Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura

Curso 2021-2022

Materia: Matemáticas II Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN. El examen consta de **10 preguntas**, cuyo valor es de **2 puntos cada una**. **El estudiante ha de elegir 5 preguntas**. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen solo se tendrán en cuenta las cinco primeras preguntas respondidas. Se seguirá el orden en el que las respuestas aparezcan desarrolladas por el estudiante. Si se desea que alguna de ellas no sea tenida en cuenta, el estudiante ha de tacharla y dejarlo claramente indicado. En ese caso, además de las cuatro primeras preguntas sin tachar, se corregiría la que ocupe el siguiente lugar. **Justificar** las respuestas y las soluciones.

PREGUNTAS

1. Calcule $A^{2021}-A^{2022}$, siendo A la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. (2 puntos)

2. Añadir una ecuación al sistema

$$\left.\begin{array}{r}2x-y+2z=1\\ x+y-\ z=3\end{array}\right\}$$

de modo que sea:

a) Un sistema incompatible. (1 punto)

b) Un sistema compatible determinado. (1 punto)

3. Dados los vectores $\vec{u}=(1,1,0)$, $\vec{v}=(-3,-2,a)$ y $\vec{w}=(a+1,1,-1)$:

a) ¿Qué valores puede tomar a para que los tres vectores sean linealmente independientes? (1 punto)

b) Calcule los vectores paralelos al vector $\vec{u}$ de módulo 7. (1 punto)

4. Dadas las rectas: $r:\begin{cases}2x-y+z=1\\ x=2\end{cases}$ y $s:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-2}{-1}$,

a) Calcule el plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s. (1 punto)

b) Calcule el ángulo que forman las dos rectas. (1 punto)

5. Dada la función $y=(x+2)\cdot e^{-x}$,

a) Calcule la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $x=0$. (1 punto)

b) Estudie su monotonía y sus extremos relativos. (1 punto)

6. Calcule a, b y c para que la función (2 puntos)

$$f(x)=\begin{cases}x^3+a & si \quad -2\le x\le 0\\ bx^2+cx-1 & si \quad 0<x\le 1\end{cases}$$

Cumpla las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo $[-2,1]$. Calcule el valor al cual se refiere el teorema.

7. Calcule el valor de la integral $\int_0^{\pi} x^2 \cos(2x)\,dx$ (2 puntos)

8. Calcule el área de la región plana encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 - 2x - 1$ y $g(x) = 2x - 1$ (2 puntos)

9. Se ha observado que en la fabricación de un cierto modelo de ordenador se presentan problemas de software con probabilidad 0,1 y problemas de hardware con probabilidad 0,05. Sabiendo que ambos tipos de problemas son independientes, se pide:

a) Probabilidad de que un ordenador presente alguno de estos problemas. (1 punto)

b) Sabiendo que un ordenador no presenta problemas de hardware, calcular la probabilidad de que no tenga problemas de software. (1 punto)

10. Se tiene una moneda trucada para la que se sabe que la probabilidad de cruz es 0,3. Si se lanza la moneda cinco veces, calcular:

a) Probabilidad de obtener cuatro cruces. (0,5 puntos)

b) Probabilidad de obtener al menos cuatro cruces. (0,5 puntos)

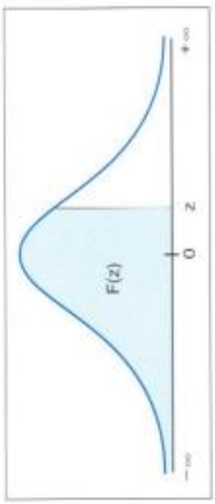
c) Probabilidad de obtener a lo sumo cuatro cruces. (0,5 puntos)

d) Probabilidad de no obtener ninguna cruz. (0,5 puntos)

Tabla de distribución

normal *N(0,1)*

F(z)= P(Z ≤ z)



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

SOLUCIONES

1. Calcule $A^{2021}-A^{2022}$, siendo A la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. (2 puntos)

Calculamos las primeras potencias de A, en busca de una regla que nos permita calcular las potencias pedidas de forma cómoda y rápida.

$$A^1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2\cdot 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2+2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2\cdot 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4+2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2\cdot 3 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 6 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 6+2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 8 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2\cdot 4 & 1\end{pmatrix}$$

...

$$A^{2021}=.....=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2\cdot 2021 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4042 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^{2022}=.....=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2\cdot 2022 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4044 & 1\end{pmatrix}$$

