	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso **2021-2022** **MATERIA**: MATEMÁTICAS II	Modelo orientativo

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado

TIEMPO: 90 minutos. Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En una academia de idiomas se imparten clases de inglés, francés y alemán. Cada alumno está matriculado en un único idioma. El número de alumnos matriculados en inglés representa el 60% del total de alumnos de la academia. Si diez alumnos de francés se hubiesen matriculado en alemán, ambos idiomas tendrían el mismo número de alumnos. Además, la cuarta parte de los alumnos de inglés excede en ocho al doble de la diferencia entre los alumnos matriculados en francés y alemán. Calcule el número de alumnos matriculados en cada idioma.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la función

$$f(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{senx}{x} & si\ x<0 \\ xe^{4-x^2} & si\ x\geq 0 \end{cases}$$

a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.

b) (1 punto) Determine los extremos relativos de $f(x)$ en $(0,\infty)$.

c) (0.75 puntos) Calcule $\int_0^2 f(x)\,dx$.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una sonda planetaria se lanza desde el punto P(1, 0, 2) y sigue una trayectoria rectilínea que pasa por el punto Q(3, 1, 0) antes de impactar en una zona plana de la superficie del planeta, que tiene por ecuación $\pi \equiv 2x-y+2z+5=0$. Se pide:

a) (1.5 puntos) Calcular las coordenadas del punto de impacto y el coseno del ángulo entre la trayectoria de la sonda y el vector normal al plano π.

b) (1 punto) Sabiendo que la alarma de proximidad se dispara antes de llegar a la superficie cuando la distancia al planeta es 1, determinar en qué punto estará la sonda al sonar la alarma.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una urna contiene 7 bolas blancas y 12 bolas negras. Se extrae al azar una bola de la urna y se sustituye por dos del otro color. A continuación, se extrae una segunda bola de la urna. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la segunda bola extraída sea blanca.

b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que la segunda bola extraída sea de distinto color que la primera.

c) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída haya sido negra, sabiendo que la segunda bola fue blanca.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular los valores de *a* para que la matriz *A* no tiene inversa.
b) (1 punto) Para *a = 1*, calcular la inversa de la matriz *A*.
c) (1 punto) Para *a = 2*, resolver el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=B$.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea $f(x)=x+x^2$. Se pide:

a) (1 punto) Hallar el área de la región acotada que está limitada por la gráfica de *f* y la recta $y=2x$
b) (1.5 puntos) Una partícula en movimiento parte del origen y sigue la trayectoria determinada por la gráfica de *f*. En el punto *(1, f(1))* la partícula sale despedida en la dirección de la recta tangente. Determinar en qué punto choca con la recta vertical $x=2$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados los planos $\pi_1 \equiv x-2y+3z=6$, $\pi_2 \equiv 3x-z=2$ y el punto $A(1,7,1)$, se pide:

a) (0.5 puntos) Comprobar que π_1 y π_2 son perpendiculares.
b) (1 punto) Calcular el volumen de un cubo que tenga una cara en el plano π_1, otra cara en el plano π_2, y un vértice en el punto A.
c) (1 punto) Calcular el punto simétrico de A respecto de π_1.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dos características genéticas A y B aparecen en una especie animal con probabilidades respectivas de 0.2 y 0.3. Sabiendo que la aparición de una de ellas es independiente de la aparición de la otra, se pide calcular:

a) (0.5 puntos) La probabilidad de que un individuo elegido al azar presente ambas características.
b) (0.5 puntos) La probabilidad de que no presente ninguna de ellas.
c) (0.75 puntos) La probabilidad de que presente solamente una de ellas.
d) (0.75 puntos) La probabilidad de que, si elegimos al azar 10 individuos, exactamente 3 de ellos presenten la característica A.

SOLUCIONES

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
En una academia de idiomas se imparten clases de inglés, francés y alemán. Cada alumno está matriculado en un único idioma. El número de alumnos matriculados en inglés representa el 60% del total de alumnos de la academia. Si diez alumnos de francés se hubiesen matriculado en alemán, ambos idiomas tendrían el mismo número de alumnos. Además, la cuarta parte de los alumnos de inglés excede en ocho al doble de la diferencia entre los alumnos matriculados en francés y alemán. Calcule el número de alumnos matriculados en cada idioma.

Sean las incógnitas:

x = "Número de alumnos matriculados en inglés"
y = "Número de alumnos matriculados en francés"
z = "Número de alumnos matriculados en alemán"

"El número de alumnos matriculados en inglés representa el 60% del total de alumnos de la academia" → $x=0.60\cdot(x+y+z)$

"Si diez alumnos de francés se hubiesen matriculado en alemán, ambos idiomas tendrían el mismo número de alumnos**"** → $y-10=z+10$

