UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA ALUMNOS DE BACHILLERATO LOE

Septiembre 2010

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II. CÓDIGO 159

OBSERVACIONES IMPORTANTES: *El alumno deberá elegir una opción A o B y responder a todas las cuestiones de esa opción. Nunca podrá mezclar cuestiones de la opción A con cuestiones de la opción B. Al principio de cada cuestión se indica su puntuación. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.*

OPCIÓN A

CUESTIÓN A1. (3 puntos) En una empresa se producen dos tipos de artículos A y B, en cuya elaboración intervienen tres departamentos: cortado, montaje y embalado. Cada departamento trabaja 8 horas al día y mientras el producto A requiere sólo una hora de montaje y media de embalado, el producto B requiere dos horas de cortado y una de embalado. El beneficio que se obtiene por cada unidad de A es de 40 euros y por cada unidad de B de 35 euros. ¿Cómo debe distribuirse la producción diaria para maximizar el beneficio?

CUESTIÓN A2. (2 puntos) Dada la curva de ecuación $y=\dfrac{3x^2-5x-6}{x^2-x-2}$ calcular:

a) Dominio.
b) Asíntotas

CUESTIÓN A3. (1,5 puntos) Calcular el área comprendida entre la curva $y=x^2-6x+10$, el eje OX y las rectas $x=3$ y $y=-2x+10$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

CUESTIÓN A4. (2 puntos) Una fábrica de jabón recibe de tres proveedores A, B y C agua destilada en botellas en la proporción 80%, 15% y 5% respectivamente. El control de calidad de la fábrica estima que debido a la mayor o menor impureza del agua deja pasar los tipos A, B y C con una probabilidad de 1, 0.4 y 0.03 respectivamente. ¿Qué probabilidad hay de que el control de calidad deje pasar una botella cualquiera?

CUESTIÓN A5. (1,5 puntos) Se sabe que el precio de los libros de bachiller es una variable aleatoria normal con media 38.2 euros y desviación típica de 5.25 euros. Una muestra aleatoria simple de 16 libros de Química de distintas editoriales tiene un precio medio de 42.3 euros. Se quiere decidir si existe diferencia significativa entre la media del precio de los libros de Química y la media del precio de los libros de bachiller en general con un nivel de significación α = 0.05.

OPCIÓN B

CUESTIÓN B1. (3 puntos) Calcular la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

CUESTIÓN B2. (2 puntos) ¿Cuál es el número que al sumarlo con 25 veces su inverso se obtiene un valor mínimo?

CUESTIÓN B3. (1,5 puntos) Calcular el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y = 4x - x^2$ e $y = x$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

CUESTIÓN B4. (2 puntos) Una comisión delegada de cierto ayuntamiento está formado por 10 concejales de los cuáles 5 pertenecen al partido A, 4 al B y 1 al C. Se eligen 3 personas al azar y sucesivamente de dicha comisión.

a) Calcular la probabilidad de que las tres pertenezcan al partido A.
b) Calcular la probabilidad de que las tres pertenezcan al partido C.

CUESTIÓN B5. (1,5 puntos) Se está observando la asistencia anual a congresos de los profesionales de la medicina. Se sabe que la variable aleatoria es normal con desviación típica igual a 4 veces por año. Se toma una muestra de 70 profesionales de la medicina cuya asistencia media es de 3 veces por año. Dar un intervalo de confianza al 98% para la media de la asistencia anual a congresos de todos los profesionales de medicina.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

CUESTIÓN A1. (3 puntos) En una empresa se producen dos tipos de artículos A y B, en cuya elaboración intervienen tres departamentos: cortado, montaje y embalado. Cada departamento trabaja 8 horas al día y mientras el producto A requiere sólo una hora de montaje y media de embalado, el producto B requiere dos horas de cortado y una de embalado. El beneficio que se obtiene por cada unidad de A es de 40 euros y por cada unidad de B de 35 euros. ¿Cómo debe distribuirse la producción diaria para maximizar el beneficio?

Sean x = número de artículos A; y = número de artículos B.

