundo restaurante. Elegido un plato al azar:

a) Calcule la probabilidad de que esté cocinado con productos ecológicos.

b) Si el plato seleccionado no está cocinado con productos ecológicos, obtenga la probabilidad de que proceda del segundo restaurante.

A.5. (Calificación máxima: 2 puntos)

El tiempo diario de juego con videoconsolas de un estudiante de secundaria sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 0’25 horas.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 25. Calcule la probabilidad de que la media muestral X no supere las 2’9 horas si μ =2’75 horas.

b) Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 64 personas se ha obtenido un intervalo de confianza (2.9388, 3.0613) para μ, determine el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.

B.1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{l} x-y+z=2 \\ x-y+az=-1 \\ 2x+y+z=6 \end{array}\right\}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real *a*.
b) Resuelva el sistema para $a = -2$.

B.2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x)=\frac{10}{x^2+2x-3}$$

a) Determine el dominio de *f(x)* y calcule sus asíntotas.
b) Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f(x)* y determine los extremos relativos indicando si corresponden a máximos o mínimos.

B.3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Considere la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2-2x & si \quad x\le 2 \\ \ln(x-1) & si \quad x>2 \end{cases}$$

a) Determine para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la función *f(x)* es continua en su dominio.
b) Para $a = 1$, halle el área de la región acotada delimitada por la función *f(x)*, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$, $x = 0$.

B.4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Entre los deportistas profesionales, el 50% disfrutan de una beca de alto rendimiento y el 30% está cursando estudios superiores. Se sabe también que el 10% de los deportistas profesionales disfrutan de una beca de alto rendimiento y además están cursando estudios superiores. Seleccionado un deportista profesional al azar, calcule la probabilidad de que:
a) Disfrute de una beca de alto rendimiento o esté cursando estudios superiores.
b) No disfrute de una beca de alto rendimiento, sabiendo que no está cursando estudios superiores.

B.5. (Calificación máxima: 2 puntos)
Una empresa que gestiona una aplicación de movilidad sostenible sabe que el tiempo que tardan en llegar a la universidad en coche los estudiantes se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ minutos y desviación típica $\sigma = 6$ minutos.
a) Una muestra aleatoria simple de 81 universitarios proporciona un tiempo medio de traslado hasta la universidad de 44 minutos. Calcule el intervalo de confianza al 90% para estimar μ.
b) Determine el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para obtener un intervalo de confianza para μ de amplitud a lo sumo de 3 minutos, con un nivel de confianza del 95 %.

SOLUCIONES

A.1. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & a & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

a) Determine los valores del parámetro real *a* para los cuales la matriz *A* es invertible.
b) Calcule, para *a = 0*, la matriz inversa A^{-1}.

a) La matriz A es invertible si su determinante es no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & a & 2\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=2a+0+1-(0+1+4)=2a+1-5=2a-4$$

$$|A|=0\Rightarrow 2a-4=0\Rightarrow 2a=4\Rightarrow \boxed{a=2}$$

La matriz A es invertible cuando $a\neq 2$

b) Para *a = 0* la matriz A tiene inversa. Esta matriz queda $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

Calculamos su traspuesta, el valor de su determinante y hallamos su matriz inversa.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=0+0+1-0-1-4=-4\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}}{-4}=\frac{-1}{4}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=\frac{-1}{4}\begin{pmatrix}-2 & 0 & 2\\ -1 & 2 & -3\\ 1 & -2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & 0 & -1/2\\ 1/4 & -1/2 & 3/4\\ -1/4 & 1/2 & 1/4\end{pmatrix}}$$

A.2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Sea S la región del plano definida por:

$$x+y\geq 3, \quad 2x+y\leq 8, \quad x+2y\leq 10, \quad x\geq 0, \quad y\geq 0$$

a) Represente gráficamente la región S y calcule las coordenadas de sus vértices.
b) Obtenga el valor máximo de la función $f(x, y)=2x+3y$ en S, indicando el punto de la región en el cual se alcanza el máximo y el valor máximo alcanzado.

a) Representamos las rectas asociadas a cada inecuación:

$x\geq 0, \quad y\geq 0$

Primer cuadrante

$x+y=3$

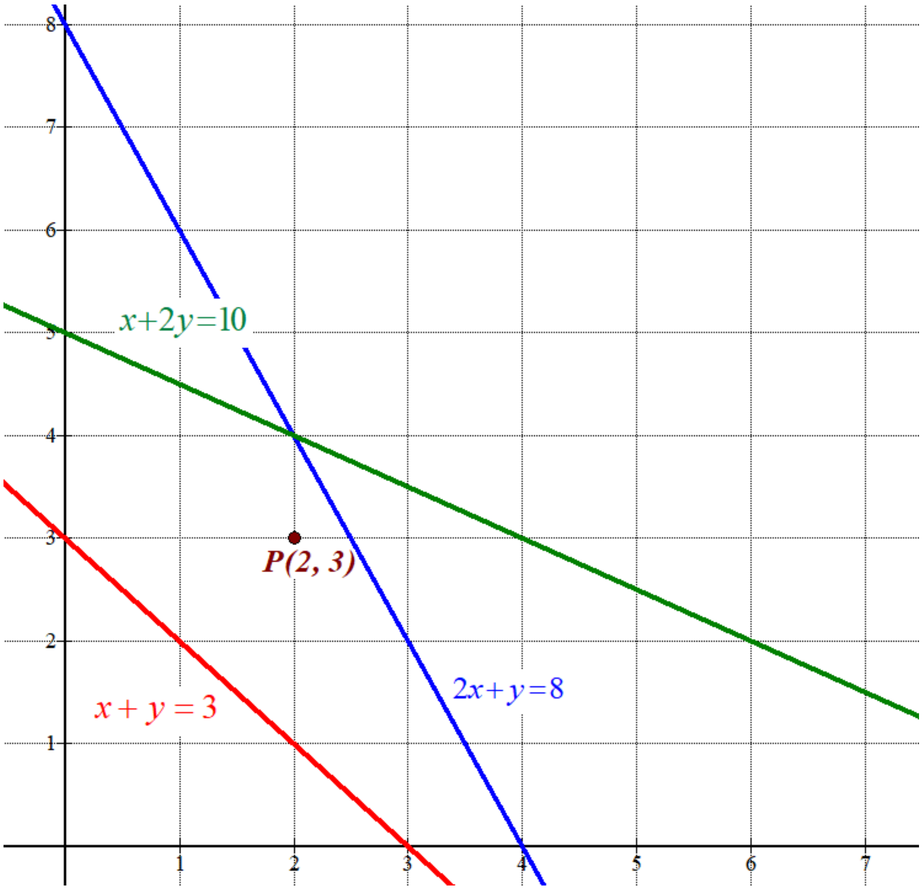
x	$y=3-x$
0	3
3	0

$2x+y=8$

x	$y=8-2x$
0	8
4	0

$x+2y=10$

x	$y=\frac{10-x}{2}$
0	5
10	0



Por las condiciones se cumple que la región factible es la región del primer cuadrante situada por encima de la recta roja y por debajo de la azul y la verde.

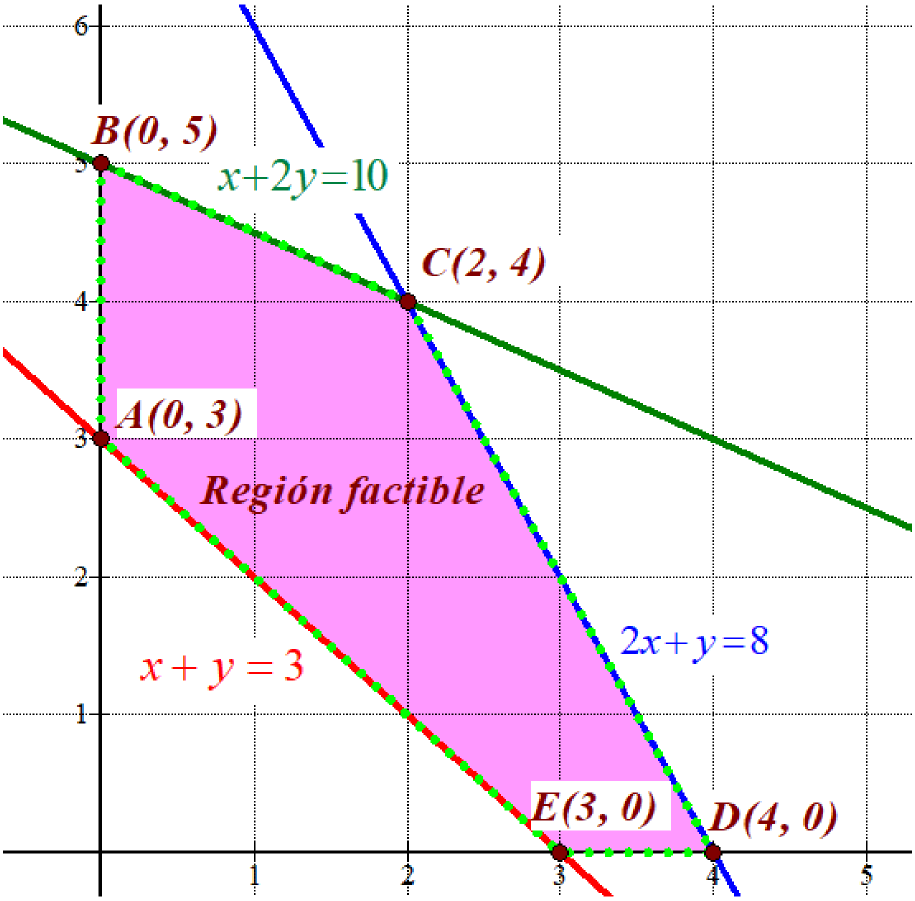
$$x+y\geq 3, \quad 2x+y\leq 8, \quad x+2y\leq 10, \quad x\geq 0, \quad y\geq 0$$