"La cuarta parte de los alumnos de inglés excede en ocho al doble de la diferencia entre los alumnos matriculados en francés y alemán**"** → $\frac{x}{4}=2(y-z)+8$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x=0.60\cdot(x+y+z) \\ y-10=z+10 \\ \frac{x}{4}=2(y-z)+8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 10x=6x+6y+6z \\ y=z+20 \\ \frac{x}{4}=2y-2z+8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 10x-6x-6y-6z=0 \\ y=z+20 \\ x=8y-8z+32 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x-6y-6z=0 \\ y=z+20 \\ x=8y-8z+32 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x-6(z+20)-6z=0 \\ x=8(z+20)-8z+32 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x-6z-120-6z=0 \\ x=\cancel{8z}+160-\cancel{8z}+32 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x-12z-120=0 \\ \boxed{x=192} \end{array}\right\} \Rightarrow 4\cdot 192-12z-120=0 \Rightarrow 768-12z-120=0 \Rightarrow 648-12z=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12z=648 \Rightarrow \boxed{z=\frac{648}{12}=54} \Rightarrow \boxed{y=54+20=74}$$

Hay 192 alumnos matriculados en inglés, 74 en francés y 54 en alemán.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sea la función

$$f(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{senx}{x} & si\ x<0 \\ xe^{4-x^2} & si\ x\geq 0 \end{cases}$$

a) (0.75 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.
b) (1 punto) Determine los extremos relativos de $f(x)$ en $(0,\infty)$.
c) (0.75 puntos) Calcule $\int_0^2 f(x)\,dx$.

a) Estudiamos la continuidad de f en $x = 0$

$$\left.\begin{array}{r} f(0)=0\cdot e^{4-0^2}=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 1-\dfrac{senx}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x-senx}{x}=\dfrac{0}{0}=Indeterminación(L\'{}Hôpital)= \\ =\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-\cos x}{1}=\dfrac{1-\cos 0}{1}=\dfrac{1-1}{1}=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} xe^{4-x^2}=0\cdot e^{4-0^2}=0 \end{array}\right\}$$

La función es continua pues coincide el valor de la función con el de los límites laterales.

Estudiamos la derivabilidad de f en $x = 0$.

La derivada de la función es $f'(x)=\begin{cases} 0-\dfrac{x\cdot\cos x-1\cdot senx}{x^2}=\dfrac{x\cdot\cos x-senx}{x^2} & si\ x<0 \\ e^{4-x^2}+xe^{4-x^2}\cdot(-2x)=e^{4-x^2}-2x^2e^{4-x^2} & si\ x>0 \end{cases}$.

Veamos si coinciden las derivadas laterales en $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x\cdot\cos x-senx}{x^2}=\dfrac{0}{0}=Indeterminación(L\'{}Hôpital)= \\ =\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\cos x+x(-senx)-\cos x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\cancel{\cos x}-xsenx-\cancel{\cos x}}{2x}= \\ =\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-\cancel{x}senx}{2\cancel{x}}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-senx}{2}=\dfrac{-sen0}{2}=0 \\ f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{4-x^2}-2x^2e^{4-x^2}=e^{4-0^2}-2\cdot 0^2e^{4-0^2}=e^4-0=e^4 \end{array}\right\}$$

Como $f'(0^-)\neq f'(0^+)$ la función no es derivable en $x = 0$.

b) en $(0,\infty)$ la función es $f(x)=xe^{4-x^2}$.

Calculamos la derivada y buscamos los valores que la anulan

$$f'(x)=e^{4-x^2}+xe^{4-x^2}(-2x)=e^{4-x^2}-2x^2e^{4-x^2}=e^{4-x^2}\left(1-2x^2\right)$$

$$f'(x)=0\Rightarrow e^{4-x^2}\left(1-2x^2\right)=0\Rightarrow\begin{cases}e^{4-x^2}=0\to \text{¡Imposible!}\\ 1-2x^2=0\to 2x^2=1\to x^2=\frac{1}{2}\to x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\end{cases}$$

Tenemos un punto crítico en $x=+\sqrt{\frac{1}{2}}\simeq 0.7$.

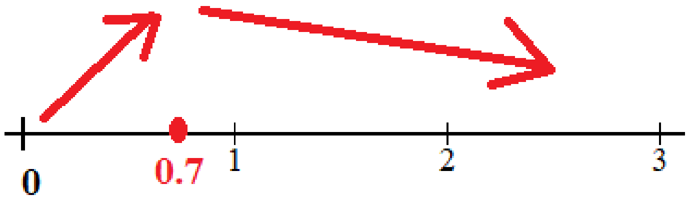
Valoramos la derivada antes y después de este valor.

- En $\left[0,\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ tomamos *x = 0.1* la derivada vale

  $f'(0.1)=e^{4-0.1^2}\left(1-2\cdot 0{,}1^2\right)=0.98\cdot e^{3.99}>0$. La función crece en $\left[0,\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$

- En $\left[\sqrt{\frac{1}{2}},+\infty\right)$ tomamos *x = 1* la derivada vale $f'(1)=e^{4-1^2}\left(1-2\cdot 1^2\right)=-e^3<0$. La función decrece en $\left[\sqrt{\frac{1}{2}},+\infty\right)$

La función sigue el esquema:



La función presenta un máximo relativo en $x=+\sqrt{\frac{1}{2}}\simeq 0.7$.

Como $f\left(+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\sqrt{\frac{1}{2}}e^{4-\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}}e^{3.5}$ las coordenadas del máximo relativo son $\left(\sqrt{\frac{1}{2}},\sqrt{\frac{1}{2}}e^{3.5}\right)$

c) En el intervalo (0, 2) la función es $f(x)=xe^{4-x^2}$.