	Horas de cortado	Horas de montaje	Horas de embalado	Beneficio
Nº de artículos A (x)		x	0.5x	40x
Nº de artículos B (y)	2y		y	35y
TOTALES	$2y$	x	$0.5x+y$	$40x+35y$

a) Deseamos maximizar el beneficio que viene dado por la función: $B(x,y)=40x+35y$

Las restricciones son:

"Las cantidades deben ser positivas" → $x\geq 0;\ y\geq 0$

"Cada departamento trabaja 8 horas al día" → $\left.\begin{array}{l}2y\leq 8\\ x\leq 8\\ 0.5x+y\leq 8\end{array}\right\}$

Reunimos todas las restricciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l}x\geq 0;\ y\geq 0\\ 2y\leq 8\\ x\leq 8\\ 0.5x+y\leq 8\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x\geq 0;\ y\geq 0\\ y\leq 4\\ x\leq 8\\ x+2y\leq 16\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x\geq 0;\ y\geq 0\\ y\leq 4\\ x\leq 8\\ 2y\leq 16-x\end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a cada inecuación.

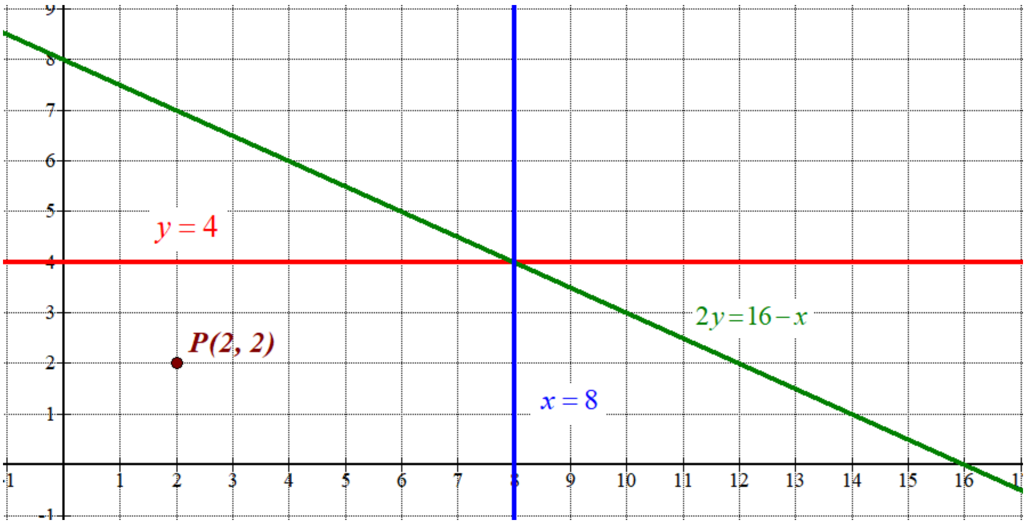
$x\geq 0;\ y\geq 0$ $\quad$ $y=4$ $\quad$ $x=8$ $\quad$ $2y=16-x$