Comprobamos que el punto P(2, 3) de dicha región cumple todas las condiciones.

$$2+3\geq 3, \quad 2\cdot 2+3\leq 8, \quad 2+2\cdot 3\leq 10, \quad 2\geq 0, \quad 3\geq 0$$

Se cumplen todas las inecuaciones.

Dibujamos la región S y la coloreamos de rosa.



Las coordenadas de los vértices son: A(0, 3), B(0, 5), C(2, 4), D(4, 0) y E(3, 0).

b) Valoramos la función $f(x, y) = 2x + 3y$ en cada uno de los vértices.

A(0,3) → $f(0,3) = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 9$

B(0,5) → $f(0,5) = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 5 = 15$

C(2,4) → $f(2,4) = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 =$ 16 Máximo

D(4,0) → $f(4,0) = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 0 = 8$

E(3, 0) → $f(3,0) = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 0 = 6$

El valor máximo es 16 y se consigue en el punto C(2, 4).

A.3. (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real $f(x)=\sqrt{1+x^2}$.

a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f(x)* en el punto de abscisa *x = 0*.

b) Calcule

$$\int_0^1 2xf\left(x\right)dx$$

a) La ecuación de la recta tangente a *f(x)* en *x* = *a* tiene la expresión $y-f\left(a\right)=f\,'\left(a\right)\left(x-a\right)$.

$$f(0)=\sqrt{1+0^2}=1$$

$$f(x)=\sqrt{1+x^2} \Rightarrow f\,'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow f\,'(0)=\frac{2\cdot 0}{2\sqrt{1+0^2}}=\frac{0}{2}=0$$

$$\text{Recta tangente } \rightarrow y-1=0\left(x-0\right) \Rightarrow \boxed{y=1}$$