Por lo que aplicándolo a la expresión del ejercicio

$$A^{2021}-A^{2022}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4042 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4044 & 1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}}$$

2. Añadir una ecuación al sistema

$$\left.\begin{array}{r} 2x-y+2z=1 \\ x+y-\ z=3 \end{array}\right\}$$

de modo que sea:

a) Un sistema incompatible. (1 punto)

b) Un sistema compatible determinado. (1 punto)

a) Añadimos la ecuación segunda, pero cambiando el término independiente, lo que hace imposible obtener una solución a la situación planteada por el sistema de ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{r} 2x-y+2z=1 \\ x+y-\ z=3 \\ x+y-\ z=1000 \end{array}\right\}$$

Ese sistema es incompatible pues la expresión “ $x+y-z$ ” no puede dar dos valores distintos “3” y “1000”.

b) Añadimos una ecuación dando un valor concreto a una de las incógnitas.

$$\left.\begin{array}{r} 2x-y+2z=1 \\ x+y-\ z=3 \\ x=0 \end{array}\right\}$$

Lo resuelvo para comprobar que es compatible determinado y tiene una solución única.

$$\left.\begin{array}{r} 2x-y+2z=1 \\ x+y-\ z=3 \\ \boxed{x=0} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2\cdot 0-y+2z=1 \\ 0+y-\ z=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -y+2z=1 \\ y-\ z=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -y+2z=1 \\ y=z+3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(z+3)+2z=1 \Rightarrow z-3=1 \Rightarrow \boxed{z=4} \Rightarrow \boxed{y=4+3=7}$$

La solución del sistema es **única** con valores: $x=0; y=7; z=4$

3. Dados los vectores $\vec{u}=(1,1,0)$, $\vec{v}=(-3,-2,a)$ y $\vec{w}=(a+1,1,-1)$:

a) ¿Qué valores puede tomar *a* para que los tres vectores sean linealmente independientes? (1 punto)

b) Calcule los vectores paralelos al vector $\vec{u}$ de módulo 7. (1 punto)

a) Para que los vectores sean linealmente independientes el determinante de la matriz formada por sus coordenadas debe ser no nulo.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(1,1,0)\\ \vec{v}=(-3,-2,a)\\ \vec{w}=(a+1,1,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ -3 & -2 & a\\ a+1 & 1 & -1\end{vmatrix}=0\Rightarrow 2+a(a+1)+0-0-3-a=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2+a^2+a-3-a=0\Rightarrow a^2-1=0\Rightarrow a^2=1\Rightarrow \boxed{a=\sqrt{1}=\pm 1}$$

Los vectores son linealmente independientes cuando $a\neq 1$ y $a\neq -1$

b) Los vectores $\vec{x}$ paralelos al vector $\vec{u}$ deben tener coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{x}=a\vec{u}=a(1,1,0)=(a,a,0)\\ \left|\vec{x}\right|=7\end{array}\right\}\Rightarrow\left|\vec{x}\right|=\sqrt{a^2+a^2}=7\Rightarrow\sqrt{2a^2}=7\Rightarrow 2a^2=7^2=49\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2=\frac{49}{2}\Rightarrow a=\sqrt{\frac{49}{2}}=\frac{7}{\sqrt{2}}=\pm\frac{7\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\boxed{\overrightarrow{x_1}=\left(\frac{7\sqrt{2}}{2},\frac{7\sqrt{2}}{2},0\right)}\\ o\\ \boxed{\overrightarrow{x_2}=\left(-\frac{7\sqrt{2}}{2},-\frac{7\sqrt{2}}{2},0\right)}\end{array}\right.$$

4. Dadas las rectas: $r:\begin{cases}2x-y+z=1\\x=2\end{cases}$ y $s:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-2}{-1}$,

a) Calcule el plano que contiene a la recta *r* y es paralelo a la recta *s*. (1 punto)
b) Calcule el ángulo que forman las dos rectas. (1 punto)

a) Comprobamos la posición relativa de las rectas.

$$r:\begin{cases}2x-y+z=1\\x=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\4-y+z=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\z=-3+y\end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases}x=2\\y=t\\z=-3+t\end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases}P_r(2,0,-3)\in r\\\overrightarrow{u_r}=(0,1,1)\end{cases}$$

$$s:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{-1}\Rightarrow s:\begin{cases}Q_s(-1,0,2)\in s\\\overrightarrow{v_s}=(2,3,-1)\end{cases}$$