Primer cuadrante

x	$y=4$
0	4
8	4

$x=8$	y
8	0
8	4

x	$y=\frac{16-x}{2}$
0	8
8	4

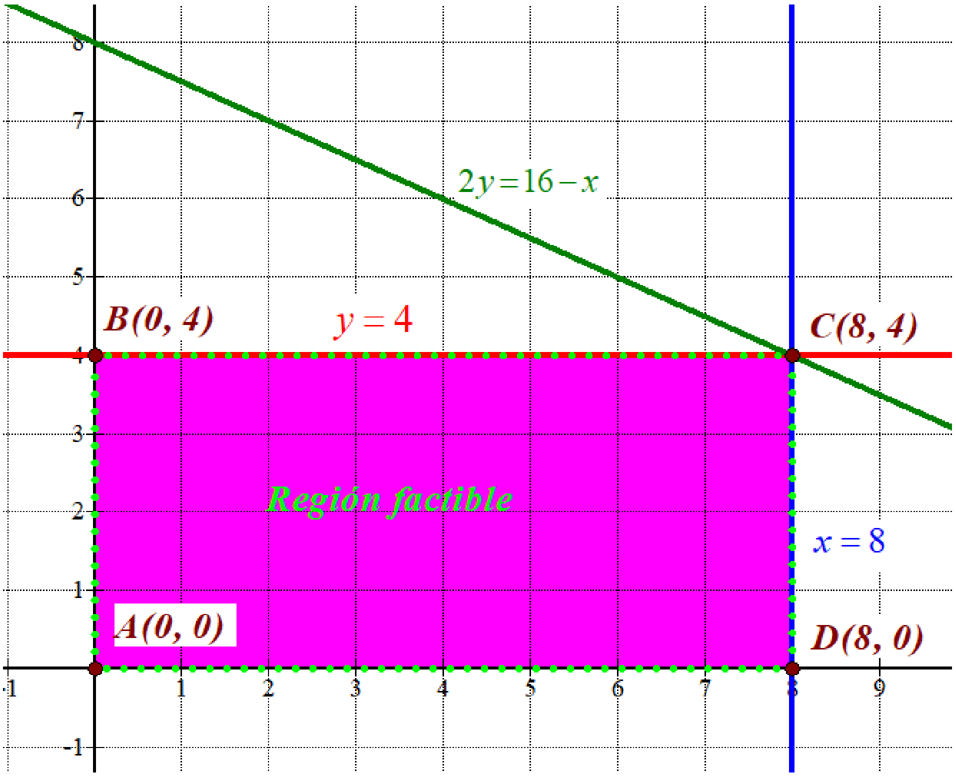


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ y \leq 4 \\ x \leq 8 \\ 2y \leq 16 - x \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja y verde, y a la izquierda de la recta vertical azul.

Comprobamos que el punto *P(2, 2)* perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 2 \geq 0;\ 2 \geq 0 \\ 2 \leq 4 \\ 2 \leq 8 \\ 2 \cdot 2 \leq 16 - 2 \end{array}\right\} \text{¡¡Se cumplen todas!!}$$

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Las coordenadas de los vértices A, B, C y D están claras.

Valoramos la función objetivo $B(x,y)=40x+35y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$

B(0, 4) → $B(0,4)=0+35\cdot 4=140$

C(8, 4) → $B(8,4)=40\cdot 8+35\cdot 4=$ 460 Máximo

D(8, 0) → $B(8,0)=40\cdot 8+0=320$

El beneficio mínimo es de 460 euros. Se consigue con 8 artículos A y 4 artículos B.

CUESTIÓN A2. (2 puntos) Dada la curva de ecuación $y=\frac{3x^2-5x-6}{x^2-x-2}$ calcular:

a) Dominio.
b) Asíntotas

a) Averiguamos cuando se anula el denominador de la función.

$$x^2-x-2=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\begin{cases}\frac{1+3}{2}=2=x\\ \frac{1-3}{2}=-1=x\end{cases}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-1,2\}$

b) **Asíntota vertical.** $x=a$

¿ $x=-1$ es asíntota?

$$\lim_{x\to -1}\frac{3x^2-5x-6}{x^2-x-2}=\frac{3(-1)^2-5(-1)-6}{(-1)^2-(-1)-2}=\frac{2}{0}=\infty$$

$x=-1$ es asíntota vertical

¿ $x=2$ es asíntota?

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-5x-6}{x^2-x-2}=\frac{3\cdot 2^2-5\cdot 2-6}{2^2-2-2}=\frac{-4}{0}=\infty$$

$x=2$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x-6}{x^2-x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{5x}{x^2}-\frac{6}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{5}{x}-\frac{6}{x^2}}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{3-0-0}{1-0-0}=3$$

$y=3$ es asíntota horizontal

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

No tiene asíntota oblicua pues tiene asíntota horizontal.

CUESTIÓN A3. (1,5 puntos) Calcular el área comprendida entre la curva $y = x^2 - 6x + 10$, el eje OX y las rectas $x = 3$ y $y = -2x + 10$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

Hallamos el vértice de la parábola $y = x^2 - 6x + 10$.

$$y' = 2x - 6$$

$$y' = 0 \Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

Averiguamos los puntos de corte de parábola y recta.

