UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

Septiembre 2011

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II. CÓDIGO 159

OBSERVACIONES IMPORTANTES: *El alumno deberá elegir una opción A o B y responder a todas las cuestiones de esa opción. Nunca podrá mezclar cuestiones de la opción A con cuestiones de la opción B. En cada cuestión se indica su puntuación. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.*

OPCIÓN A

CUESTIÓN A1. (3 puntos) Tres familias han comprado naranjas, manzanas y melocotones. La familia A ha comprado 1 kg de cada fruta y ha pagado 10 euros, la familia B ha pagado 24 euros por 2kg de naranjas y 4 kg de melocotones, y la familia C se ha llevado 3 kg de manzanas y 3 kg de melocotones y ha pagado 24 euros. Calcular el precio de 1 kg de cada una de las frutas.

CUESTIÓN A2. (2 puntos) Dada la curva de ecuación $y=\frac{x^3}{3}-2x^2-5x+2$ calcular:

a) El dominio de definición.
b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) Los máximos y los mínimos.

CUESTIÓN A3. (1,5 puntos) Calcular el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y=-x^2+2x+8$ y el eje OX. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

CUESTIÓN A4. (2 puntos) En un supermercado se juntan tres partidas con el mismo número de latas de conserva procedentes de tres almacenes A, B y C. Se sabe que caducan en 2012 el 10% de las latas del almacén A, el 8% del B y el 12% del C.

a) Calcular la probabilidad de que una lata elegida al azar caduque en 2012.
b) Se ha elegido una lata aleatoriamente y caduca en 2012, ¿cuál es la probabilidad de que proceda del almacén C?

CUESTIÓN A5. (1,5 puntos) Se sabe que el ingreso anual por hogar en España es una variable normal de media 29400 euros y desviación típica de 17400 euros. Se extrae una muestra aleatoria simple de 400 hogares de la Comunidad de Murcia obteniéndose un ingreso anual medio por hogar de 26600 euros. Suponiendo que el ingreso anual por hogar en la Comunidad de Murcia es una variable normal con la misma desviación típica, decidir con un nivel de significación del 5% si existe una diferencia significativa entre el ingreso anual medio por hogar en España y el ingreso anual medio por hogar en la Comunidad de Murcia.

OPCIÓN B

CUESTIÓN B1. (3 puntos) Un veterinario desea dar a uno de sus animales una dieta que contenga por lo menos 40g de un nutriente A, 60g de un nutriente B y 230g del nutriente C cada día. Existen en el mercado dos productos, P_1 y P_2 que en cada bote contienen los siguientes gramos de esos elementos nutritivos:

	Nutriente A	Nutriente B	Nutriente C
P_1	40	10	60
P_2	10	60	100

Si el precio de un bote del producto P_1 es de 10 euros y el de un bote del producto P_2 es de 16 euros, determinar:
a) ¿Qué cantidad de botes de P_1 y de P_2 debe utilizar para obtener la dieta deseada con el mínimo precio?
b) ¿Qué cantidad de cada elemento nutritivo le dará si decide gastar lo menos posible?

CUESTIÓN B2. (2 puntos) Dada la curva de ecuación $y=\dfrac{3x^2+4}{x^2-3x+2}$ calcular:

a) El dominio de definición.
b) Las asíntotas.

CUESTIÓN B3. (1,5 puntos) Calcular el área comprendida entre la curva $y=x^2+2x+2$, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 1$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

CUESTIÓN B4. (2 puntos) En el desempate de la final del Mundial, cinco futbolistas, A, B, C, D y E lanzan un penalti cada uno. Las probabilidades de marcar de cada uno de ellos son $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$, respectivamente. Calcular:
a) La probabilidad de que todos marquen.
b) La probabilidad de que en los tres primeros lanzamientos, los de los jugadores A, B y C, al menos uno de ellos marque.

CUESTIÓN B5. (1,5 puntos) Una muestra aleatoria de 150 viviendas de una población tiene un precio medio por metro cuadrado de 2950 euros. Suponiendo que el precio por metro cuadrado es una variable normal con desviación típica de 600 euros, ¿entre qué límites se encuentra el verdadero precio medio por metro cuadrado de todas las viviendas de la población con un nivel de confianza de 0,99?

SOLUCIONES

OPCIÓN A

CUESTIÓN A1. (3 puntos) Tres familias han comprado naranjas, manzanas y melocotones. La familia A ha comprado 1 kg de cada fruta y ha pagado 10 euros, la familia B ha pagado 24 euros por 2kg de naranjas y 4 kg de melocotones, y la familia C se ha llevado 3 kg de manzanas y 3 kg de melocotones y ha pagado 24 euros. Calcular el precio de 1 kg de cada una de las frutas.