Los vectores directores de las rectas *r* y *s* no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas se cortan o cruzan.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(0,1,1)\\\overrightarrow{v_s}=(2,3,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{0}{2}\neq\frac{1}{3}\neq\frac{1}{-1}$$

Para valorar si se cortan o cruzan, comprobamos el valor del producto mixto $\left[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{P_rQ_s}\right]$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{P_rQ_s}=(-1,0,2)-(2,0,-3)=(-3,0,5)\\\overrightarrow{u_r}=(0,1,1)\\\overrightarrow{v_s}=(2,3,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{P_rQ_s}\right]=\begin{vmatrix}0&1&1\\2&3&-1\\-3&0&5\end{vmatrix}=0+3+0+9-10+0=2\neq0$$

Al ser no nulo el producto mixto las rectas se cruzan.

El plano que contiene a *r* y es paralelo a la recta *s* tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas y pasa por un punto cualquiera de la recta *r*, por ejemplo $P_r(2,0,-3)$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{u_r}=(0,1,1)\\\vec{v}=\overrightarrow{v_s}=(2,3,-1)\\P_r(2,0,-3)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow\pi:\begin{cases}x=2+0\alpha+2\lambda\\y=0+\alpha+3\lambda\\z=-3+\alpha-\lambda\end{cases}\Rightarrow\boxed{\pi:\begin{cases}x=2+2\lambda\\y=\alpha+3\lambda\\z=-3+\alpha-\lambda\end{cases}}$$

Otra forma de obtener la ecuación del plano es

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{u_r}=(0,1,1)\\\vec{v}=\overrightarrow{v_s}=(2,3,-1)\\P_r(2,0,-3)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow\pi:\begin{vmatrix}x-2&y-0&z+3\\0&1&1\\2&3&-1\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow-x+2+2y+0-2z-6-0-3x+6=0\Rightarrow-4x+2y-2z+2=0\Rightarrow\boxed{\pi:2x-y+z-1=0}$$

b) El ángulo que forman las dos rectas es el ángulo formado por sus vectores directores.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(0,1,1)\\ \overrightarrow{v_s}=(2,3,-1)\end{array}\right\} \Rightarrow \cos(r,s)=\cos\left(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{v_s}\right)=\frac{\overrightarrow{u_r}\cdot\overrightarrow{v_s}}{\left|\overrightarrow{u_r}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v_s}\right|}=\frac{(0,1,1)(2,3,-1)}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}} \Rightarrow$$

$$\cos(r,s)=\frac{0+3-1}{\sqrt{2}\sqrt{14}}=\frac{2}{\sqrt{28}} \Rightarrow \boxed{(r,s)=arc\cos\left(\frac{2}{\sqrt{28}}\right)\simeq 67.8^{\circ}}$$

Las rectas *r* y *s* forman un ángulo de 67.8º aproximadamente.

5. Dada la función $y=(x+2)\cdot e^{-x}$,

a) Calcule la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $x=0$. (1 punto)

b) Estudie su monotonía y sus extremos relativos. (1 punto)

a) La ecuación de la recta tangente a la función en $x=0$ tiene ecuación $y-f(0)=f'(0)(x-0)$.

$$f(x)=(x+2)\cdot e^{-x} \Rightarrow f(0)=(0+2)\cdot e^{-0}=2$$

$$f(x)=(x+2)\cdot e^{-x} \Rightarrow f'(x)=(1)\cdot e^{-x}+(x+2)(-1)e^{-x}=e^{-x}+(-x-2)e^{-x} \Rightarrow$$

$$f'(x)=e^{-x}(1-x-2)=e^{-x}(-x-1) \Rightarrow f'(0)=e^{-0}(-0-1)=-1$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=2 \\ f'(0)=-1 \\ y-f(0)=f'(0)(x-0) \end{array}\right\} \Rightarrow y-2=(-1)(x-0) \Rightarrow y-2=-x \Rightarrow \boxed{y=-x+2}$$

La recta tangente a la gráfica de la función en el punto $x=0$ tiene ecuación $y=-x+2$.

b) Hallamos la derivada y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos de la función.