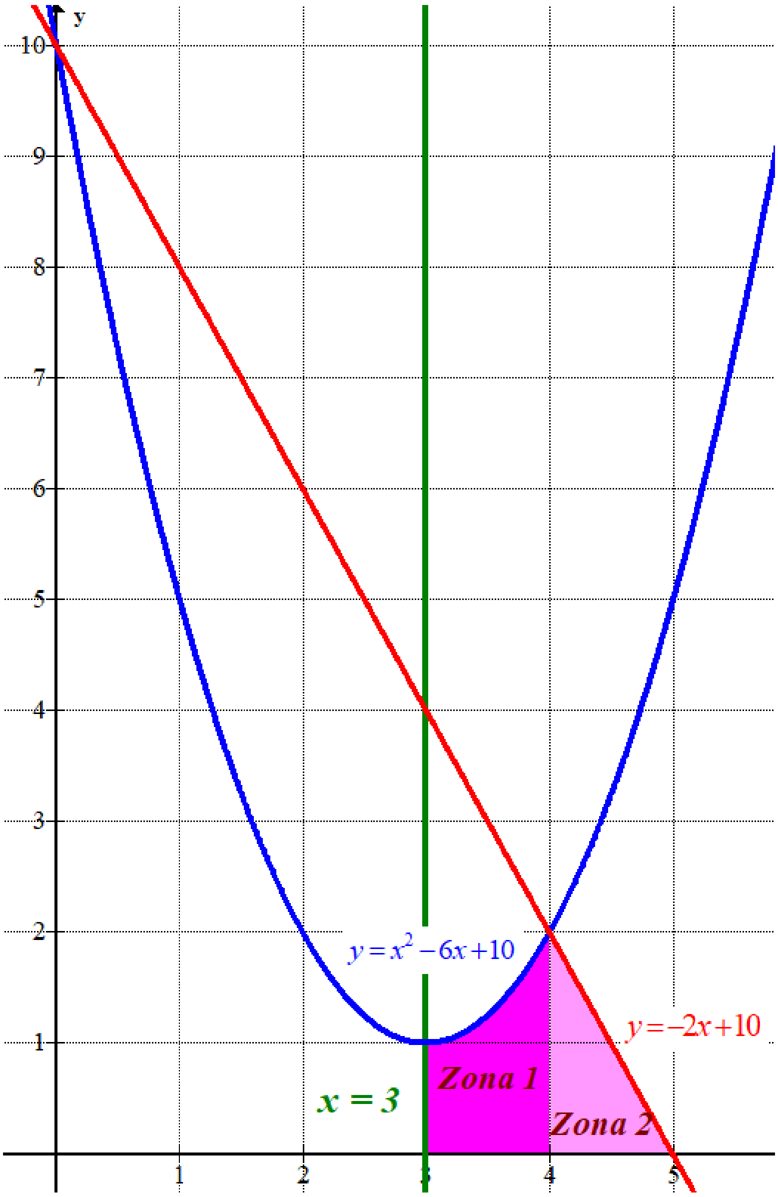
$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 6x + 10 \\ y = -2x + 10 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - 6x + 10 = -2x + 10 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores para dibujar parábola y recta.

x	$y = x^2 - 6x + 10$
1	$1 - 6 + 10 = 5$
2	2
Vértice 3	1
4	2
5	5

x	$y = -2x + 10$
0	10
5	0



Para calcular el área del recinto lo dividimos en dos partes que llamamos Zona 1 y Zona 2.
El área total será la suma de ambas.
El área del recinto es pequeñita, valdrá poco más de dos unidades cuadradas.
Hallamos su valor exacto con el uso del cálculo integral.

$$Área\ Zona\,1 = \int_3^4 x^2 - 6x + 10dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 10x\right]_3^4 =$$

$$= \left[\frac{4^3}{3} - 3\cdot 4^2 + 10\cdot 4\right] - \left[\frac{3^3}{3} - 3\cdot 3^2 + 10\cdot 3\right] = \frac{64}{3} - 48 + 40 - 9 + 27 - 30 = \frac{64}{3} - 20 = \frac{4}{3}$$