Llamemos:

x: precio del kg de naranjas
y: precio del kg de manzanas
z: precio del kg de melocotones

"La familia A ha comprado 1 kg de cada fruta y ha pagado 10 euros" → $x+y+z=10$
"La familia B ha pagado 24 euros por 2kg de naranjas y 4 kg de melocotones" → $2x+4z=24$
"La familia C se ha llevado 3 kg de manzanas y 3 kg de melocotones y ha pagado 24 euros" → $3y+3z=24$

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=10 \\ 2x+4z=24 \\ 3y+3z=24 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=10 \\ x+2z=12 \\ y+z=8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=10 \\ x+2z=12 \\ y=8-z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+8-z+z=10 \\ x+2z=12 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \boxed{x=10-8=2} \\ x+2z=12 \end{array}\right\} \Rightarrow 2+2z=12 \Rightarrow 2z=10 \Rightarrow \boxed{z=5} \Rightarrow \boxed{y=8-5=3}$$

Las naranjas cuestan 2 euros el kilo, las manzanas 3 euros el kilo y 5 euros el kilo de melocotones.

CUESTIÓN A2. (2 puntos) Dada la curva de ecuación $y=\frac{x^3}{3}-2x^2-5x+2$ calcular:

a) El dominio de definición.
b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) Los máximos y los mínimos.

a) La función es polinómica y su dominio es $\mathbb{R}$.

b) Utilizamos la derivada.

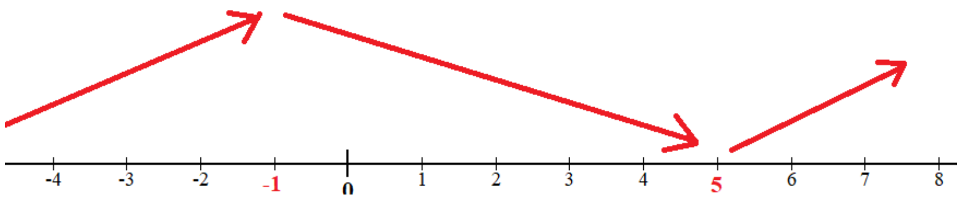
$$y'=3\frac{x^2}{3}-4x-5=x^2-4x-5$$

$$y'=0 \Rightarrow x^2-4x-5=0 \Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4(1)(-5)}}{2\cdot 1}=\frac{4\pm\sqrt{36}}{2}=\begin{cases}\frac{4+6}{2}=5=x\\ \frac{4-6}{2}=-1=x\end{cases}$$

Los puntos críticos de la función son *x = –1* y *x = 5.*
Estudiamos el comportamiento de la función antes, entre y después de estos valores.

- En $(-\infty,-1)$ tomamos *x = –2* y la derivada vale $y'(-2)=(-2)^2-4(-2)-5=4+8-5=7>0$, la función crece en $(-\infty,-1)$.
- En $(-1,5)$ tomamos *x = 0* y la derivada vale $y'(0)=0^2-4\cdot 0-5=-5<0$, la función decrece en $(-1,5)$
- En $(5,+\infty)$ tomamos *x = 6* y la derivada vale $y'(6)=6^2-4\cdot 6-5=36-24-5=7>0$., la función crece en $(5,+\infty)$.

La función sigue el esquema:



La función crece en $(-\infty,-1)\cup(5,+\infty)$ y decrece en $(-1,5)$.

c) Con el estudio realizado en el apartado anterior se observa que la función tiene un máximo relativo en *x = –1* y un mínimo relativo en *x = 5.*

Si *x = –1* → $y=\frac{(-1)^3}{3}-2(-1)^2-5(-1)+2=-\frac{1}{3}-2+5+2=\frac{14}{3}$. El máximo relativo tiene coordenadas $\left(-1,\frac{14}{3}\right)$

Si *x = 5* → $y=\frac{5^3}{3}-2\cdot 5^2-5\cdot 5+2=\frac{125}{3}-50-25+2=\frac{125-219}{3}=-\frac{94}{3}$. El máximo relativo tiene coordenadas $\left(5,-\frac{94}{3}\right)$