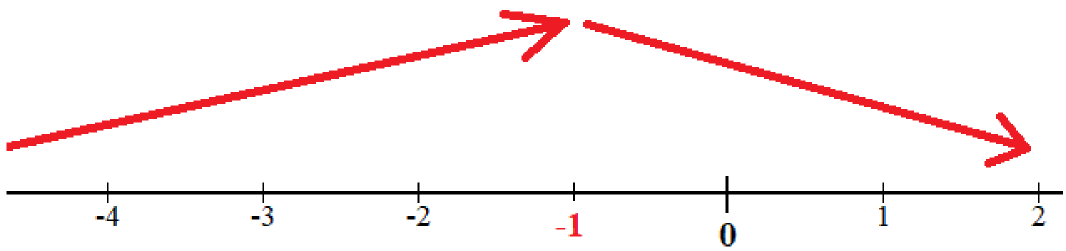
$$f'(x)=e^{-x}(-x-1)$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow e^{-x}(-x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} e^{-x}=0 \rightarrow \text{¡No es posible!} \\ -x-1=0 \rightarrow \boxed{x=-1} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x=-1$.

- En $(-\infty,-1)$ tomamos $x=-2$ y la derivada vale $f'(-2)=e^{2}(2-1)=e^{2}>0$. La función crece en $(-\infty,-1)$
- En $(-1,+\infty)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale $f'(0)=e^{-0}(-0-1)=-1<0$. La función decrece en $(-1,+\infty)$

La función sigue el esquema:



La función crece en $(-\infty,-1)$ y decrece en $(-1,+\infty)$.

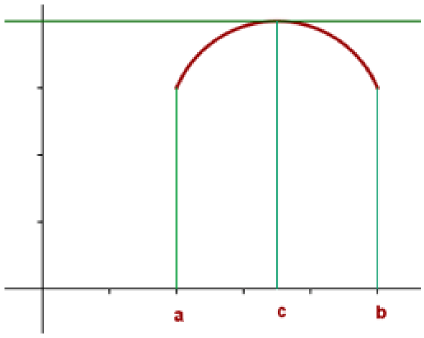
La función tiene un máximo relativo en $x=-1$. Como $f(-1)=(-1+2)\cdot e^{1}=e$, el máximo relativo tiene coordenadas $(-1,e)$.

6. Calcule a, b y c para que la función (2 puntos)

$$f(x)=\begin{cases} x^3+a & si \quad -2\le x\le 0 \\ bx^2+cx-1 & si \quad 0<x\le 1\end{cases}$$

cumpla las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo $[-2,1]$. Calcule el valor al cual se refiere el teorema.

Enunciado del teorema de Rolle:



Sea *f(x)* una función que

1. es **continua** en $[a,b]$,

2. es **derivable** en (a,b),

3. y cumple que $f(a)=f(b)$.

Entonces existe algún punto $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$

Aplicado a esta función y en el intervalo $[-2,1]$ tenemos que comprobar que la función es continua en $[-2,1]$.

La función *f(x)* en el intervalo $[-2,0)$ es $f(x)=x^3+a$ que es continua, pues es una función polinómica. En el intervalo $(0,1]$ es $f(x)=bx^2+cx-1$ que es continua, pues es una función polinómica. Estudiemos su continuidad en $x = 0$.

- $f(0)=0^3+a=a$
- $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x^3+a=a$
- $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} bx^2+cx-1=0+0-1=-1$

Para que sea continua estos tres valores deben ser iguales, por lo que $\boxed{a=-1}$.

La función es derivable en $(-2,1)$, por lo que debe ser derivable en $x = 0$. Para ello deben coincidir las derivadas laterales.

La derivada de la función es $f'(x)=\begin{cases} 3x^2 & si \quad -2\le x<0 \\ 2bx+c & si \quad 0<x\le 1\end{cases}$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-} 3x^2=0 \\ f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+} 2bx+c=c \\ f'(0^-)=f'(0^+)\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{c=0}$$

Con lo obtenido la función queda $f(x)=\begin{cases} x^3-1 & si \quad -2\le x\le 0 \\ bx^2-1 & si \quad 0<x\le 1\end{cases}$

Y por último debe cumplirse $f(-2)=f(1)\Rightarrow(-2)^3-1=b\cdot 1^2-1\Rightarrow \boxed{-8=b}$

Para que se cumplan las condiciones del teorema de Rolle la función debe ser:

$$f(x)=\begin{cases} x^3-1 & si \quad -2\le x\le 0 \\ -8x^2-1 & si \quad 0<x\le 1 \end{cases}$$

Aplicando el teorema de Rolle existe un valor $c\in(-2,1)$ tal que $f\,'(c)=0$.