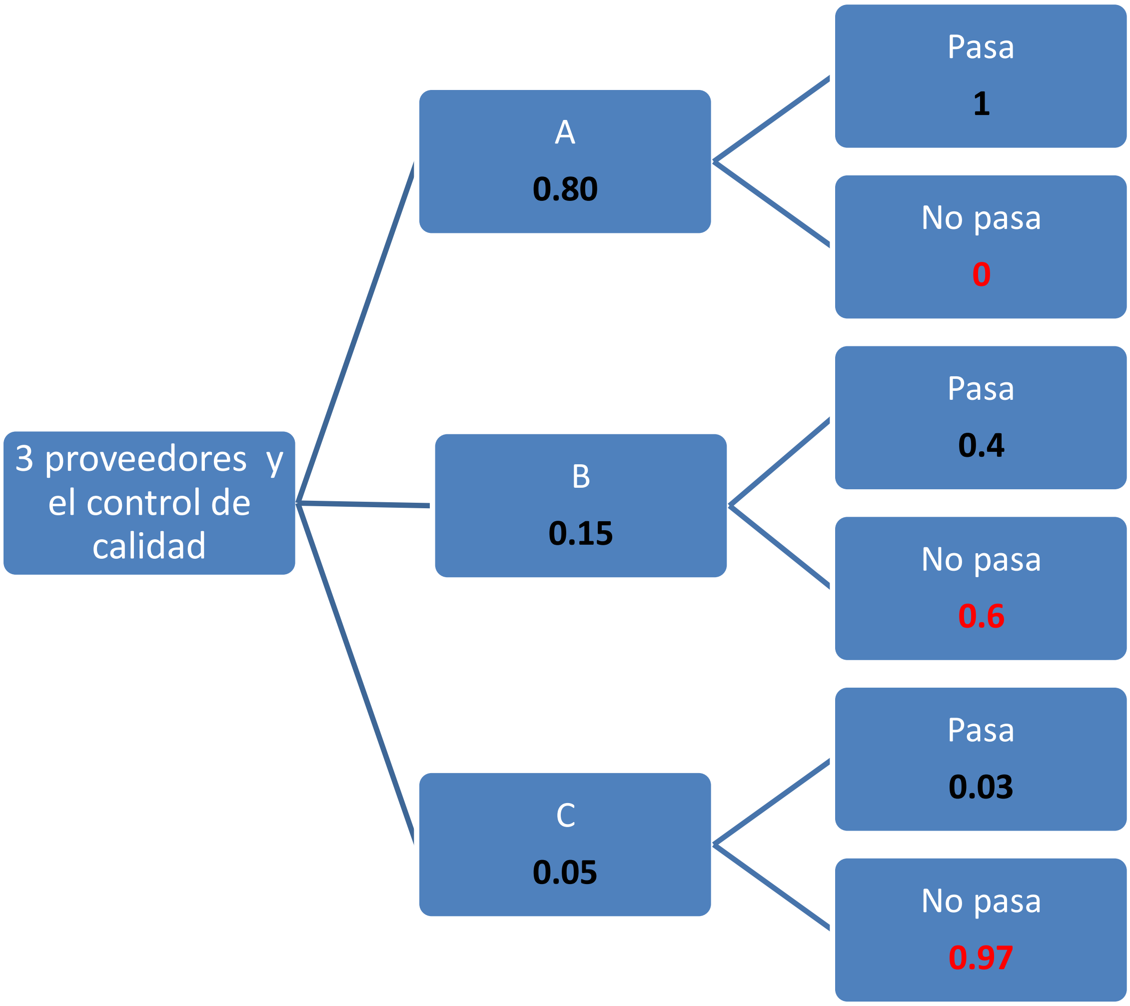
$$Área\ Zona\,2 = \int_4^5 -2x + 10dx = \left[-x^2 + 10x\right]_4^5 = \left[-5^2 + 10\cdot 5\right] - \left[-4^2 + 10\cdot 4\right] =$$

$$= -25 + 50 + 16 - 40 = 1$$

$$\boxed{Área\ total = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3} \simeq 2.33u^2}$$

CUESTIÓN A4. (2 puntos) Una fábrica de jabón recibe de tres proveedores A, B y C agua destilada en botellas en la proporción 80%, 15% y 5% respectivamente. El control de calidad de la fábrica estima que debido a la mayor o menor impureza del agua deja pasar los tipos A, B y C con una probabilidad de 1, 0.4 y 0.03 respectivamente. ¿Qué probabilidad hay de que el control de calidad deje pasar una botella cualquiera?

Llamamos D al suceso "la botella pasa el control de calidad".
A, B y C a los sucesos "la botella procede del proveedor A, B o C", respectivamente.
Realizamos un diagrama de árbol.



$$P(\text{Pasa el control}) = P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) =$$

$$= 0.8 \cdot 1 + 0.15 \cdot 0.4 + 0.05 \cdot 0.03 = \boxed{0.8615}$$

CUESTIÓN A5. (1,5 puntos) Se sabe que el precio de los libros de bachiller es una variable aleatoria normal con media 38.2 euros y desviación típica de 5.25 euros. Una muestra aleatoria simple de 16 libros de Química de distintas editoriales tiene un precio medio de 42.3 euros. Se quiere decidir si existe diferencia significativa entre la media del precio de los libros de Química y la media del precio de los libros de bachiller en general con un nivel de significación $\alpha = 0.05$.

Contrastamos H_0: $\mu = 38.2$ frente a H_1: $\mu \neq 38.2$,
La desviación típica es $\sigma = 5.25$
El nivel de significación es $\alpha = 0.05$, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$.

El intervalo de aceptación es $\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 38.2 \pm 1.96 \dfrac{5.25}{\sqrt{16}} = 38.2 \pm 0.3726 = \begin{cases} 40.7725 \\ 35.6275 \end{cases}$

que da el intervalo $(35.6275,\ 40.7725)$.