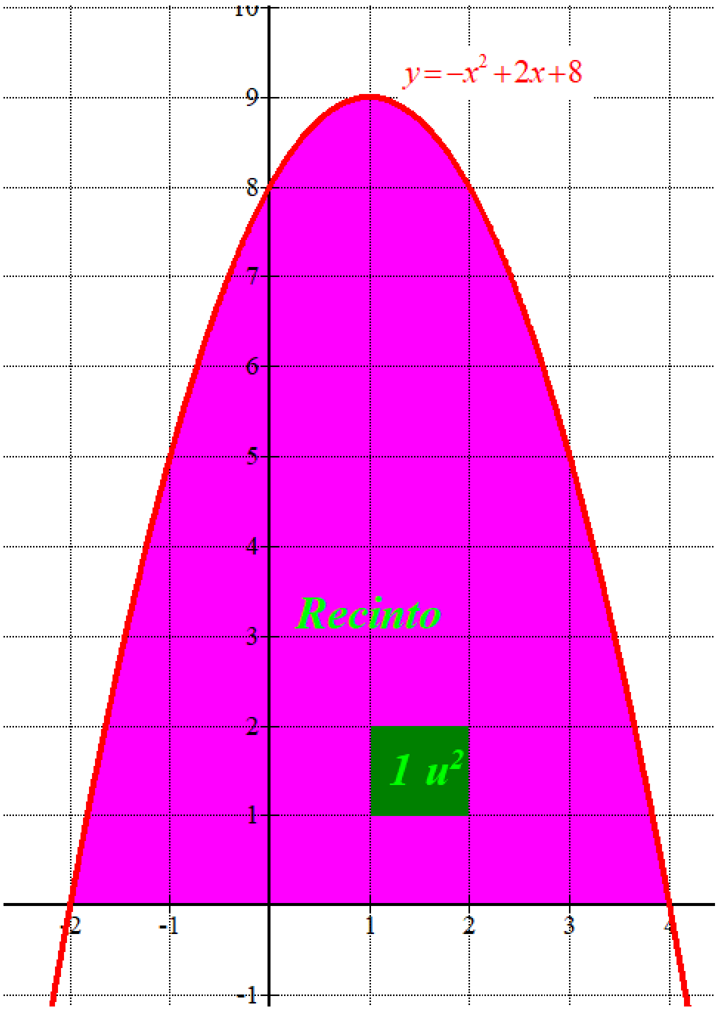
CUESTIÓN A3. (1,5 puntos) Calcular el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y=-x^2+2x+8$ y el eje OX. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

Averiguamos los puntos de corte de la parábola con el eje OX.

$$\left.\begin{array}{l} y=-x^2+2x+8 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=-x^2+2x+8 \Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot(-1)\cdot 8}}{2(-1)}=\frac{-2\pm\sqrt{36}}{-2}=\begin{cases} \frac{-2+6}{-2}=-2=x \\ \frac{-2-6}{-2}=4=x \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores de la parábola y dibujamos su gráfica, así como el recinto del cual queremos calcular el área.

x	$y=-x^2+2x+8$
-2	0
-1	5
0	8
1	9
2	8
4	0

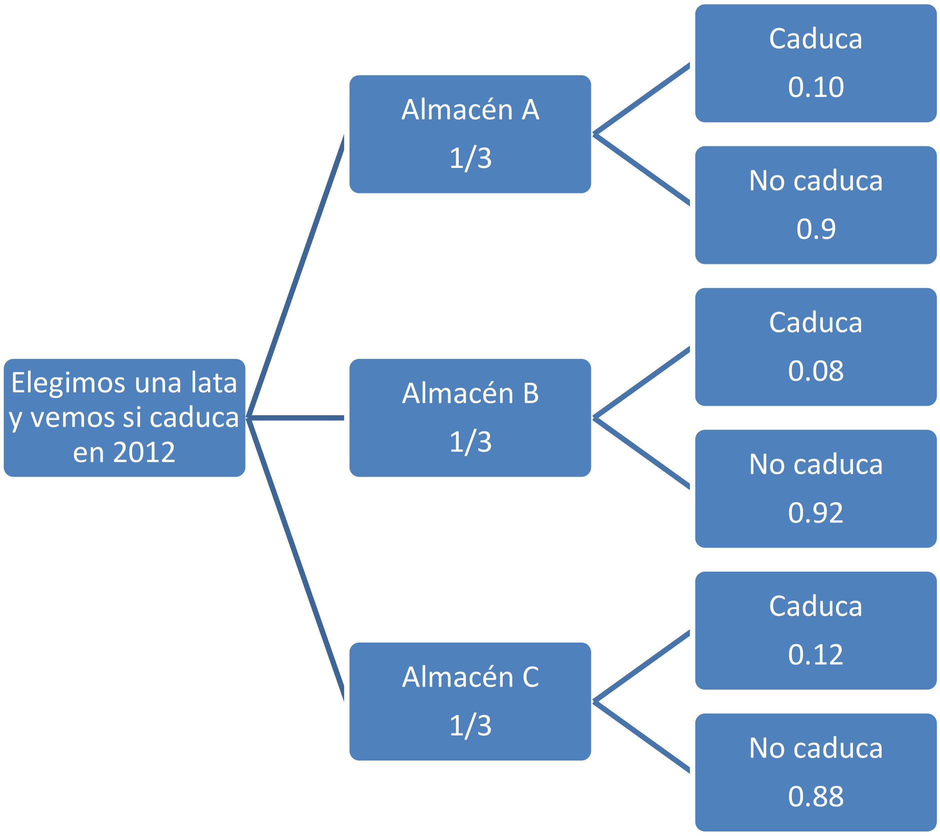


$$Área=\int_{-2}^{4}-x^2+2x+8dx=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+8x\right]_{-2}^{4}=$$

$$=\left[-\frac{4^3}{3}+4^2+8\cdot 4\right]-\left[-\frac{(-2)^3}{3}+(-2)^2+8(-2)\right]=-\frac{64}{3}+16+32-\frac{8}{3}-4+16=\boxed{36\ u^2}$$