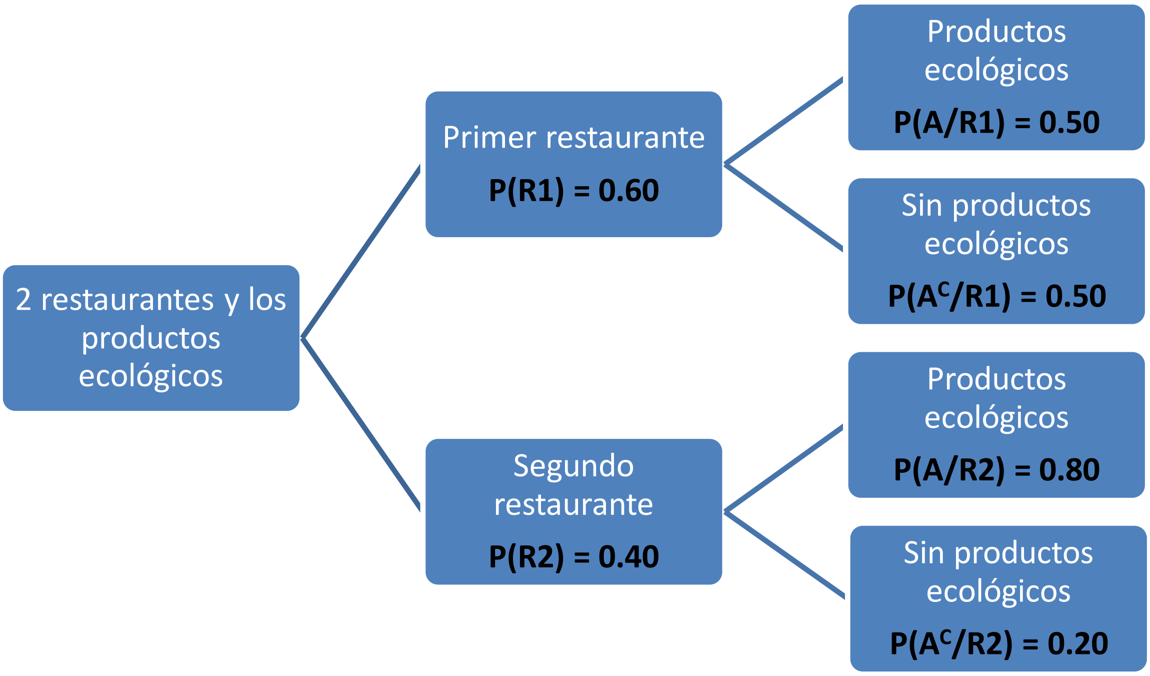
b)

$$\int_0^1 2xf\left(x\right)dx=\int_0^1 2x\sqrt{1+x^2}\,dx=\int_0^1 2x\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}dx=\left[\frac{\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1=\left[\frac{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1=$$

$$=\left[\frac{2\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}{3}\right]_0^1=\left[\frac{2\sqrt{\left(1+1^2\right)^3}}{3}\right]-\left[\frac{2\sqrt{\left(1+0^2\right)^3}}{3}\right]=\frac{2\sqrt{8}}{3}-\frac{2}{3}=\boxed{\frac{4\sqrt{2}-2}{3}\simeq 1.2189}$$

A.4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Una empresa de reparto de comida a domicilio reparte platos de dos restaurantes. El 60% de los platos que reparte proceden del primer restaurante y el 40% restante del segundo. El 50% de los platos que reparte del primer restaurante están cocinados con productos ecológicos, siendo este porcentaje de un 80% para el segundo restaurante. Elegido un plato al azar:
a) Calcule la probabilidad de que esté cocinado con productos ecológicos.
b) Si el plato seleccionado no está cocinado con productos ecológicos, obtenga la probabilidad de que proceda del segundo restaurante.

Llamamos *R1* al suceso "El plato es del primer restaurante". *R2* a "El plato es del segundo restaurante". *A* al suceso "plato cocinado con productos ecológicos".
Realizamos un diagrama de árbol.



a)
$$P(A) = P(R1 \cap A) + P(R2 \cap A) = P(R1)P(A/R1) + P(R2)P(A/R2) =$$

$$= 0.6 \cdot 0.5 + 0.4 \cdot 0.8 = \boxed{0.62}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(R2/\overline{A}\right) = \frac{P\left(R2 \cap \overline{A}\right)}{P\left(\overline{A}\right)} = \frac{P(R2)P\left(\overline{A}/R2\right)}{1-P(A)} = \frac{0.4 \cdot 0.2}{1-0.62} = \boxed{\frac{4}{19} \simeq 0.21}$$

A.5. (Calificación máxima: 2 puntos)
El tiempo diario de juego con videoconsolas de un estudiante de secundaria sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 0’25 horas.
a) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 25. Calcule la probabilidad de que la media muestral X no supere las 2’9 horas si μ =2’75 horas.
b) Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 64 personas se ha obtenido un intervalo de confianza (2.9388, 3.0613) para μ, determine el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.