Como $\overline{x} = 42.3$ queda fuera del intervalo, se rechaza la hipótesis nula de que $\mu = 38.2$ €, cabe pensar que hay una diferencia significativa entre el precio medio de los libros de Química y el de los libros de bachiller en general.

OPCIÓN B

CUESTIÓN B1. (3 puntos) Calcular la inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & 2 & -3\end{pmatrix}$

Comprobamos si tiene inversa viendo si su determinante es no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & 2 & -3\end{vmatrix}=3+18+4+3+18-4=42\neq 0$$

Existe la inversa de A. La calculamos con la fórmula.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & 2 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & -1 & 2\\ 1 & 2 & -3\end{pmatrix}}{42}=\frac{1}{42}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & -3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & -3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & 3\\ 2 & -3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & -3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{42}\begin{pmatrix}-1 & 11 & 7\\ 12 & -6 & 0\\ 7 & 7 & -7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/42 & 11/42 & 1/6\\ 2/7 & -1/7 & 0\\ 1/6 & 1/6 & -1/6\end{pmatrix}}$$

CUESTIÓN B2. (2 puntos) ¿Cuál es el número que al sumarlo con 25 veces su inverso se obtiene un valor mínimo?

Sea "*x*" el número que estamos buscando.

Debemos minimizar la función $f(x) = x + 25 \cdot \frac{1}{x} = x + \frac{25}{x}$.

Utilizamos su derivada para determinar sus puntos críticos.

$$f'(x) = 1 - \frac{25}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{25}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{25}{x^2} \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \sqrt{25} = \pm 5$$

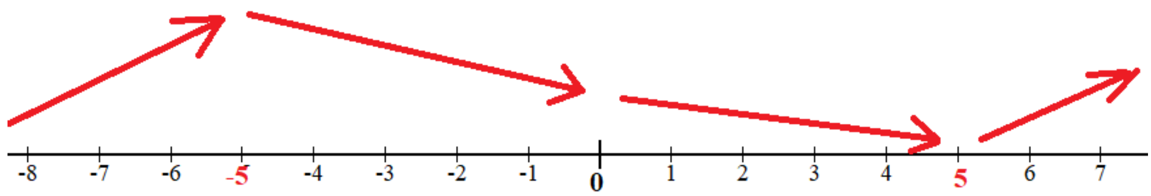
La función tiene dos puntos críticos: $x = -5$ y $x = 5$.

Valoramos el comportamiento de la función antes, entre y después de estos valores. Añadimos el valor $x = 0$ pues no pertenece al dominio de la función.

- En $(-\infty, -5)$ tomamos $x = -6$ y la derivada vale $f'(-6) = 1 - \frac{25}{(-6)^2} = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36} > 0$.

  La función crece en $(-\infty, -5)$
- En $(-5, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = 1 - \frac{25}{(-1)^2} = -24 < 0$. La función decrece en $(-5, 0)$
- En $(0, 5)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 1 - \frac{25}{1^2} = -24 < 0$. La función decrece en $(0, 5)$
- En $(5, +\infty)$ tomamos $x = 6$ y la derivada vale $f'(6) = 1 - \frac{25}{6^2} = \frac{11}{36} > 0$. La función crece en $(5, +\infty)$

La función sigue el esquema siguiente:



La función presenta un mínimo en $x = 5$.

El número buscado es el número 5.

CUESTIÓN B3. (1,5 puntos) Calcular el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y = 4x - x^2$ e $y = x$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

Hallamos los puntos de corte de recta y parábola que serán los límites de integración para calcular el área pedida.

$$\left.\begin{array}{l} y = 4x - x^2 \\ y = x \end{array}\right\} \Rightarrow 4x - x^2 = x \Rightarrow 3x - x^2 = 0 \Rightarrow x(3-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3 - x = 0 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

El área pedida se obtiene del valor absoluto de la integral definida entre *x = 0* y *x = 3* de la diferencia de las dos funciones.