CUESTIÓN A4. (2 puntos) En un supermercado se juntan tres partidas con el mismo número de latas de conserva procedentes de tres almacenes A, B y C. Se sabe que caducan en 2012 el 10% de las latas del almacén A, el 8% del B y el 12% del C.
a) Calcular la probabilidad de que una lata elegida al azar caduque en 2012.
b) Se ha elegido una lata aleatoriamente y caduca en 2012, ¿cuál es la probabilidad de que proceda del almacén C?

Realizamos un diagrama de árbol para aclarar la situación.
Como hay el mismo número de latas de cada almacén entonces la probabilidad de elegir una lata de uno de esos almacenes es 1/3.



Llamamos A, B y C al suceso elegir una lata del almacén A, B y C respectivamente.
D al suceso "caducar en 2012".

a)
$$P(Caduca) = P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 0.1 + \frac{1}{3}\cdot 0.08 + \frac{1}{3}\cdot 0.12 = \frac{0.3}{3} = \boxed{0.1}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/D) = \frac{P(C\cap D)}{P(D)} = \frac{P(C)P(D/C)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 0.12}{0.1} = \boxed{0.4}$$

CUESTIÓN A5. (1,5 puntos) Se sabe que el ingreso anual por hogar en España es una variable normal de media 29400 euros y desviación típica de 17400 euros. Se extrae una muestra aleatoria simple de 400 hogares de la Comunidad de Murcia obteniéndose un ingreso anual medio por hogar de 26600 euros. Suponiendo que el ingreso anual por hogar en la Comunidad de Murcia es una variable normal con la misma desviación típica, decidir con un nivel de significación del 5% si existe una diferencia significativa entre el ingreso anual medio por hogar en España y el ingreso anual medio por hogar en la Comunidad de Murcia.

Contrastamos H_0: μ = 29400 frente a H_1: μ ≠ 29400,
La desviación típica es σ = 17400
El nivel de significación del 5%, α = 0′05, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$.

El intervalo de aceptación es $\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 29400 \pm 1.96 \frac{17400}{\sqrt{400}} = \begin{cases} 27694.8 \\ 31105.2 \end{cases}$
que da el intervalo (27694.8, 31105.2).

Como $\overline{x} = 26600$ € queda fuera del intervalo, se rechaza la hipótesis nula de que μ = 29400 años, cabe pensar que hay una diferencia significativa entre el ingreso anual medio por hogar en España y el ingreso anual medio por hogar en la Comunidad de Murcia.

OPCIÓN B

CUESTIÓN B1. (3 puntos) Un veterinario desea dar a uno de sus animales una dieta que contenga por lo menos 40g de un nutriente A, 60g de un nutriente B y 230g del nutriente C cada día. Existen en el mercado dos productos, P_1 y P_2 que en cada bote contienen los siguientes gramos de esos elementos nutritivos:

	Nutriente A	Nutriente B	Nutriente C
P_1	40	10	60
P_2	10	60	100

Si el precio de un bote del producto P_1 es de 10 euros y el de un bote del producto P_2 es de 16 euros, determinar:
a) ¿Qué cantidad de botes de P_1 y de P_2 debe utilizar para obtener la dieta deseada con el mínimo precio?
b) ¿Qué cantidad de cada elemento nutritivo le dará si decide gastar lo menos posible?

Sean x = número de botes del producto P_1; y = número de botes del producto P_2.

	Nutriente A	Nutriente B	Nutriente C	Precio
Nº botes de P_1 (x)	40x	10x	60x	10x
Nº de botes de P_2 (y)	10y	60y	100y	16y
TOTALES	$40x+10y$	$10x+60y$	$60x+100y$	$10x+16y$

a) Deseamos minimizar el precio que viene dado por la función: $f\left(x,y\right)=10x+16y$

Las restricciones son:

"Las cantidades deben ser positivas" → $x\geq 0;\ y\geq 0$

"La dieta debe contener por lo menos 40 g de un nutriente A, 60 g de un nutriente B y 230 g del nutriente C cada día" → $\left.\begin{array}{l} 40x+10y\geq 40 \\ 10x+60y\geq 60 \\ 60x+100y\geq 230 \end{array}\right\}$

Reunimos todas las restricciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x\geq 0;\ y\geq 0 \\ 40x+10y\geq 40 \\ 10x+60y\geq 60 \\ 60x+100y\geq 230 \end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} x\geq 0;\ y\geq 0 \\ 4x+y\geq 4 \\ x+6y\geq 6 \\ 6x+10y\geq 23 \end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} x\geq 0;\ y\geq 0 \\ y\geq 4-4x \\ 6y\geq 6-x \\ 10y\geq 23-6x \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas asociadas a cada inecuación.