X = El tiempo diario de juego con videoconsolas de un estudiante de secundaria.
X = N(μ, 0.25)

a) X = N(2.75, 0.25) → $\overline{X_{25}} = N\left(2.75, \frac{0.25}{\sqrt{25}}\right) \Rightarrow \overline{X_{25}} = N(2.75, 0.05)$

$$P\left(\overline{X_{25}} \le 2.9\right) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \le \frac{2.9-2.75}{0.05}\right) = P(Z \le 3) = \boxed{0.9987}$$

b) Si el intervalo de confianza es (2.9388, 3.0613) el error es la mitad de la amplitud del intervalo.

$$Error = \frac{2.9388-3.0613}{2} = 0.06125$$

Aplicamos la fórmula del error.

$$Error = 0.06125 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = z_{\alpha/2} \cdot \frac{0.25}{\sqrt{64}} \Rightarrow 0.06125 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{1}{32} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_{\alpha/2} = 32 \cdot 0.06125 = 1.96$$

Buscamos en la tabla de la normal y tenemos que:

$$1-\frac{\alpha}{2} = 0.975 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow 1-\alpha = 0.95$$

El nivel de confianza del intervalo de confianza es del 95 %

B.1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{l} x-y+z=2 \\ x-y+az=-1 \\ 2x+y+z=6 \end{array}\right\}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real *a*.
b) Resuelva el sistema para *a* = −*2*.

a) La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la ampliada $A/B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

Calculamos su determinante y averiguamos cuando se anula.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-1-2a+1+2+1-a=-3a+3$$

$$|A|=0 \Rightarrow -3a+3=0 \Rightarrow 3a=3 \Rightarrow a=1$$

Distinguimos dos casos diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 1$.
En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B e igual que el número de incógnitas.
El sistema es **compatible determinado**.

CASO 2. $a=1$
En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.
Veamos como queda el sistema y lo triangulamos para estudiar su compatibilidad.

$$\left.\begin{array}{l} x-y+z=2 \\ x-y+z=-1 \\ 2x+y+z=6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^{\text{a}} - \text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{cccc} x & -y & +z & =-1 \\ -x & +y & -z & =-2 \\ \hline & & 0 & =-3 \end{array} \to \text{Nueva ecuación } 2^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y+z=2 \\ 0=-3 \\ 2x+y+z=6 \end{array}\right\} ¡¡\text{Im}\,posible!!$$

Nos queda una ecuación imposible y el sistema es **incompatible**.

b) Para *a* = −*2* el sistema es compatible determinado. Hallamos su solución aplicando el método de Gauss.

$$\left.\begin{array}{l} x-y+z=2 \\ x-y-2z=-1 \\ 2x+y+z=6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^{\text{a}} - \text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrrr} x & -y & -2z & =-1 \\ -x & +y & -z & =-2 \\ \hline & & -3z & =-3 \end{array} \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y+z=2 \\ -3z=-3 \\ 2x+y+z=6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^{\text{a}} - 2 \cdot \text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrrr} 2x & +y & +z & =6 \\ -2x & +2y & -2z & =-4 \\ \hline & 3y & -z & =2 \end{array} \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y+z=2 \\ -3z=-3 \\ 3y-z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y+z=2 \\ \boxed{z=1} \\ 3y-z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y+1=2 \\ 3y-1=2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=1 \\ 3y=3 \rightarrow \boxed{y=1} \end{array}\right\} \Rightarrow x-1=1 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

La solución es $x=2, y=1, z=1$

B.2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x)=\frac{10}{x^2+2x-3}$$

a) Determine el dominio de *f(x)* y calcule sus asíntotas.
b) Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f(x)* y determine los extremos relativos indicando si corresponden a máximos o mínimos.

a) Determinamos donde se anula el denominador de la función.

$$x^2+2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(-3)}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2}=\begin{cases}\frac{-2+4}{2}=1=x\\ \frac{-2-4}{2}=-3=x\end{cases}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-3,1\}$

Asíntota vertical. $x=a$

¿ $x=-3$ es asíntota?

$$\lim_{x\to -3} f(x)=\lim_{x\to -3}\frac{10}{x^2+2x-3}=\frac{10}{0}=\infty$$

$x=-3$ es asíntota vertical.

¿ $x=1$ es asíntota?

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{10}{x^2+2x-3}=\frac{10}{0}=\infty$$

$x=1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{10}{x^2+2x-3}=\frac{10}{\infty}=0$$

$y=0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

No tiene pues existe una asíntota horizontal.

b) Utilizamos la derivada para encontrar los puntos críticos de la función.

$$f'(x)=\frac{0\left(x^2+2x-3\right)-(2x+2)\cdot 10}{\left(x^2+2x-3\right)^2}=\frac{-20x-20}{\left(x^2+2x-3\right)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-20x-20}{\left(x^2+2x-3\right)^2}=0 \Rightarrow -20x-20=0 \Rightarrow 20x=-20 \Rightarrow \boxed{x=-1}$$

Estudiamos el comportamiento de la función antes, entre y después de *x = –1* y de los valores excluidos del dominio.