Buscamos dicho valor "*c*".

$$f\,'(x)=\begin{cases} 3x^2 & si \quad -2\le x\le 0 \\ -16x & si \quad 0<x\le 1 \end{cases}$$

Esta función derivada se anula para *x = 0.*
El valor buscado es $c=0\in(-2,1)$

7. Calcule el valor de la integral $\int_0^{\pi} x^2\cos(2x)\,dx$ (2 puntos)

Calculamos primero la integral indefinida usando la integración por partes.

$$\int x^2\cos(2x)\,dx = \left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u = x^2 \rightarrow du = 2xdx\\ dv = \cos(2x)dx \rightarrow v = \int \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}sen(2x)\end{array}\right\} =$$

$$= x^2\frac{1}{2}sen(2x) - \int \frac{1}{2}sen(2x)\cdot 2xdx = \frac{x^2}{2}sen(2x) - \int xsen(2x)\,dx = \ldots$$

$$\int xsen(2x)\,dx = \left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u = x \rightarrow du = 1\cdot dx = dx\\ dv = sen(2x)dx \rightarrow v = \int sen(2x)\,dx = -\frac{1}{2}\cos(2x)\end{array}\right\} =$$

$$= x\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right) - \int -\frac{1}{2}\cos(2x)\,dx = -\frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx =$$

$$= -\frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}sen(2x)\right) = -\frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}sen(2x)$$

$$\ldots = \frac{x^2}{2}sen(2x) - \left(-\frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}sen(2x)\right) = \frac{x^2}{2}sen(2x) + \frac{x}{2}\cos(2x) - \frac{1}{4}sen(2x) + K$$

Calculamos el valor de la integral definida pedida.

$$\int_0^{\pi} x^2\cos(2x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}sen(2x) + \frac{x}{2}\cos(2x) - \frac{1}{4}sen(2x)\right]_0^{\pi} =$$

$$= \left[\frac{\pi^2}{2}sen(2\pi) + \frac{\pi}{2}\cos(2\pi) - \frac{1}{4}sen(2\pi)\right] - \left[\frac{0^2}{2}sen(2\cdot 0) + \frac{0}{2}\cos(2\cdot 0) - \frac{1}{4}sen(2\cdot 0)\right] = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

8. Calcule el área de la región plana encerrada por las gráficas de las funciones $f(x)=x^3-2x-1$ y $g(x)=2x-1$ (2 puntos)

Hallamos los puntos de corte de las dos gráficas.

$$f(x)=g(x)\Rightarrow x^3-2x-1=2x-1\Rightarrow x^3-4x=0\Rightarrow \{\text{Sacamos factor común}\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\left(x^2-4\right)=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{x=0}\\ x^2-4=0\Rightarrow x^2=4\Rightarrow \boxed{x=\sqrt{4}=\pm 2}\end{cases}$$

Las gráficas se cortan en tres puntos por lo que el área esta dividida en dos regiones. Calculamos el área de cada una de ellas y las sumamos para obtener el valor del área total.

$$\int_{-2}^{0} f(x)-g(x)\,dx=\int_{-2}^{0} x^3-2x-1-(2x-1)\,dx=\int_{-2}^{0} x^3-4x\,dx=$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_{-2}^{0}=\left[\frac{0^4}{4}-2\cdot 0^2\right]-\left[\frac{(-2)^4}{4}-2\cdot(-2)^2\right]=-4+8=4$$

Área trozo 1 = $4u^2$

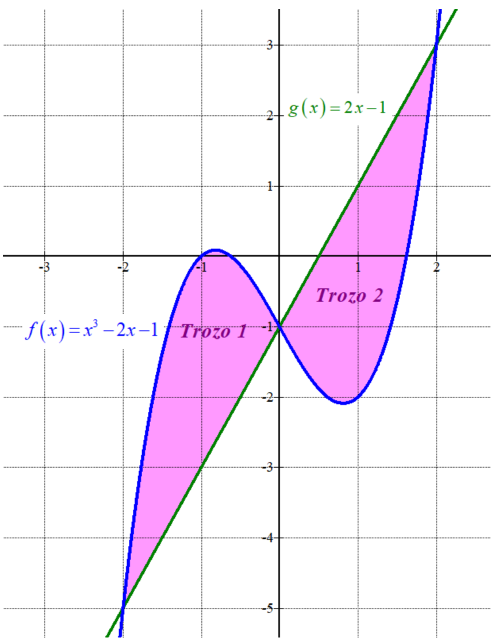
$$\int_{0}^{2} f(x)-g(x)\,dx=\int_{0}^{2} x^3-2x-1-(2x-1)\,dx=\int_{0}^{2} x^3-4x\,dx=$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_{0}^{2}=\left[\frac{2^4}{4}-2\cdot 2^2\right]-\left[\frac{0^4}{4}-2\cdot 0^2\right]=4-8=-4$$