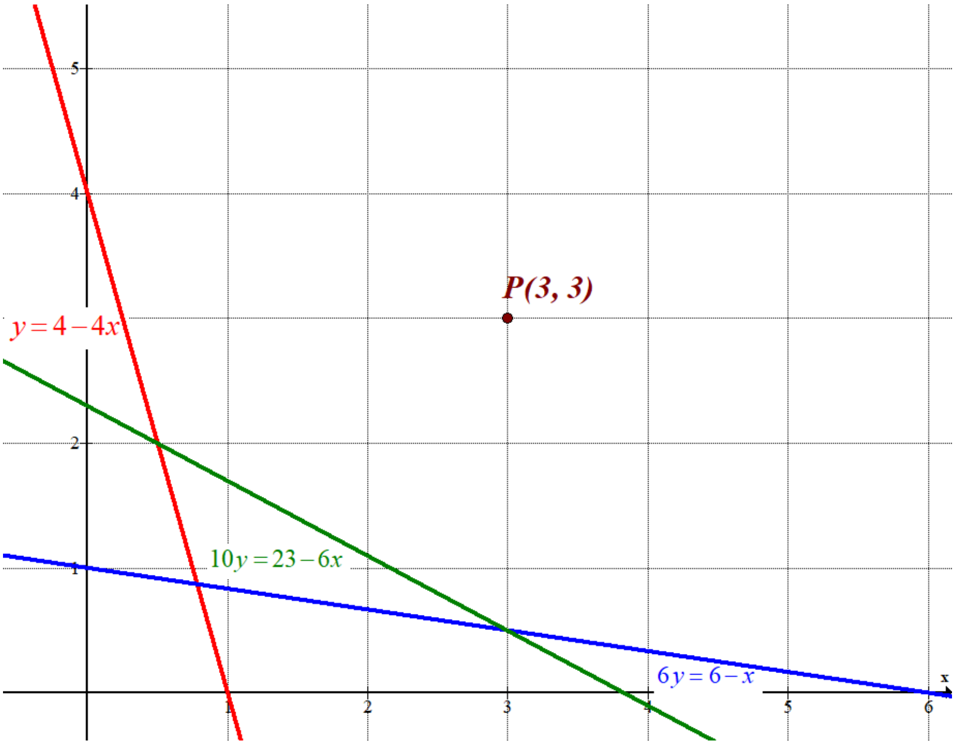
$x \geq 0;\ y \geq 0$ $\quad$ $y = 4 - 4x$ $\quad$ $6y = 6 - x$ $\quad$ $10y = 23 - 6x$