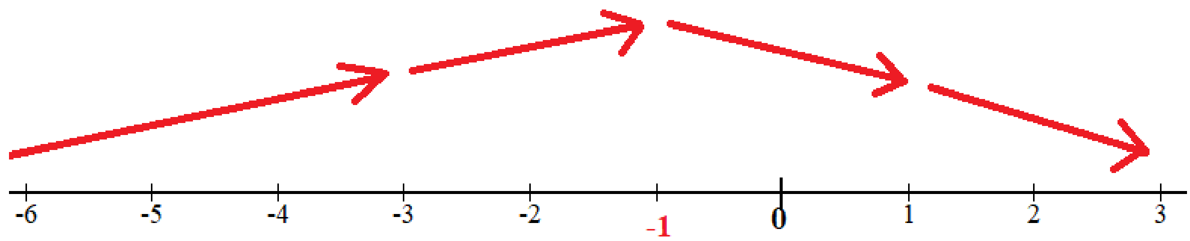
En $(-\infty,-3)$ tomamos $x = -4$ y la derivada vale $f\,'(-4)=\dfrac{-20(-4)-20}{\left((-4)^2+2(-4)-3\right)^2}=\dfrac{60}{25}>0$. La función crece en $(-\infty,-3)$

En $(-3,-1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f\,'(-2)=\dfrac{-20(-2)-20}{\left((-2)^2+2(-2)-3\right)^2}=\dfrac{20}{9}>0$. La función crece en $(-3,-1)$

En $(-1,1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f\,'(0)=\dfrac{-20}{(-3)^2}=-\dfrac{20}{9}<0$. La función decrece en $(-1,1)$

En $(1,+\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f\,'(2)=\dfrac{-40-20}{\left(2^2+4-3\right)^2}=\dfrac{-60}{25}<0$. La función decrece en $(1,+\infty)$

La función sigue el esquema siguiente:



La función crece en $(-\infty,-3)\cup(-3,-1)$ y decrece en $(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

La función presenta un máximo relativo en $x = -1$.

$f(-1)=\dfrac{10}{(-1)^2+2(-1)-3}=\dfrac{10}{-4}=-2.5$. Las coordenadas del máximo relativo son $(-1,-2.5)$

B.3. (Calificación máxima: 2 puntos)
Considere la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2-2x & si \quad x\le 2 \\ \ln(x-1) & si \quad x>2 \end{cases}$$

a) Determine para qué valores de $a\in\mathbb{R}$ la función *f(x)* es continua en su dominio.
b) Para *a* = *1*, halle el área de la región acotada delimitada por la función *f(x)*, el eje de abscisas y las rectas *x* = *−1*, *x* = *0.*

a) Si $x<2$, $f(x)=ax^2-2x$, que es continua en R, porque es un polinomio
Si $x>2$, $f(x)=\ln(x-1)$, que es continua en $x-1>0 \rightarrow x>1$, luego continua en $x>2$.

Si $x=2$

- $f(2)=a(2)^2-2(2)=4a-4$
- $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} ax^2-2x=4a-4$
- $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} \ln(x-1)=\ln 1=0$

Para ser continua estos valores deben ser iguales: $f(2)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)$.

Debe cumplirse $4a-4=0 \Rightarrow \boxed{a=1}$
La función es continua en su dominio para *a* = *1*.