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 xe^{4-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int_0^2 -2xe^{4-x^2}dx=\left[-\frac{1}{2}e^{4-x^2}\right]_0^2=$$

$$=\left[-\frac{1}{2}e^{4-2^2}\right]-\left[-\frac{1}{2}e^{4-0^2}\right]=\boxed{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^4\simeq 26.8}$$

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Una sonda planetaria se lanza desde el punto P(1, 0, 2) y sigue una trayectoria rectilínea que pasa por el punto Q(3, 1, 0) antes de impactar en una zona plana de la superficie del planeta, que tiene por ecuación $\pi \equiv 2x - y + 2z + 5 = 0$. Se pide:

a) (1.5 puntos) Calcular las coordenadas del punto de impacto y el coseno del ángulo entre la trayectoria de la sonda y el vector normal al plano π.

b) (1 punto) Sabiendo que la alarma de proximidad se dispara antes de llegar a la superficie cuando la distancia al planeta es 1, determinar en qué punto estará la sonda al sonar la alarma.

a) Hallamos la ecuación de la recta.

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}P(1,0,2)\\ Q(3,1,0)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{PQ}=(3,1,0)-(1,0,2)=(2,1,-2)\\ P(1,0,2)\in r\end{array}\right\}\Rightarrow r:\begin{cases}x=1+2\lambda\\ y=0+\lambda\\ z=2-2\lambda\end{cases}$$

Hallo el punto A de corte de la recta r y el plano π resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{r}\pi\equiv 2x-y+2z+5=0\\ r:\begin{cases}x=1+2\lambda\\ y=0+\lambda\\ z=2-2\lambda\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow 2(1+2\lambda)-\lambda+2(2-2\lambda)+5=0\Rightarrow 2+\cancel{4\lambda}-\lambda+4-\cancel{4\lambda}+5=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\lambda+11=0\Rightarrow \lambda=11\Rightarrow\begin{cases}x=1+2\cdot 11=23\\ y=11\\ z=2-2\cdot 11=-20\end{cases}\Rightarrow \boxed{A(23,11,-20)}$$

Hallamos el coseno del ángulo que forman el vector director de la recta y el vector normal del plano utilizando el producto escalar.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_r}=(2,1,-2)\\ \pi\equiv 2x-y+2z+5=0\Rightarrow \vec{n}=(2,-1,2)\end{array}\right\}\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{v_r},\vec{n}\right)=\frac{\left|\overrightarrow{v_r}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{v_r},\vec{n}\right)=\frac{(2,1,-2)(2,-1,2)}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{|4-1-4|}{\sqrt{9}\sqrt{9}}=\frac{|-1|}{9}\Rightarrow \boxed{\cos\left(\overrightarrow{v_r},\vec{n}\right)=\frac{1}{9}}$$

b) Buscamos un punto B de la recta situado a distancia 1 del plano.

$$\left.\begin{array}{r}r:\begin{cases}x=1+2\lambda\\ y=0+\lambda\\ z=2-2\lambda\end{cases}\\ B\in r\end{array}\right\}\Rightarrow B(1+2\lambda,\lambda,2-2\lambda)$$

Aplicamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

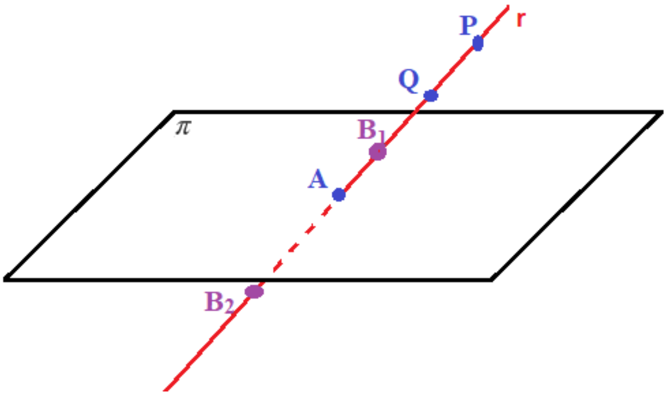
$$\left.\begin{array}{r}\pi \equiv 2x-y+2z+5=0\\ B(1+2\lambda,\lambda,2-2\lambda)\end{array}\right\} \Rightarrow d(B,\pi)=\frac{|2(1+2\lambda)-\lambda+2(2-2\lambda)+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|2+\cancel{4\lambda}-\lambda+4-\cancel{4\lambda}+5|}{3}=1\Rightarrow |11-\lambda|=3\Rightarrow \begin{cases}11-\lambda=3\Rightarrow 8=\lambda\\ 11-\lambda=-3\Rightarrow 14=\lambda\end{cases}$$

Existen dos puntos de la recta que están a distancia 1 del plano.

$$\left.\begin{array}{r}B(1+2\lambda,\lambda,2-2\lambda)\\ \lambda=8\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{B_1(17,8,-14)} \qquad \left.\begin{array}{r}B(1+2\lambda,\lambda,2-2\lambda)\\ \lambda=14\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{B_2(29,14,-26)}$$

Uno de estos puntos está situado antes del impacto en el plano y otro después, tras atravesar el plano.
Dado el valor de λ correspondiente a cada punto se deduce que el punto B_1 está situado antes del impacto (λ = 8), entre el punto Q y el A y el punto B_2 está situado tras el impacto (λ = 14), más alejado del punto Q que el punto B_1.