$\text{Pr}\,imer$ $cuadrante$

x	$y = 4 - 4x$
0	4
1	0

x	$y = \dfrac{6-x}{6}$
0	1
6	0

x	$y = \dfrac{23-6x}{10}$
0.5	2
3	0.5

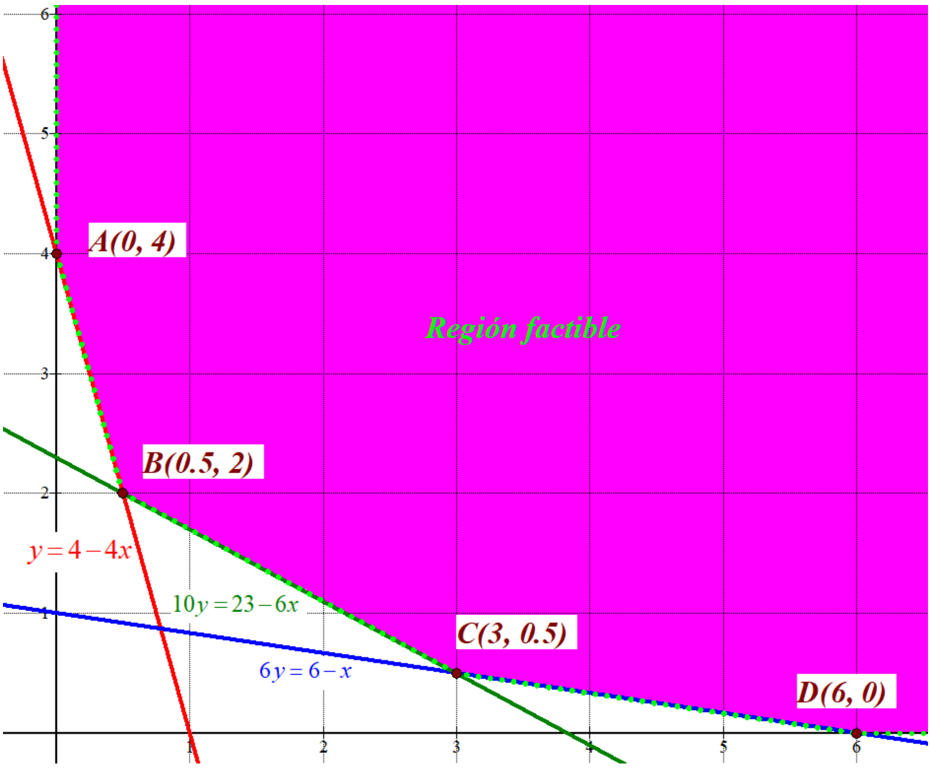


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ y \geq 4 - 4x \\ 6y \geq 6 - x \\ 10y \geq 23 - 6x \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por encima de las rectas azul, roja y verde.

Comprobamos que el punto *P(3, 3)* cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 3 \geq 0;\ 3 \geq 0 \\ 3 \geq 4 - 4 \cdot 3 \\ 6 \cdot 3 \geq 6 - 3 \\ 10 \cdot 3 \geq 23 - 6 \cdot 3 \end{array}\right\} \text{¡¡Se cumplen todas!!}$$

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de los vértices de la región.



Las coordenadas de los puntos A y D están claras. No están tan claras las coordenadas de los puntos B y C. Las obtenemos resolviendo los sistemas de ecuaciones correspondientes.

$$B \to \left.\begin{array}{r} y = 4-4x \\ 10y = 23-6x \end{array}\right\} \Rightarrow 10(4-4x) = 23-6x \Rightarrow 40-40x = 23-6x \Rightarrow$$

$$-40x+6x = 23-40 \Rightarrow -34x = -17 \Rightarrow x = \frac{-17}{-34} = 0.5 \Rightarrow y = 4-2 = 2 \Rightarrow \boxed{B(0.5,2)}$$

$$C \to \left.\begin{array}{r} 10y = 23-6x \\ 6y = 6-x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 10y = 23-6x \\ x = 6-6y \end{array}\right\} \Rightarrow 10y = 23-6(6-6y) \Rightarrow 10y = 23-36+36y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10y-36y = -13 \Rightarrow -26y = -13 \Rightarrow y = \frac{-13}{-26} = 0.5 \Rightarrow x = 6-3 = 3 \Rightarrow \boxed{C(3,0.5)}$$

Valoramos la función objetivo $f(x,y) = x+y$ en cada vértice en busca del valor mínimo.

A(0, 4) → $f(0,4) = 0+16\cdot 4 = 64$

B(0.5, 2) → $f(0.5,2) = 10\cdot 0.5+16\cdot 2 = 37$ Minimo

C(3, 0.5) → $f(3,0.5) = 10\cdot 3+16\cdot 0.5 = 38$

D(6, 0) → $f(6,0) = 10\cdot 6+0 = 60$

El precio mínimo es de 37 euros. Se consigue con medio bote de P_1 y 2 botes de P_2.

b) Con medio bote de P_1 y 2 botes de P_2 se obtienen:

	Nutriente A	Nutriente B	Nutriente C
Nº botes de P_1 (x = 0.5)	20	5	30
Nº de botes de P_2 (y = 2)	20	120	200
TOTALES	40	125	230

Se obtiene 40 gr de nutriente A, 125 gr de nutriente B y 230 gr de nutriente C.

CUESTIÓN B2. (2 puntos) Dada la curva de ecuación $y=\frac{3x^2+4}{x^2-3x+2}$ calcular:

a) El dominio de definición.
b) Las asíntotas.

a) Averiguamos cuando se anula el denominador de la función.

$$x^2-3x+2=0 \Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot 2}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}=\begin{cases}\frac{3+1}{2}=2=x\\ \frac{3-1}{2}=1=x\end{cases}$$

El dominio es $\mathbb{R}-\{1,2\}$

b) **Asíntota vertical.** $x=a$

¿ $x=1$ es asíntota?

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+4}{x^2-3x+2}=\frac{3+4}{0}=\frac{7}{0}=\infty$$

$x=1$ es asíntota vertical

¿ $x=2$ es asíntota?

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2+4}{x^2-3x+2}=\frac{12+4}{0}=\frac{16}{0}=\infty$$

$x=2$ es asíntota vertical**.**

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+4}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^2}=3$$

$y=3$ es la asíntota horizontal.