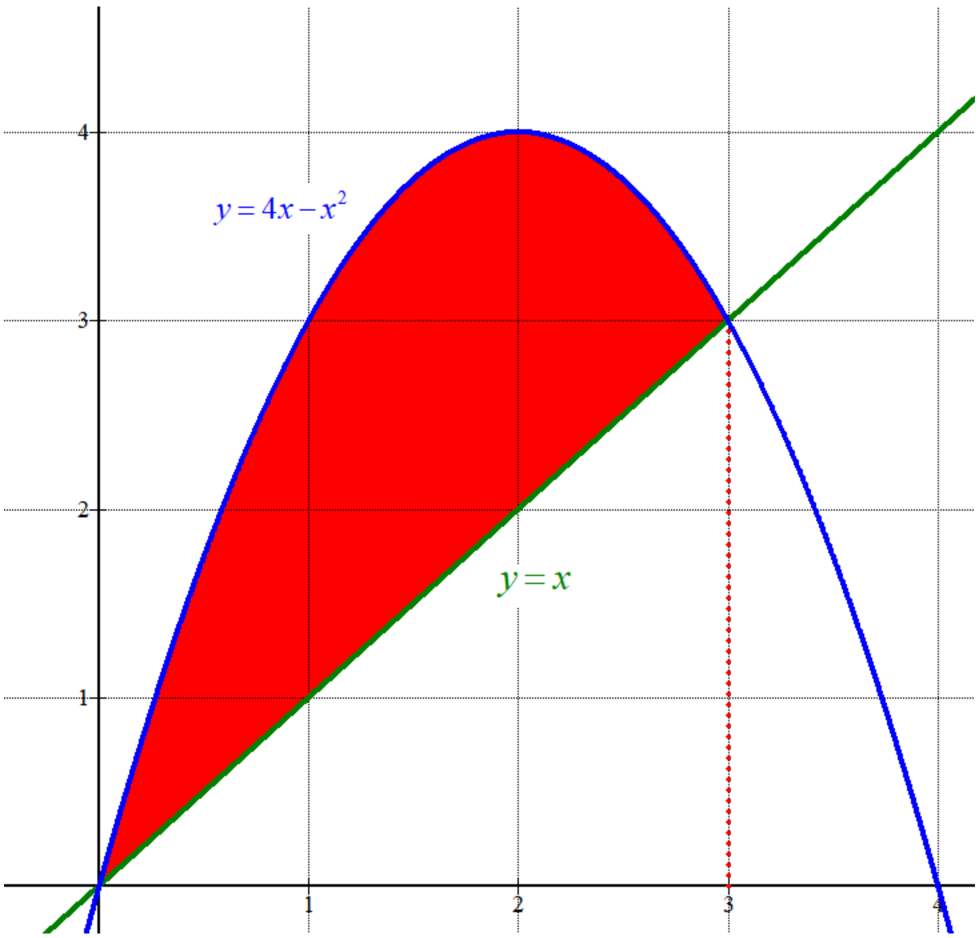
$$Área = \left|\int_0^3 (4x - x^2) - x dx\right| = \left|\int_0^3 3x - x^2 dx\right| = \left|\left[3\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^3\right| =$$

$$= \left|\left[3\frac{3^2}{2} - \frac{3^3}{3}\right] - \left[3\frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3}\right]\right| = \left|\frac{27}{2} - 9\right| = \boxed{\frac{9}{2} = 4.5u^2}$$

Dibujamos la región de la cual hemos calculado el área.