Para mayor seguridad calculamos la distancia de Q a cada uno de los puntos y comprobamos que la distancia de Q al punto B_2 es mayor y por tanto, el punto B_1 está entre Q y el plano y el punto B_2 está situado al otro lado del plano.

$$\left.\begin{array}{l}Q(3,1,0)\\ B_1(17,8,-14)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{QB_1}=(17,8,-14)-(3,1,0)=(14,7,-14)$$

$$d(Q,B_1)=\left|\overrightarrow{QB_1}\right|=\sqrt{14^2+7^2+(-14)^2}=21$$

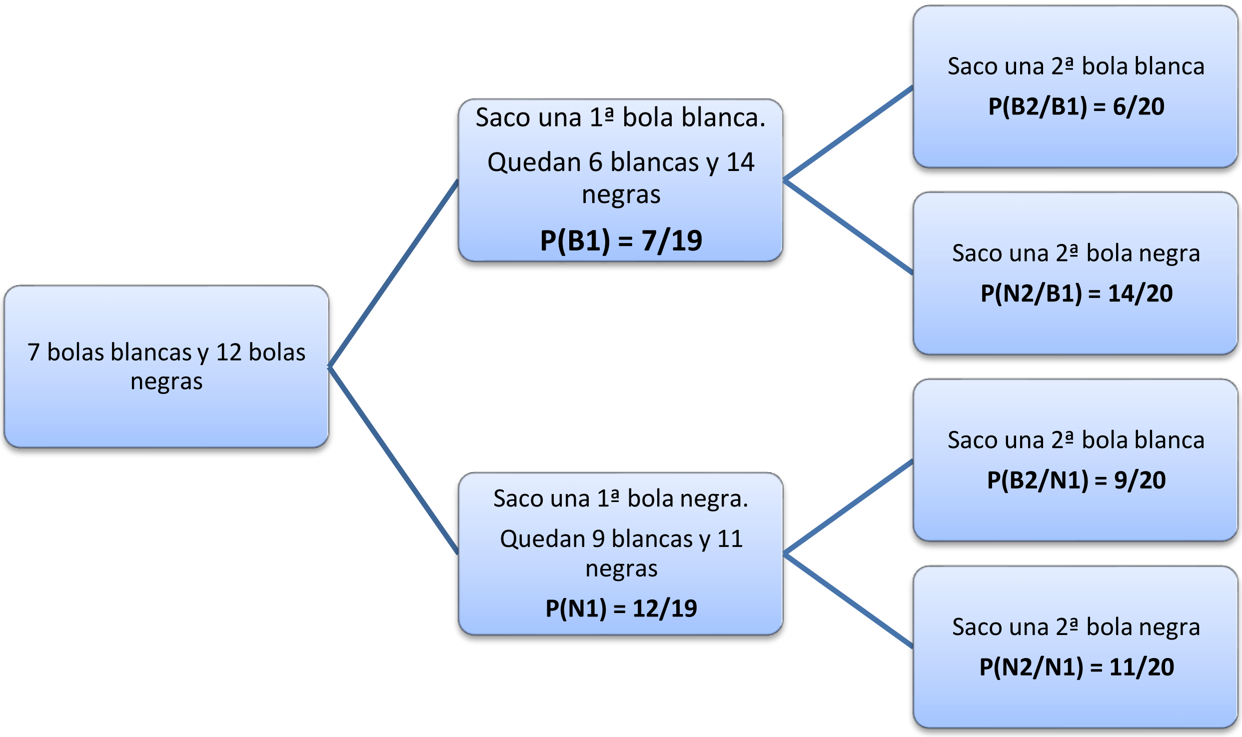
$$\left.\begin{array}{l}Q(3,1,0)\\ B_2(29,14,-26)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{QB_2}=(29,14,-26)-(3,1,0)=(26,13,-26)$$

$$d(Q,B_2)=\left|\overrightarrow{QB_2}\right|=\sqrt{26^2+13^2+(-26)^2}=39$$

$d(Q,B_2)=39>21=d(Q,B_1)$. Por tanto, el punto buscado es $B_1(17,8,-14)$.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Una urna contiene 7 bolas blancas y 12 bolas negras. Se extrae al azar una bola de la urna y se sustituye por dos del otro color. A continuación, se extrae una segunda bola de la urna. Se pide:
a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que la segunda bola extraída sea blanca.
b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que la segunda bola extraída sea de distinto color que la primera.
c) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que la primera bola extraída haya sido negra, sabiendo que la segunda bola fue blanca.