Área trozo 2 = $|-4|=4u^2$

Área total = Área trozo 1 + Área trozo 2 = 4 + 4 = 8 u²

No pide dibujar el recinto pero lo hacemos para comprobar el resultado obtenido.



9. Se ha observado que en la fabricación de un cierto modelo de ordenador se presentan problemas de software con probabilidad 0,1 y problemas de hardware con probabilidad 0,05. Sabiendo que ambos tipos de problemas son independientes, se pide:
a) Probabilidad de que un ordenador presente alguno de estos problemas. (1 punto)
b) Sabiendo que un ordenador no presenta problemas de hardware, calcular la probabilidad de que no tenga problemas de software. (1 punto)

Llamamos S al suceso "el ordenador presenta problemas de software" y H al suceso "el ordenador presenta problemas de hardware".
Tenemos que *P(S) = 0.1* y que *P(H) = 0.05*.

a)

$$P(S\cup H)=P(S)+P(H)-P(S\cap H)=\left\{\begin{array}{l}\text{H y S son independientes}\\ P(S\cap H)=P(S)\cdot P(H)\end{array}\right\}=$$

$$=P(S)+P(H)-P(S)\cdot P(H)=0.1+0.05-0.1\cdot 0.05=\boxed{0.145}$$

b)

$$P\left(\overline{S}/\overline{H}\right)=\frac{P\left(\overline{S}\cap\overline{H}\right)}{P\left(\overline{H}\right)}=\frac{P\left(\overline{S\cup H}\right)}{1-P(H)}=\frac{1-P(S\cup H)}{1-P(H)}=\frac{1-0.145}{1-0.05}=\boxed{0.9}$$

10. Se tiene una moneda trucada para la que se sabe que la probabilidad de cruz es 0,3. Si se lanza la moneda cinco veces, calcular:
a) Probabilidad de obtener cuatro cruces. (0,5 puntos)
b) Probabilidad de obtener al menos cuatro cruces. (0,5 puntos)
c) Probabilidad de obtener a lo sumo cuatro cruces. (0,5 puntos)
d) Probabilidad de no obtener ninguna cruz. (0,5 puntos)

Como son muchos lanzamientos no podemos calcular la probabilidad usando un diagrama de árbol, tenemos que trabajar con una distribución de probabilidad binomial.

Llamamos X = Número de cruces obtenidas al lanzar cinco veces una moneda trucada.

Los lanzamientos son independientes entre sí y la probabilidad de obtener cruz es siempre la misma.

Los parámetros son *n = 5* y *p = P(Obtener cruz en un lanzamiento) = 0.3*

X = B(5, 0.3)

a) $P(X=4)=\binom{5}{4}\cdot 0.3^4\cdot 0.7^1=5\cdot 0.3^4\cdot 0.7=\boxed{\frac{567}{20000}=0.02835}$

b) Es la probabilidad de obtener 4 cruces más la probabilidad de obtener 5 cruces.

$$P(X\geq 4)=P(X=4)+P(X=5)=\binom{5}{4}\cdot 0.3^4\cdot 0.7^1+\binom{5}{5}\cdot 0.3^5\cdot 0.7^0=$$

$$=5\cdot 0.3^4\cdot 0.7+0.3^5=\boxed{\frac{1539}{50000}=0.03078}$$

c) Esta probabilidad la calculamos usando el suceso contrario.

$$P(X\leq 4)=1-P(X>4)=1-P(X=5)=1-\binom{5}{5}\cdot 0.3^5\cdot 0.7^0=1-0.3^5=\boxed{0.99757}$$

d) $P(X=0)=\binom{5}{0}\cdot 0.3^0\cdot 0.7^5=1\cdot 0.7^5=\boxed{0.16807}$