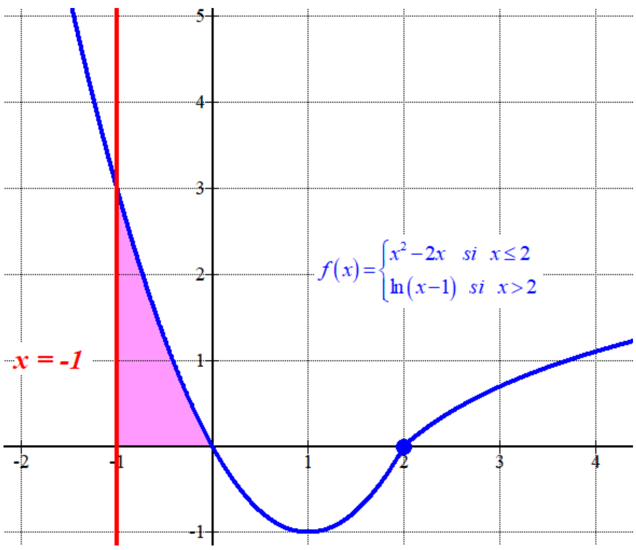
b) Para *a* = *1* la función es continua y tiene la expresión $f(x)=\begin{cases} x^2-2x & si \quad x\le 2 \\ \ln(x-1) & si \quad x>2 \end{cases}$.

Como la región está entre las rectas *x* = *−1*, *x* = *0* entonces la función es $f(x)=x^2-2x$

$$Área=\int_{-1}^{0} f(x)dx=\int_{-1}^{0} x^2-2xdx=\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-1}^{0}=$$

$$=\left[\frac{0^3}{3}-0^2\right]-\left[\frac{(-1)^3}{3}-(-1)^2\right]=\frac{1}{3}+1=\boxed{\frac{4}{3}=1.33\ u^2}$$

Dibujamos la región y comprobamos el resultado.



B.4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Entre los deportistas profesionales, el 50% disfrutan de una beca de alto rendimiento y el 30% está cursando estudios superiores. Se sabe también que el 10% de los deportistas profesionales disfrutan de una beca de alto rendimiento y además están cursando estudios superiores. Seleccionado un deportista profesional al azar, calcule la probabilidad de que:
a) Disfrute de una beca de alto rendimiento o esté cursando estudios superiores.
b) No disfrute de una beca de alto rendimiento, sabiendo que no está cursando estudios superiores.

Sean los sucesos:

B = ”Los deportistas tienen beca de alto rendimiento”

S = ”Los deportistas cursan estudios superiores”

P(B) = 0.5; P(S) = 0.3; P(B∩S) = 0.1

a) $P(B\cup S)=P(B)+P(S)-P(B\cap S)=0.5+0.3-0.1=\boxed{0.7}$

b) $P(\overline{B}/\overline{S})=\dfrac{P(\overline{B}\cap\overline{S})}{P(\overline{S})}=\dfrac{P(\overline{B\cup S})}{1-P(S)}=\dfrac{1-P(B\cup S)}{1-P(S)}=\dfrac{1-0.7}{1-0.3}=\boxed{\dfrac{3}{7}\simeq 0.4286}$

B.5. (Calificación máxima: 2 puntos)
Una empresa que gestiona una aplicación de movilidad sostenible sabe que el tiempo que tardan en llegar a la universidad en coche los estudiantes se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ minutos y desviación típica $\sigma = 6$ minutos.
a) Una muestra aleatoria simple de 81 universitarios proporciona un tiempo medio de traslado hasta la universidad de 44 minutos. Calcule el intervalo de confianza al 90% para estimar μ.
b) Determine el tamaño mínimo de una muestra aleatoria simple para obtener un intervalo de confianza para μ de amplitud a lo sumo de 3 minutos, con un nivel de confianza del 95 %.

X = tiempo que tardan en llegar a la universidad en coche los estudiantes. X = N(μ, 6)

a) Con un nivel de confianza del 90 %.

$$1 - \alpha = 0{,}90 \rightarrow \alpha = 0{,}10 \rightarrow \alpha/2 = 0'05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.645}$$

Utilizamos la fórmula del error

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{6}{\sqrt{81}} = 1.0967$$

El intervalo de confianza es $\left(44 - 1.0967,\ 44 + 1.0967\right) = \left(42.9033,\ 45.0967\right)$.

b) Con un nivel de confianza del 95 %.

$$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$$

Si la amplitud del intervalo de confianza debe ser 3 minutos el error máximo debe ser de 1.5 minutos (la mitad de la amplitud del intervalo).

Planteamos la igualdad

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{6}{\sqrt{n}} = 1.5 \Rightarrow 1.96 \cdot 6 = 1.5\sqrt{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.96 \cdot 6}{1.5} \Rightarrow \boxed{n = \left(\frac{1.96 \cdot 6}{1.5}\right)^2 = 61.47}$$

La muestra debe ser de más de 62 estudiantes.