Llamamos B1 a “Sacar bola blanca en la primera extracción”, B2 a “Sacar bola blanca en la segunda extracción”, N1 a “Sacar bola negra en la primera extracción” y N2 a “Sacar bola negra en la segunda extracción”. Construimos un diagrama de árbol.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total y teniendo en cuenta el diagrama de árbol.

$$P(B2) = P(B1)P(B2/B1) + P(N1)P(B2/N1) = \frac{7}{19}\cdot\frac{6}{20} + \frac{12}{19}\cdot\frac{9}{20} = \boxed{\frac{15}{38} \simeq 0.394}$$

b) Las dos bolas extraídas son de distinto color si la primera es blanca y la segunda negra o bien la primera negra y la segunda blanca.

$$P(\text{Dos bolas de distinto color}) = P(B1 \cap N2) + P(N1 \cap B2) =$$

$$= P(B1)P(N2/B1) + P(N1)P(B2/N1) = \frac{7}{19}\cdot\frac{14}{20} + \frac{12}{19}\cdot\frac{9}{20} = \boxed{\frac{103}{190} \simeq 0.542}$$

c) Es una probabilidad a posteriori, aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(N1/B2) = \frac{P(N1 \cap B2)}{P(B2)} = \frac{P(N1)P(B2/N1)}{P(B2)} = \frac{\frac{12}{19}\cdot\frac{9}{20}}{\frac{15}{38}} = \boxed{\frac{18}{25} = 0.72}$$

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular los valores de *a* para que la matriz *A* no tiene inversa.
b) (1 punto) Para *a = 1*, calcular la inversa de la matriz *A*.
c) (1 punto) Para *a = 2*, resolver el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=B$.

a) Para que A no tenga inversa debe tener determinante nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a \\ a & 1 & 0 \end{vmatrix}=0+a^2+a-(0+0+0)=a^2+a$$

$$|A|=0 \Rightarrow a^2+a=0 \Rightarrow a(a+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a+1=0 \to a=-1 \end{cases}$$

La matriz A no tiene inversa para $a=0$ y $a=-1$

b) Para *a = 1* la matriz A tiene inversa, la calculamos con la fórmula.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}=\frac{\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}}{1+1}=\frac{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{2}$$

$$\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}}$$

c) Para $a = 2$ la matriz A tiene inversa.

$$A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&2\\2&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow|A|=\begin{vmatrix}0&1&2\\1&0&2\\2&1&0\end{vmatrix}=4+2=6$$

$$A^t=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&1\\2&2&0\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&1\\2&2&0\end{pmatrix}}{6}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}0&1\\2&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&1\\2&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&0\\2&2\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&2\\2&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&2\\2&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&1\\2&2\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&2\\1&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-2&2&2\\4&-4&2\\1&2&-1\end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=B$.

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=B\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-2&2&2\\4&-4&2\\1&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-6-2-4\\12+4-4\\3-2+2\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-12\\12\\3\end{pmatrix}$$

$$3\times\boxed{3\qquad\cdot\quad 3}\times 1\longrightarrow 3\times 1$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\\1/2\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{\begin{cases}x=-2\\y=2\\z=\dfrac{1}{2}\end{cases}}$$

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sea $f(x)=x+x^2$. Se pide:
a) (1 punto) Hallar el área de la región acotada que está limitada por la gráfica de *f* y la recta $y=2x$
b) (1.5 puntos) Una partícula en movimiento parte del origen y sigue la trayectoria determinada por la gráfica de *f*. En el punto *(1, f(1))* la partícula sale despedida en la dirección de la recta tangente. Determinar en qué punto choca con la recta vertical $x=2$.

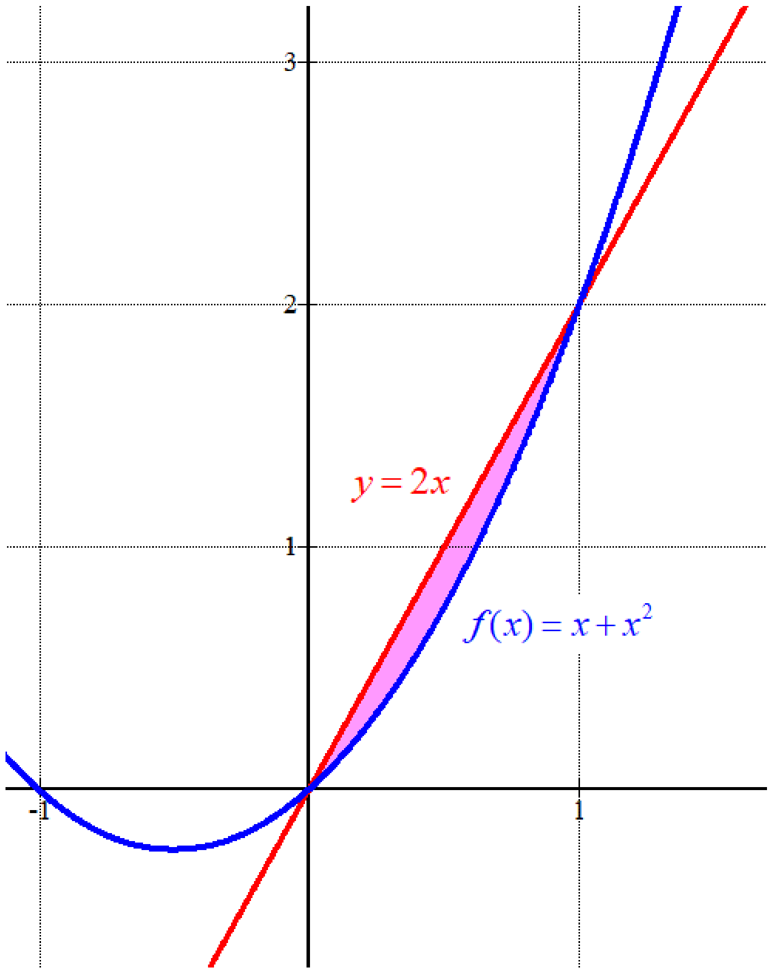
a) Hallamos los puntos de corte de parábola y recta.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x+x^2 \\ y=2x \end{array}\right\} \Rightarrow x+x^2=2x \Rightarrow x^2-x=0 \Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-1=0 \rightarrow x=1 \end{cases}$$