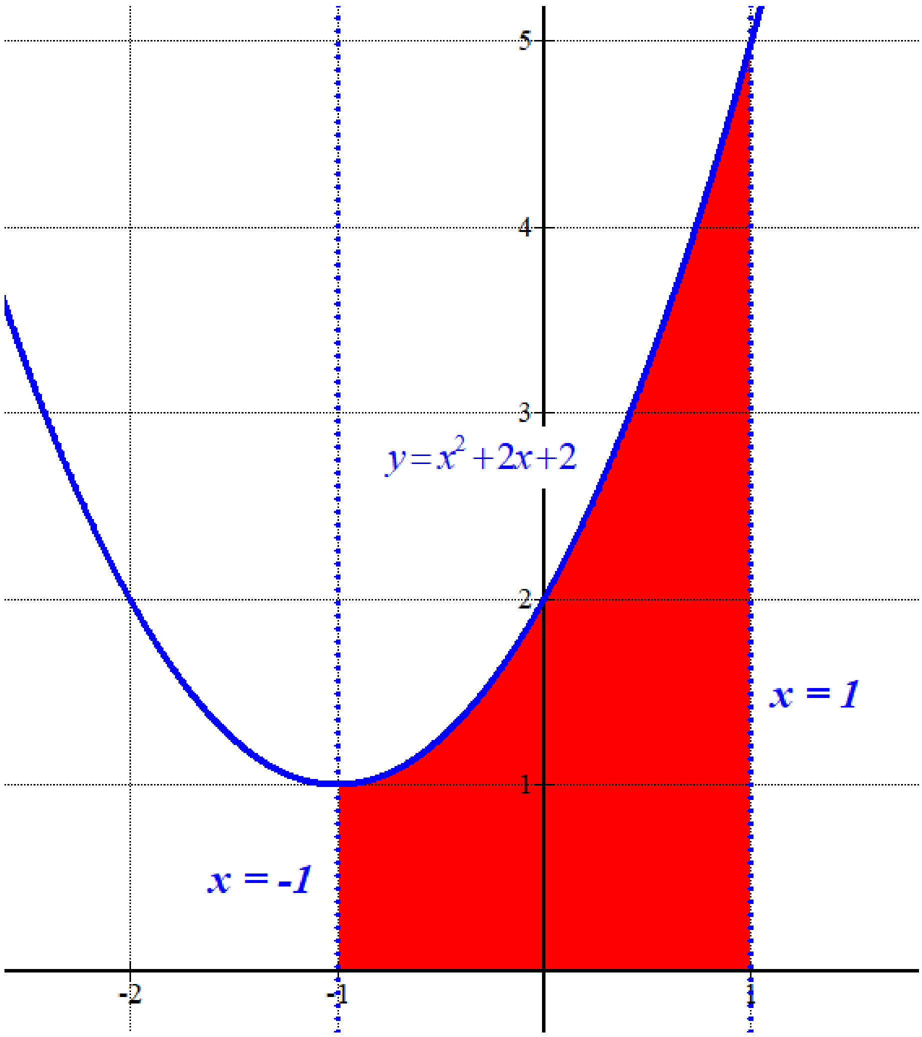
Asíntota oblicua. $y=mx+n$

No tiene asíntota oblicua pues existe asíntota horizontal.

CUESTIÓN B3. (1,5 puntos) Calcular el área comprendida entre la curva $y = x^2 + 2x + 2$, el eje OX y las rectas $x = -1$ y $x = 1$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

Dibujamos la región de la cual queremos hallar su área.

x	$y = x^2 + 2x + 2$
-2	2
-1	1
0	2
1	5
2	10



$$Área = \int_{-1}^{1} x^2 + 2x + 2dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x\right]_{-1}^{1} = \left[\frac{1^3}{3} + 1^2 + 2\cdot 1\right] - \left[\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 + 2(-1)\right] =$$

$$= \frac{1}{3} + 1 + 2 + \frac{1}{3} - 1 + 2 = \frac{2}{3} + 4 = \boxed{\frac{14}{3} \simeq 4.66u^2}$$