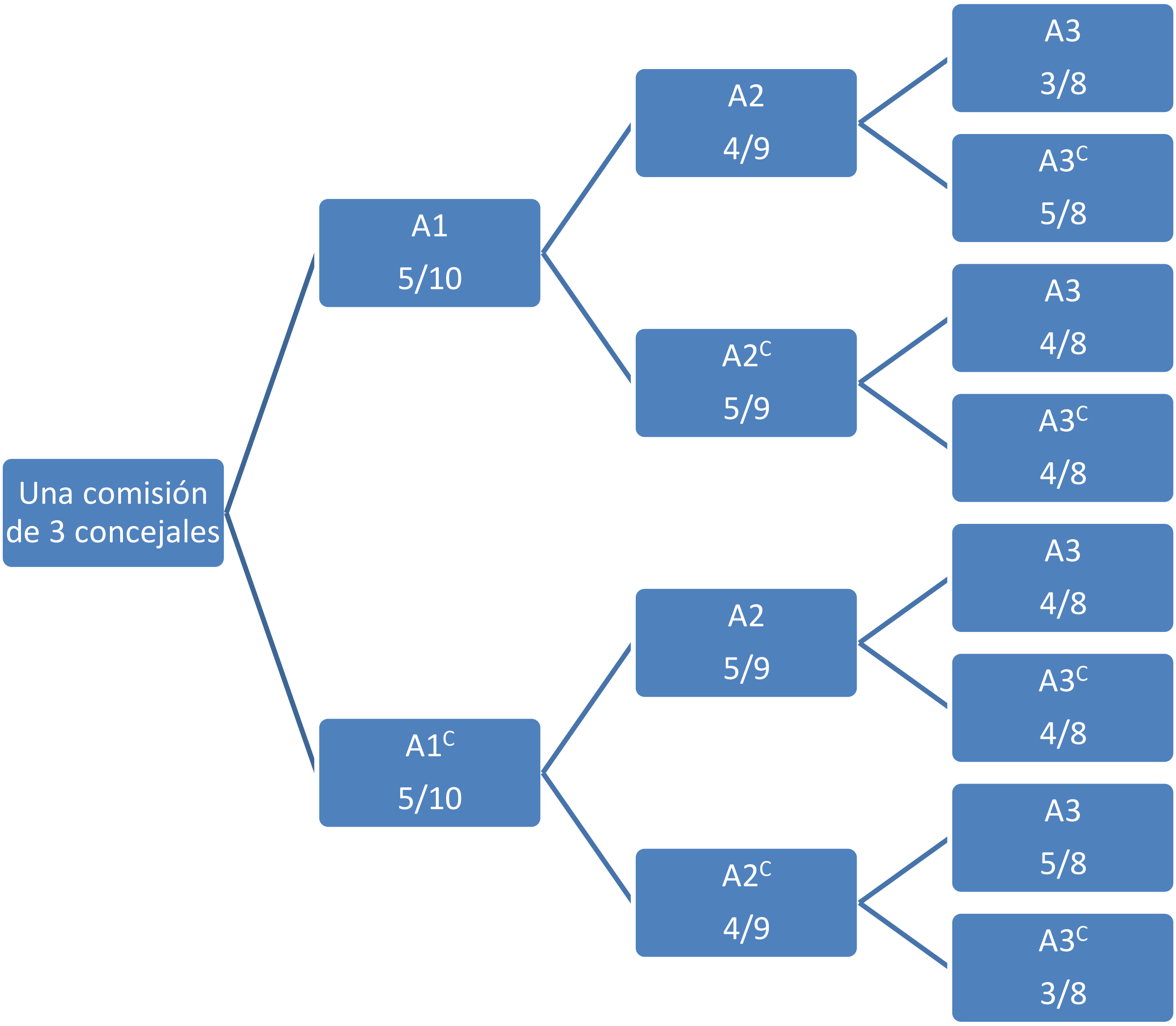
x	$y = x$
0	0
3	3

x	$y = 4x - x^2$
-1	-5
0	0
1	3
2	4
3	3



CUESTIÓN B4. (2 puntos) Una comisión delegada de cierto ayuntamiento está formado por 10 concejales de los cuáles 5 pertenecen al partido A, 4 al B y 1 al C. Se eligen 3 personas al azar y sucesivamente de dicha comisión.
a) Calcular la probabilidad de que las tres pertenezcan al partido A.
b) Calcular la probabilidad de que las tres pertenezcan al partido C.

a) Realizamos un diagrama de árbol.
Llamamos A1, A2 y A3 a sacar un concejal de partido A en 1ª, 2ª o 3ª elección, respectivamente.
Llamamos $A1^C$, $A2^C$ y $A3^C$ a no sacar un concejal de partido A en 1ª, 2ª o 3ª elección, respectivamente.



$$P(3 \text{ al partido A}) = P(A1 \cap A2 \cap A3) = P(A1)P(A2/A1)P(A3/(A1 \cap A2)) =$$

$$= \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{60}{720} = \boxed{\frac{1}{12} \simeq 0.083}$$

b) Es un suceso imposible, pues solo hay un concejal del partido C. La probabilidad es 0.

CUESTIÓN B5. (1,5 puntos) Se está observando la asistencia anual a congresos de los profesionales de la medicina. Se sabe que la variable aleatoria es normal con desviación típica igual a 4 veces por año. Se toma una muestra de 70 profesionales de la medicina cuya asistencia media es de 3 veces por año. Dar un intervalo de confianza al 98% para la media de la asistencia anual a congresos de todos los profesionales de medicina.

X = Número de asistencias anuales a congresos de un profesional de la medicina.
X = N(μ, 4)

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 98% el $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.98 \rightarrow \alpha = 0.02 \rightarrow \alpha/2 = 0.01 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.99 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.33}$$

El error sigue la fórmula:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.33 \cdot \frac{4}{\sqrt{70}} = 1.1139$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(3 - 1.1139,\ 3 + 1.1139\right) = \left(1.8861,\ 4.1139\right)$$

El intervalo de confianza para el número de asistencias a congresos es entre 1.8861 y 4.1139.