Las dos gráficas se cortan en $x=0$ y $x=1$.
Hacemos una tabla de valores y dibujamos recta y parábola.

x	$y=x+x^2$
-2	2
-1	0
0	0
1	2
2	6

x	$y=2x$
0	0
1	2



$$Área=\int_0^1 2x-\left(x+x^2\right)dx=\int_0^1 x-x^2dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\left[\frac{1^2}{2}-\frac{1^3}{3}\right]-\left[\frac{0^2}{2}-\frac{0^3}{3}\right]=$$

$$Área=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\boxed{\frac{1}{6}\simeq 0.166u^2}$$

b) Determinamos la ecuación de la recta tangente a la función *f(x)* en $x = 1$.

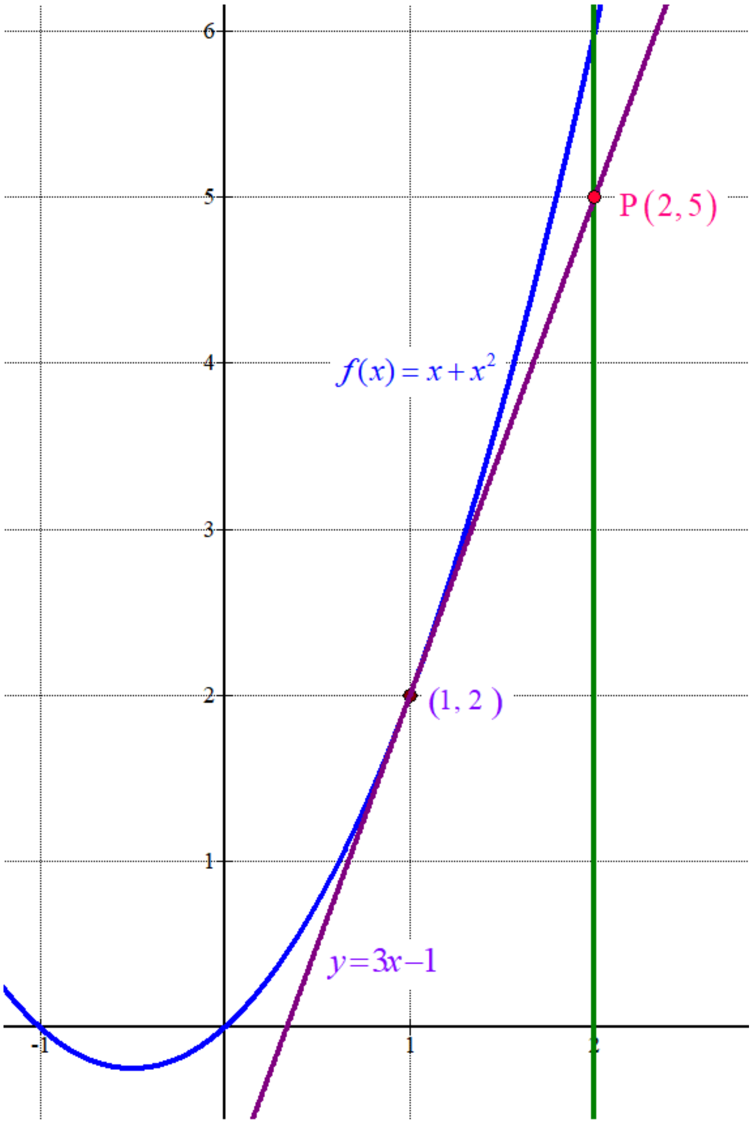
$$f(x) = x + x^2 \Rightarrow f(1) = 1 + 1^2 = 2$$

$$f(x) = x + x^2 \Rightarrow f'(x) = 1 + 2x \Rightarrow f'(1) = 1 + 2 = 3$$

$$\text{Recta tangente} \rightarrow y - 2 = 3(x-1) \Rightarrow y - 2 = 3x - 3 \Rightarrow y = 3x - 1$$

Nos piden hallar el punto de corte de la recta tangente con la recta vertical $x = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} y = 3x - 1 \\ x = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 6 - 1 = 5 \Rightarrow \text{Punto de corte en } P(2,5)$$



B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dados los planos $\pi_1 \equiv x-2y+3z=6$, $\pi_2 \equiv 3x-z=2$ y el punto $A(1,7,1)$, se pide:

a) (0.5 puntos) Comprobar que π_1 y π_2 son perpendiculares.

b) (1 punto) Calcular el volumen de un cubo que tenga una cara en el plano π_1, otra cara en el plano π_2, y un vértice en el punto A.

c) (1 punto) Calcular el punto simétrico de A respecto de π_1.