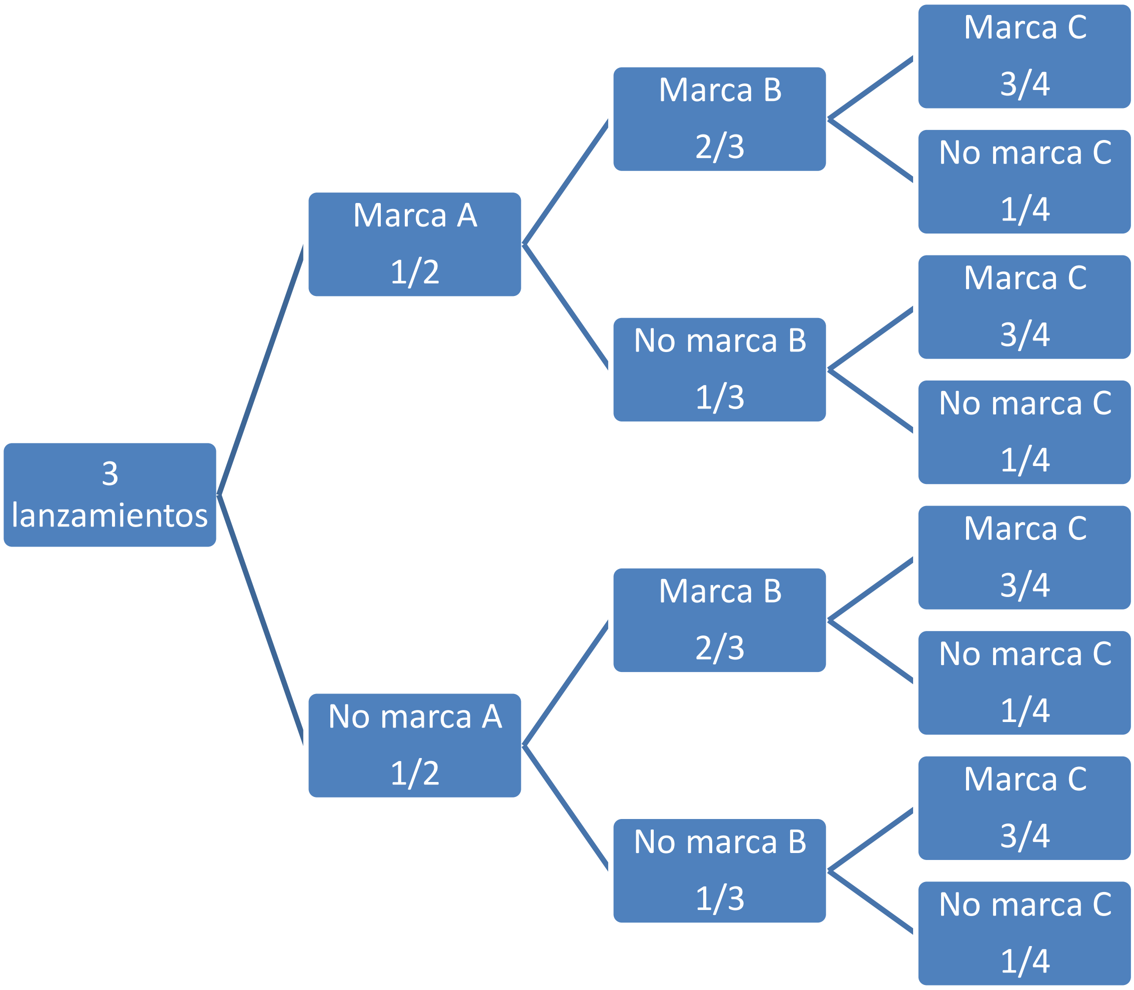
CUESTIÓN B4. (2 puntos) En el desempate de la final del Mundial, cinco futbolistas, A, B, C, D y E lanzan un penalti cada uno. Las probabilidades de marcar de cada uno de ellos son $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$, respectivamente. Calcular:
a) La probabilidad de que todos marquen.
b) La probabilidad de que en los tres primeros lanzamientos, los de los jugadores A, B y C, al menos uno de ellos marque.

a) Como son sucesos independientes la probabilidad de que todos marquen es el producto de las probabilidades de que cada uno marque.

P(Todos marquen) = P(marca A) · P(marca B) · P(marca C) · P(marca D) =

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5} = \frac{48}{360} = \boxed{\frac{2}{15} \simeq 0.133}$$

b) Realizamos un diagrama de árbol.



Como son muchas las formas de que alguno marque, calculamos la probabilidad utilizando el suceso contrario a "Al menos uno de ellos marca" que es el suceso "Ninguno de ellos marca".

$$P\left(\text{Al menos uno marca}\right) = 1 - P\left(\text{Ninguno de ellos marca}\right) = 1 - P\left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{24} = \boxed{\frac{23}{24} \simeq 0.9583}$$

CUESTIÓN B5. (1,5 puntos) Una muestra aleatoria de 150 viviendas de una población tiene un precio medio por metro cuadrado de 2950 euros. Suponiendo que el precio por metro cuadrado es una variable normal con desviación típica de 600 euros, ¿entre qué límites se encuentra el verdadero precio medio por metro cuadrado de todas las viviendas de la población con un nivel de confianza de 0,99?

X = Precio por metro cuadrado
X = N(μ, 600)

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 99% el $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow \alpha/2 = 0.005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.58}$$

El error sigue la fórmula:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.58 \cdot \frac{600}{\sqrt{150}} = 126.39$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\overline{x} - Error, \overline{x} + Error\right) = \left(2950 - 126.39,\ 2950 + 126.39\right) = \left(2823.61,\ 3076.39\right)$$

El intervalo de confianza para precio medio por metro cuadrado de todas las viviendas es entre 2823.61 € y 3076.39 €.