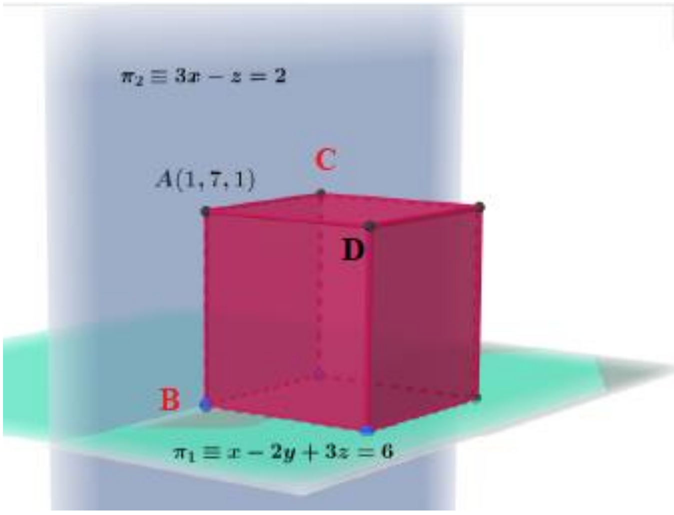
a) Comprobamos que los vectores normales son perpendiculares y su producto escalar debe ser nulo.

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 \equiv x-2y+3z=6 \rightarrow \overrightarrow{n_1}=(1,-2,3)\\ \pi_2 \equiv 3x-z=2 \rightarrow \overrightarrow{n_2}=(3,0,-1)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=(1,-2,3)(3,0,-1)=3+0-3=0$$

Al ser el producto escalar de sus vectores normales cero los planos son perpendiculares.

b)

La situación planteada aparece en el siguiente dibujo.



Necesitamos determinar el resto de vértices B, C y D.

Para determinar el punto B hallamos la recta *r* perpendicular al plano π_1 que pasa por A y el punto B será el punto de corte de esta recta con el plano π_1.

$$\pi_1 \equiv x-2y+3z=6 \rightarrow \overrightarrow{n_1}=(1,-2,3)$$

$$r \equiv \begin{cases} A(1,7,1)\in r \\ \overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{n_1}=(1,-2,3)\end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=7-2\lambda \\ z=1+3\lambda\end{cases}$$

$$B \rightarrow \begin{cases} \pi_1 \equiv x - 2y + 3z = 6 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 7 - 2\lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases} \end{cases} \Rightarrow 1 + \lambda - 2(7 - 2\lambda) + 3(1 + 3\lambda) = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \lambda - 14 + 4\lambda + 3 + 9\lambda = 6 \Rightarrow 14\lambda = 16 \Rightarrow \lambda = \frac{16}{14} = \frac{8}{7} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \frac{8}{7} = \frac{15}{7} \\ y = 7 - 2\frac{8}{7} = \frac{33}{7} \\ z = 1 + 3\frac{8}{7} = \frac{31}{7} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B\left(\frac{15}{7}, \frac{33}{7}, \frac{31}{7}\right)$$

Como solo necesitamos el volumen del cubo y tenemos los dos extremos de una arista, calculamos la longitud de la arista AB y el volumen es el cubo de dicho valor.

$$\left. \begin{array}{l} A(1,7,1) \\ B\left(\frac{15}{7}, \frac{33}{7}, \frac{31}{7}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(\frac{15}{7}, \frac{33}{7}, \frac{31}{7}\right) - (1,7,1) = \left(\frac{8}{7}, \frac{-16}{7}, \frac{24}{7}\right)$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\left(\frac{8}{7}\right)^2 + \left(\frac{-16}{7}\right)^2 + \left(\frac{24}{7}\right)^2} = \frac{8\sqrt{14}}{7}$$

$$\boxed{Volumen = \left(\frac{8\sqrt{14}}{7}\right)^3 \simeq 78.19\ u^3}$$

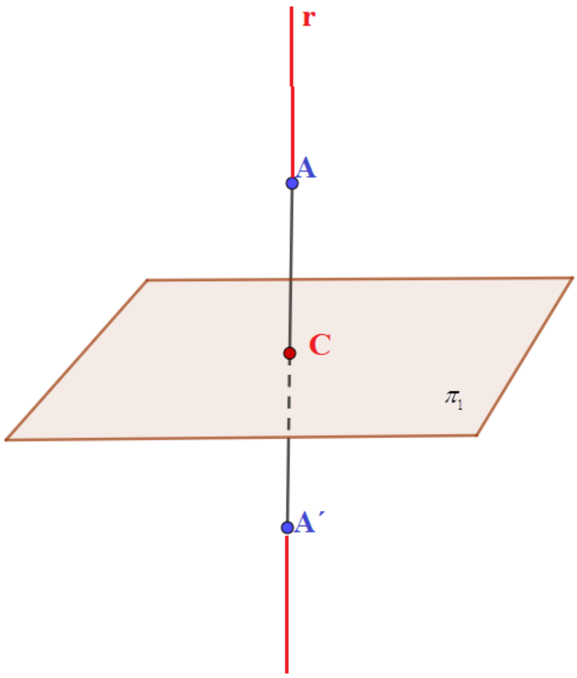
OTRA FORMA DE HACERLO

Debemos darnos cuenta que la longitud de la arista AB es la distancia del punto A al plano π_1.

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \equiv x - 2y + 3z - 6 = 0 \\ A(1,7,1) \end{array} \right\} \Rightarrow d(A, \pi_1) = \frac{|1 - 2\cdot 7 + 3 - 6|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}} = \frac{16}{\sqrt{14}}$$

$$\boxed{Volumen = \left(\frac{16}{\sqrt{14}}\right)^3 = \frac{1024}{14\sqrt{14}} \simeq 78.19\ u^3}$$

c) Hallamos la recta *r* perpendicular al plano π_1 que pasa por *A*. Determinamos el punto *C* de corte de la recta r y el plano. El punto A´ simétrico de A respecto del plano π_1 es el punto que se obtiene al sumarle al punto C el vector $\overrightarrow{AC}$.



$$\pi_1 \equiv x-2y+3z=6 \to \vec{n_1}=(1,-2,3)$$

Ecuación de la recta r → $r \equiv \begin{cases} A(1,7,1)\in r \\ \vec{v_r}=\vec{n_1}=(1,-2,3) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=7-2\lambda \\ z=1+3\lambda \end{cases}$

Punto C de corte de recta y plano:

$$C \to \begin{cases} \pi_1 \equiv x-2y+3z=6 \\ r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=7-2\lambda \\ z=1+3\lambda \end{cases} \end{cases} \Rightarrow 1+\lambda-2(7-2\lambda)+3(1+3\lambda)=6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+\lambda-14+4\lambda+3+9\lambda=6 \Rightarrow 14\lambda=16 \Rightarrow \lambda=\frac{16}{14}=\frac{8}{7} \Rightarrow \begin{cases} x=1+\frac{8}{7}=\frac{15}{7} \\ y=7-2\frac{8}{7}=\frac{33}{7} \\ z=1+3\frac{8}{7}=\frac{31}{7} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C\left(\frac{15}{7},\frac{33}{7},\frac{31}{7}\right)$$

Punto A´ simétrico de A respecto del plano π_1

$$\left.\begin{array}{l} A(1,7,1) \\ C\left(\frac{15}{7},\frac{33}{7},\frac{31}{7}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AC}=\left(\frac{15}{7},\frac{33}{7},\frac{31}{7}\right)-(1,7,1)=\left(\frac{8}{7},\frac{-16}{7},\frac{24}{7}\right)$$

$$\boxed{A'=\left(\frac{15}{7},\frac{33}{7},\frac{31}{7}\right)+\left(\frac{8}{7},\frac{-16}{7},\frac{24}{7}\right)=\left(\frac{23}{7},\frac{17}{7},\frac{55}{7}\right)}$$

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dos características genéticas A y B aparecen en una especie animal con probabilidades respectivas de 0.2 y 0.3. Sabiendo que la aparición de una de ellas es independiente de la aparición de la otra, se pide calcular:
a) (0.5 puntos) La probabilidad de que un individuo elegido al azar presente ambas características.
b) (0.5 puntos) La probabilidad de que no presente ninguna de ellas.
c) (0.75 puntos) La probabilidad de que presente solamente una de ellas.
d) (0.75 puntos) La probabilidad de que, si elegimos al azar 10 individuos, exactamente 3 de ellos presenten la característica A.

a) $P(A\cap B)=\left\{\begin{matrix}\text{A y } B \\ \text{son independientes}\end{matrix}\right\}=P(A)P(B)=0.2\cdot 0.3=\boxed{0.06}$

b)

$$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P(A\cup B)=1-\left(P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right)=$$

$$=1-\left(0.2+0.3-0.06\right)=1-0.44=\boxed{0.56}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

$$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=\left\{\begin{matrix}\overline{A}\text{ y }\overline{B} \\ \text{son independientes}\end{matrix}\right\}=P\left(\overline{A}\right)P\left(\overline{B}\right)=(1-0.2)(1-0.3)=\boxed{0.56}$$

c)

$$P\left(\left(\overline{A}\cap B\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)\right)=P\left(\overline{A}\cap B\right)+P\left(A\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{A}\right)P(B)+P(A)P\left(\overline{B}\right)=$$

$$=(1-0.2)\cdot 0.3+0.2\cdot(1-0.3)=0.24+0.14=\boxed{0.38}$$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

$$P(\text{Solo presente una de las caracteristicas})=$$
$$=P(\text{Presente alguna de las dos caracteristicas})-P(\text{Presente las dos caracteristicas})=$$
$$=P(A\cup B)-P(A\cap B)=0.44-0.06=\boxed{0.38}$$

d) Sea X = Número de individuos con característica A.
Las repeticiones son independientes entre sí. La probabilidad de éxito es $p = 0.2$.

X es una variable aleatoria binomial de parámetros $n = 10$ y $p = 0.2$.
$X = B(10, 0.2)$
Nos piden calcular $P(X=3)$.

$$P(X=3)=\binom{10}{3}\cdot 0.2^3\cdot 0.3^7\simeq\boxed{0.2013}$$